Oscar Pacheco Ríos

Del Quipu Incaico a la Yupana
El computador Ancestral

SERIE
ETNOGEOMETRÍA
PARA LA
ETNOMATEMÁTICA Nº 2

Santa Cruz de la Sierra, septiembre 1999

INDICE

A mis mentores:

Profa. Ma. Luisa Palenque, mi primera maestra. Artífice de mi vocación.

Prof. Guido Villagómez modelo de lucha educativa.

A mis Colegas y Discípulos:

Fuente de mi motivación y perfeccionamiento docente.

A mi Patria toda:

Digna de mejor destino, como producto de una real y consciente educación liberadora del sistema.

A mi familia:

Por su apoyo desmedido y sacrificado, al compartir la ilusión de poseer una filosofía educativa de y para Bolivia.

Oscar Pacheco Ríos.

Apreciada(o) Colega del Magisterio y compañero de lucha por un mañana mejor. Si este ejemplar llega a sus manos sin ser pirateado. Antes de leerlo, te pido meditar sobre este aforismo, pues lo dedico con mucho cariño, a ti, a nuestros discípulos y a mi primera maestra.

La vida es MATEMATICA *

La vida es MATEMÁTICA pura.
En la que cada día:
Se SUMA experiencias.
Se RESTA ignorancia.
Se MULTIPLICA conocimientos.
Se DIVIDE, la ocupación y el ócio,
Se eleva a la enésima POTENCIA, el trabajo.
Extrayendo, la enésima RAIZ del sacrificio.
Y se LOGARITMA, la existencia que extrapola
Los LÍMITES y DERIVADAS en el CÁLCULO
del "sistema" que nos subyuga.
Expoliando nuestra inteligencia
por un paradójico progreso,
para encaminarnos a la dependencia

Oscar Pacheco Ríos

...

INTRODUCCION

Cuando nos propusimos realizar el ensayo "Un intento de Filosofía de la Matemática" Nos hicimos una serie de preguntas entre las cuales teníamos la siguiente:

¿Cuál es la naturaleza del proceso de aprendizaje?

Hoy esta cuestión nos obliga a formular otra, que viene a ser copartícipe de esa preocupación:

¿Qué medios apropiados utilizamos para coadyuvar a ese proceso?

Posiblemente podríamos citar un sin número de elementos, a los que aleatoriamente les hemos llamado medios. Desde los más simples y baratos como pueden ser unos granos de maíz o porotos, hasta los más sofisticados como son las calculadoras de cualquier tamaño a las computadoras, o inclusive nuestra creatividad echando mano a experiencias circundantes. Sea lo que fuere, consideramos, que aun no estaríamos satisfechos, porque siempre nos preguntaríamos, ¿y antes como se efectuaba ese proceso de aprendizaje y qué medios se utilizaban?

En el intento de respondemos hemos realizado una búsqueda incesante, incansable, prolífica y sustancial iniciando con lo que contamos actualmente como es la tecnología de punta. La informática y sus aplicaciones mediante un viaje virtual a las bibliotecas, hasta llegar en forma retrospectiva, a los orígenes de la propia computadora, no, a aquella que se nos dicen que construyó el conocido ingles, Sr. Charles Babagge. Sino, mucho más atrás, no sólo en el tiempo más también, en el espacio, indagando, a las culturas ancestrales de las que se pueda tener memoria escrita, como es la cultura prehispánica.

Y, ¿dónde ir para indagar?

Nos dirigimos a lo de nuestros grandes amigos. Los libros. Silentes mensajeros que guardan entre sus páginas informaciones tan valiosas que fueron colocadas por autores o cronistas de esa época antes citada, y otras posteriores, así como por investigadores de épocas recientes.

El presente ensayo lo realizamos con sólo dos fines primordiales, uno, como es obvio, el educativo y otro, el de tener una idea más clara de lo que era el "quipu" su uso en el incario junto a la función de la "yupana" (contador y/o calculadora"), pero, ante todo fundamentar la razón de volver a usar o, **poner en vigencia a la "yupana" incaica** en nuestras escuelas, como el medio auxiliar más efectivo y económico para coadyuvar en el aprendizaje de la Matemática, partiendo de la Etnogeometría y la Etnomatemática de un modo integral y de la predisposición lúdica del aprendiz. Esta es una de las razones por las que en el capítulo final tenemos variados ejemplos del uso y aplicación de la yupana con operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Es muy posible que algún lector se pregunte y diga, como es que desde Santa Cruz, un lugar tan distante de la cuna preincaica y prehispánica se pretenda escribir sobre un elemento tan propio de la cultura andina?

Para responder a esa y otras preguntas que pudieran surgir, diremos que los valores culturales que permiten hacer ciencia, no tienen territorialidad o, no son un patrimonio petrificado, que no pueda ser difundido y/o actualizado, si ellos van a prestar un servicio también cultural a la propia humanidad que, día a día procura superación. Pero, si revisamos con detenimiento la propia historia, veremos que Santa Cruz también formaba parte del incario.

"*En una segunda expedición a las selvas orientales, el Sapa-Inca, repobló el valle de Cochabamba con familias quechuas procedentes del Cuzco y avanza hasta Samaipata, donde fijó su frontera y dejó una guarnición acuartelada en una vieja fortaleza tiwanakota reconstruida*. ("Los imperios Andinos" J. F. Velarde)

En lo que respecta al "quipu", no pretendemos hacer un estudio riguroso de lo que era. Intentamos de modo general conocer su origen, construcción, cromatismo, categorías, utilidad que prestó, pero, con la "yupana" incaica, si lo haremos, veremos su origen, su relación con el quipu y la aplicación positiva que podemos darle en la actualidad.

En resumen diremos que, tres son los tópicos principales que abordaremos: una primera parte sobre la naturaleza del quipu; la segunda, el estudio de la Yupana y tercera, su aplicación mediante ejemplos y ejercicios prácticos.

CONSULTANDO A LOS ANTECESORES.

Antes de todo y para evitar malos entendidos, parafraseamos, una expresión usada por un miembro de "Los amigos de la Egiptología", respecto a lo que dicen catedráticos y alumnos de famosas universidades españolas para alentar, la búsqueda de la verdad:

"Sí alguien copia un libro es un plagio, pero si copia o consulta varios libros es una investigación".

Luego, consideramos que hemos hecho una investigación, consultamos y/o consultaremos todas las fuentes posibles, entre las que destacan, la elaborada por cronistas de la estirpe del nativo Guamán o Huamán Poma y/o del soldado hispano Cieza de León, sin desmerecer a otros prolíficos autores contemporáneos y modernos cuya lista es larga, amen de la propia bibliografía de los consultados, a quienes no los citamos expresamente ahora por no cometer omisiones involuntarias.

En ese intento nos sumergimos en ese viaje al pasado para incursionar en el campo de la Etnociencia, procurando sustanciar una vez más, que para hacer Etnomatemática, según nuestro entender necesariamente deberíamos por lo menos pensar primero en la Etnogeometría sin ánimo de sobreponerla tal como ya lo explicamos en el trabajo ya publicado: "Etnogeometría para la Etnomatemática".

En esta empresa, no nos imaginamos que, cada vez haríamos un recorrido retrospectivo, más y más apasionante hacia lugares de la Historia preincaica y prehispánica (literalmente hablando), visitando esas culturas antiguas que habían alcanzado un alto grado de desarrollo, como demuestran las propias ruinas de Tiwanaku en las que, pese al tiempo transcurrido, nos admiran sus colosales trabajos de arquitectura e ingeniería, o las de Machu Picchu, en cuyo lugar sus habitantes hicieron una labor de alta escuela, construyendo templos, palacios, terrazas o andenes con una perfecta distribución de canales de riego, distribución que, sólo con la Teoría de redes de Könisberg, se podría resolver en su estructuración matemática. Aun hoy en día con toda la tecnología, no sería fácil realizar semejantes trabajos de hidráulica, así como los serpenteantes caminos entre las montañas que parecen conducimos hasta el cielo los que:

"*En su gran mayoría eran empedrados, su ancho variaba entre 1.50 a 4 m. Se elevaban cerca de un metro sobre el nivel del terreno estaban limitados por pretiles y construidos con sentido de "rectitud direccional" procurando unir dos puntos dodos por su menor distancia y superando los obstáculos en vez de evitarlos."* (J. F. Velarde 130.1977)

Tales muestras, además nos indican que esos constructores tenían conocimientos básicos de geometría y seguramente algún un sistema de cálculo y medición.

Después de observar ya sea en una fotografía o en el mismo lugar, quien podría dudar de que también poseían, una bien montada organización administrativa y económica, que debió estar basada en la previsión de guardar alimentos para los tiempos de espera entre la siembra y la cosecha de esos productos agrícolas? Inclusive para los eventuales contratiempos de la sequía o desastres naturales y para un reparto proporcional entre todos los habitantes desde el Soberano al último vasallo, y esta nuestra cábala o conjetura la ratifica Oscar Valdivia Gutiérrez en sus apuntes cuando dice:

"Los depósitos llenos de alimentos y de objetos manufacturados eran el fundamento de una político distributiva, ya fuese del inca o de los curacas locales, o sea, la distribución de bienes

se consideraba una manifestación de riqueza en un mundo que desconocía el empleo de la moneda."

Justamente debido a que no se conocía un elemento que justipreciara el valor ya sea del trabajo, agrícola, artesanal debió obligar a que se realizarán cuentas que posibilitarán conocer el número de habitantes o saber las cuantías de todo lo guardado en los depósitos, pues, como indica O. Valdivia;

"Igualmente los depósitos constituían un seguro de supervivencia, una posibilidad de afrontar los desastres climáticos, pero al mismo tiempo surgía la necesidad de conocer los totales de las especies reunidas, era necesario contabilizar las existencias, conocer las cantidades exactas de los bienes guardados".

Si dijimos más antes, que no se conocía una moneda de pago, eso no implica que, ante la ausencia de la misma, se debía poseer algún rudimento de contabilidad o medios que permitieran verificar circunstancialmente los acopios o distribución de cada cosecha, entrega o distribución de esa producción, inclusive sobre los tributos que el pueblo debía aportar al soberano y, cuando no tenían con que tributar inclusive lo hacían con sus piojos, y eso se debía contabilizar con algo, por tanto consideramos que el gráfico de la pagina 360 de la "Coronica) de Guamán Poma, es un indicador, que posteriormente lo estudiaremos en detalle, pero, por ahora Valdivia nos corrobora:

"Una prueba de la exactitud de la contabilidad realizada en los Tampus (tambos), ya fuesen ellos del Estado o de los grandes señores andinos, fueron los quipus presentados por los curacas de Hartun Jauja ante la real audiencia de los reyes en 1561. La precisión de los conocimientos de los naturales y la facilidad con que leían los nudos de los quipus, hizo que fuesen aceptados en la información de los curacas."

"Las cantidades mencionadas fueron expuestas en medidas castellanas (no podía ser de otro modo dada la imposición del idioma del avasallador peninsular que llegó con lengua, costumbres y experiencias traídas del viejo mundo), *pero se conservó el orden de los objetos enumerados según las categorías andinas. A pesar de la quiebra de las instituciones indígenas a la llegada de los españoles, se siguieron manejando los quipus, anudando las salidas y también los ingresos a los depósitos."*

Por los documentos a los que hemos tenido acceso incluyendo a los de Huamán Poma, Pedro Cieza de León o Garcilaso de la Vega, nos podemos enterar de la forma de vida en el incario. Y, las escrituras de Cieza posiblemente sean en las que se pueda acreditar con mayor confianza. Pues, hay razones valederas para ello. Cieza llegó a territorio incaico solo quince años después de iniciado el asalto a Caja-marca, a la que eufemísticamente le llaman conquista. Cieza tenía entonces 29 años cuando inició su caminata por el territorio avasallado como un soldado común y son sus postreras jornadas las más marcantes, que se inician allá por el 1547, cuando él recorre los caminos norteños, casi por los extremos de lo que era el Imperio Incaico. Según sus propios comentarios, esos caminos eran superiores a los caminos romanos, por los que, cuando el era muchacho, había caminado en su terruño español. Se dio cuenta que, las cosas eran diferentes con las que él ya conocía. Aún hoy, pese, a los más de cinco siglos que han pasado, podemos comprender lo que Cieza sentía al realizar las comparaciones y darse cuenta del lugar en el que se encontraba. Pues escribió:

"Este territorio y el resto de Las Indias están a muchas leguas de España y hay muchos mares de por medio"

Él tuvo que ver y observar cosas que otros, que le siguieron, no pueden haber visto y, él conversó con personas que eran adultos en el apogeo del poderío incaico. Además, Cieza es un interlocutor capaz. Con un rico vocabulario, y una habilidad propia de él, con una narrativa concisa, para que el lector menos avisado pudiera entenderle. Por ejemplo veamos lo que él dice: *"dondequiera que el español ha pasado, ha conquistado y ha descubierto, es como si un fuego* *hubiera ido y había destruido todo él paso".* ¿Cabe alguna explicación más para dar testimonio de las fechorías de sus coterráneos?

Mucha de la información que nos da Cieza, mayormente proviene casi exclusivamente de la que, también él recibió de los burócratas depuestos de la administración incaica. Y, de eso nos damos cuenta al leerlo; los burócratas eran un grupo humano especial y numéricamente pequeño comparado con toda la población conquistada y que según algunas estimaciones eran entre tres y cinco millones de personas.

Seguramente, el lector se preguntará, ¿y qué, de Huamán Poma, no es confiable?

Pues sí, es confiable y mucho, pero hay escritores que aferrados a su modo de pensar occidental que, se creen los únicos dueños de la verdad, han tratado de crear un cerco de descrédito alrededor de Huamán Poma y a se atreven a decir que se lo debe leer con lupa.

Si bien no encontramos la rica prosa de Cieza o la de los otros escritores contemporáneos o, posteriores a Huamán Poma, que en su "*Nueua Corónica*", él lo hizo con muchas ilustraciones de representación concreta y aunque lo hace con un castellano mezclado con Quechua, eso no le quita fidelidad a la crónica. Y, lo que más vale y siempre tendrá un valor intrínseco, son justamente esos gráficos que hablan por sí solos, más que muchas floridas explicaciones.

APOLOGISTAS Y DETRACTORES DE GUAMÁN POMA

Parece ser que en esta vida quien no se expresa bajo los cánones del pensamiento occidental o el pensamiento dominante, está condenado a ganarse detractores gratuitos. Cualquier ser humano que lea los documentos que hemos consultado y no sólo los de Guamán Poma, también otros, quedar maravillado ante el coraje que tuvieron esos cronistas de colocar en el papel sus observaciones y experiencias, para que generaciones venideras se informaran de esa realidad ajena a la nuestra y lo que es más, cómo hicieron ese trabajo en condiciones en las que debían preparase su propia tinta y construir su propia pluma.

Uno de esos exaltados detractores es Raúl Porras Barrenechea, quien califica con dureza al cronista Poma, pero sin embargo no le queda otro camino que admitir lo valioso de su empeño, pues, dice:

"Es mérito que un indio de su tiempo con escasa y confusa cultura, pero su viva intuición, abordara la hazaña intelectual de escribir una crónica. Pero esto no puede llevarnos a divinizar todos sus yerros, inepcias e inexactitudes. (Porras 1948:57).

-Nosotros nos preguntamos. ¿El ser "indio" le quita capacidad intelectiva o lo hace un inútil? ¿Pide Guamán Poma que lo deifiquen para que se viertan expresiones de esa naturaleza? -

Y agrega que

"Huamán Poma lejos de ser un erudito, yerra a coda paso en las noticias más sencillas y divulgadas sobre hechos cercanos del Incario o de la conquista ocurridos en vida de sus padres o en la suya misma... (ibid).

Otro émulo de Porras es Francisco Esteve Barba en el "Estudio Preliminar" "A las Crónicas Peruanas de Interés Indígena", dice que

"El mismo lo ha embrollado todo a causa de una mentalidad oscura, confusa y orgullosa... de una naturaleza llena de complejos y de un idioma mixto a veces arbitrario" (Esteve 1968: LXI),

Y en cuanto a la expresión gráfica, que para nosotros tiene especial interés:

"Lo que más llama la atención en el manuscrito es su copiosa ilustración de dibujos a pluma sin color, a toda plana, trazados por una mano primitiva pero segura, llena de una graciosa ingenuidad.

La denominación indígena de determinados objetos queda explicada mejor que por una descripción, por la imagen más o menos hábilmente conseguida del objeto mismo" (Esteve 1968: LXIII)

Como se ve, es otro a quien no le cae bien Poma, pero, sin embargo, tiene que reconocer, los gráficos informan mejor que las palabras, para justificar su opinión de que

"el gran defecto de Huamán Poma es su incultura o lo que es peor su semi-incultura".

Porras cita a Poma cuando habla éste habla de sí mismo:

"... ***la rudeza de mi ingenio y ciegos ojos y poco ver y poco saber y no ser letrado ni doctor ni licenciado ni latino*** *(ibid)*

Estamos en las postrimerías del Siglo XX y hay mucha gente por ahí que aún no se da cuenta de ese detalle que, para sentirse persona no es necesario poseer un título académico y Guamán Poma lo hizo notar hace más 500 años atrás.

Pero no todo es negativo dice Porras, ya que:

"La primera parte de la crónica contiene, aun en el desorden cháchara repeticionista del indio viejo noticias folklóricas de gran interés sobre los ídolos y las huacas, los sacrificios y los ritos, los hechiceros, las abusiones, las procesiones, el ayuno, el entierro este sentido una cantera magnífica" (Porras 1948:42).

Y algo que tiene especial interés para nosotros:

"El instinto estadístico de los quipucamayos antiguos, asoma por debajo de la indumentaria española de Huamán Poma y se une a su propensión tintirillesca de influencia colonial. " (Porras 1948:54).

Las opiniones tan adversas de Porras y otros, no han dejado de generar una corriente contraria. No todos concuerdan con él, pues, hay otros autores como Nathan Wachtel que en su libro Sociedad e Ideología hace la apología del cronista y de su crónica, pues, para él

"La obra de Guamán Poma constituye una fuente prodigiosa de información sobre el mundo indígena antes y después de la conquista." (Wachtel 1973:65)

Y, ante las acusaciones de inexactitud o vaguedad señala que

"La crónica de Guamán Poma no es confusa sino en la medida en que la juzgamos a partir de nuestro criterio occidental… (Wachtel 1973: 167)

Mediante, los comentarios adversos o favorables y lo que hemos leído sobre Guamán Poma, podemos formarnos una idea de la personalidad que lo caracterizaba, la misma que nos ayudan a guiar nuestra o observación sobre los documentos referidos a nuestro trabajo. Luego, consideramos que nuestro nativo cronista, si bien no era un letrado universitario, como él mismo lo reconoce y su cultura intelectual parecía poca, era un observador innato e intuitivo, digno de ser imitado y admirado y que, además, supo trasmitirnos con claridad sus observaciones, pero, es visto con un poco de menos precio por nuestro entender alienado,

"... fantaseador a veces, ávido de hacerse valer, con hábito indagatorio y con "instinto estadístico" que puede explicar su interés en elementos de registro y cálculo como son el quipu y la yupana."

Si por registrar lo que ya conocemos se le da endilga toda clase de adjetivos. ¿Qué le hubieran dicho si Guamán Poma hubiera escrito lo que Ciesa dijo: *"dondequiera que el español ha pasado, ha conquistado y ha descubierto, es como si un fuego hubiera ido y había destruido todo él paso"?* Mejor ni imaginarnos, pues, nos da escalofríos.

Aquí cabe preguntamos, ¿hay o no, otros cronistas nativos de la talla de Huamán Poma, que nos hayan legado un material tan proficuo como el suyo, que inclusive sirva para dar oportunidad de salir a la palestra a sus detractores?

La respuesta la tiene la misma historia, pues, la mejor muestra es la que nosotros en las postrimerías del siglo XX seguimos nutriéndonos de esos manuscritos.

EL QUIPU

UNA BASE DE DATOS ARITMÉTICOS YASTRONÓMICOS

"Si el objetivo final de quienes exploran en el campo de la arqueoastronomía es el conocimiento de los patrones mentales vigentes en el pasado vale decir el conocimiento de las antiguas formas de observación del mundo natural y de las maneras de estructurar nuevos sucesos dentro de esa cosmología sistemática, entonces el estudio del quipu peruano es definitivamente un valioso objetivo de exploración…"

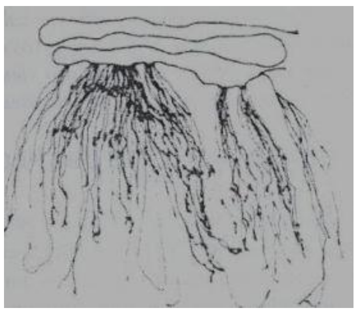
"... Los quipus permanecen indescifrados en cuanto o a su contenido, pero su estructura, su gramática y su sintaxis matemática pueden ser claramente percibidas... " (William J. Conklin)

Tal como leemos el fragmento anterior. Consideramos que W. J. Conklin no podía ser más oportuno en su comentario sobre el "Quipu" denotando no sólo, la aplicación matemática que todos los estudiosos tradicionalmente le dieron mas, también lo relacionado a la observación de la cosmología que los habitantes del Imperio avasallado realizaban.

En este capítulo intentaremos tener una idea somera de lo que es el "quipu" en general sin determinar su territorialidad, pero tomando en cuenta su temporalidad y sus características principales, pues, está demostrado por investigadores como el matrimonio Ascher, los autores de "Mathematics of the Incas - Code of the Quipu" (y muchos otros más de quienes no tenemos conocimiento), que hay variantes según una región u otra, pero en esencia la función del "Quipu" siempre fue la misma, guardar información relativa a todas las actividades de la comunidad o comarca. Tampoco, intentaremos describir las distintas clases que existen, pues, reiteramos no pretendemos hacer un estudio riguroso de lo que era el "quipu". Nuestra intención de modo general es conocer su origen, construcción, cromatismo, categorías, utilidad que prestó, y su respectiva relación con la "yupana", y la aplicación positiva que podemos darle a ella en la actualidad, para retomar el camino de la Etnomatemática a la que está direccionado el estudio de la "yupana" fundamentalmente.

Quipu en Quechua quiere decir *nudo*, de modo particular fue usado en el incario para nombrar a las cuerdas anudadas, cuya función o utilidad era la de servir como fichas mnemotécnicas. El gráfico que tenemos al lado es una muestra de un quipu de tamaño moderado.

Entre las primeras referencias que se tienen de los *quipus*, son las que se usaron ampliamente para registrar datos, información censal, acontecimientos históricos, depósito de tesoros, acontecimientos relacionados con la astronomía, como leímos en el fragmento introductorio y quien sabe hasta para asuntos legales.



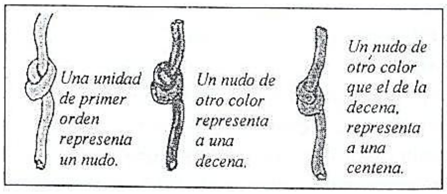
Colec. Museo Peabody de Arqueología y Etnología. Univ. Harvard Fotograf.: Marcia y Robert Ascher.

Observando, este dibujo del "Astrólogo" del siglo XVI podemos notar que, en el mismo hay explicación, gráfica, relacionando la astronomía con los quipus. En la parte superior izquierda vemos el dibujo del sol apareciendo en el horizonte, que en este caso está determinado por las montañas y en el lado derecho a la misma altura y con las mismas características, la representación de la luna. Inclusive pareciera que hay un observatorio coinciden casi exclusivamente con los quipus encontrados en las tumbas de los antiguos habitantes de las regiones comprendidas en territorio peruano. El texto que contiene el dibujo escrito por G. Poma dice:

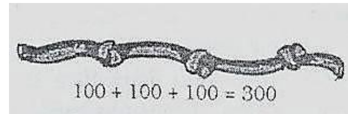
"Y nuestro astrologo-poeta que sabe de la relación del Sol, y del eclipse de la luna, de las estrellas y de los cometas, de las horas, los domingos, los meses del año y de los cuatro vientos del mundo y del tiempo de sembrar las semillas para el alimento, desde tiempo inmemorial.

QUIPUS CONTEMPORÁNEOS

Siguiendo ese camino inicial retrospectivo, no obstante encontrarnos en las postrimerías de este siglo y antes de analizar lo que eran los quipus del incario, podemos aun ver que, las cuerdas anudadas se usan todavía como instrumentos mnemotécnicos en algunos los poblados indígenas, generalmente para contar animales y productos de cosecha. Tal el caso de las comunidades *Chijiphina* y *Cocotani* en la Provincia *Omasuyos* del Departamento de La Paz (Bolivia), continúan haciendo cuentas de sus llamas y ovejas con cordones de colores diferentes, dando valores convencionales. *Gráf. 1.*



Graf. 1 Nudos que utilizan en algunos quipus actuales

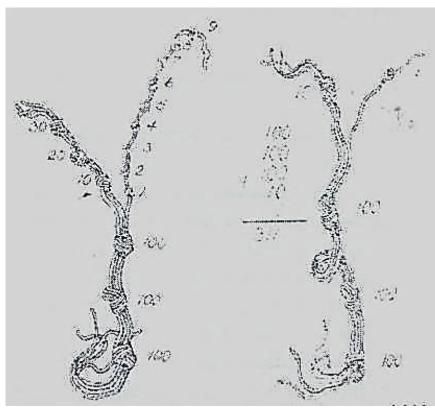


Graf. 2 *Quipu que representa 300 unidades*

En el caso de contar sus animales por cientos hacen un nudo y dejan un espacio en el cordón *(jalti).* Esto debido a que las unidades no son tomadas en cuenta cuando pagan de 100 llamas u ovejas tal como ilustra el *Gráf 2.*

El Gráf 3. Es una muestra de la representación de 339 unidades, que bien podían haber sido llamas, ovejas, u otras especies, inclusive personas, en el supuesto caso reunir personas para un determinado trabajo agrícola en el Ayllu.

El Gráf 4. Denota el registro de una sumatoria en la que intervienen unidades y decenas y centenas. Consideramos que, en la época precolombina el "Quipu" igual que en las comunidades antes citadas, tuvo los mismos usos y funciones.



Graf.3 339 unidades *Graf.4 Suma total 311*

EL QUIPU INCAICO

"Aproximadamente 500 quipus sobrevivieron a la caída del Imperio Incaico, dispersos en diversos museos del mundo." De ellos, unos 400 ha sido estudiados por los esposos Ascher.

Además de los investigadores ya citados, también tenemos a Fedorova y Kuzmichev de la Academia de Ciencias de la URSS. Quienes se han preocupado por descifrar el contenido de los quipus. Kuzmishev no concuerda con Garcilaso de La vega, sobre la base del sistema de numeración utilizado en los quipus. Según Garcilaso de la Vega el sistema Incaico era decimal, que en los quipus, las decenas, centenas, etc., se colocaban de abajo hacia arriba en orden ascendente.

"Estas contradicciones se dan porque el sistema matemático andino precolombino NO ES DECIMAL, sino que esta estructurado de tal forma que cada ocho operaciones las cantidades se duplican de abajo hacia arriba, por esta misma razón en los quipus el número de espiras rara vez pasa de nueve"

"Administrativamente, para los fines del tributo y la leva, los *hatunrunas* fueron clasificados en grupos de diez individuos dirigidos por un *chunca.camayu* (encargado de diez personas) que era a la vez, su jefe inmediato y el responsable por ellos ante los superiores. Cinco de estos grupos obedecían a un *pichca-chunca-camayu* (encargado de cincuenta individuos. Dos de estos dependían de un *pachaj-camayu* (cien) y diez *huaranca-camayu* o sea diez mil individuos, de un *hunu-camayu*) *millón*). Cuatro *hunu-camayu* por último a un *tucrituc*..." "Los conquistadores hallaron *ayllus* a los que se habían quitado o agregado elementos para complementar un número decimal. La realidad de la aritmética, sin embargo, acabó por triunfar y la decimalización persistió solamente para fines administrativos, aunque todo su vigor, fue impuesta al ejército". "Su organización era *decimal*" (J. F. Velarde -122/1977)

Aunque nuestro objetivo no es verificar la aserción o error de los cronistas, tomamos estas notas para hacer ver la enorme importancia que los quipus han tenido en la cultura precolombina y aun después del genocidio realizado por los avasalladores hispanos.

"Sin embargo el quipu precolombino permanece indescifrado, en gran parte, porque casi todos los cordones han perdido sus colores originales que de un modo u otro le daban su real significado."

"El aporte más importante para la comprensión de los quipus sigue siendo el de Leland Locke, quien en 1912 demostró que los quipus por él estudiados mostraban que su contenido no era lenguaje sino información de naturaleza puramente numérica. También descubrió que en ellos se usaba un sistema decimal, de naturaleza posicional, y que tuvieron el concepto de cero. Desde entonces, usando el descubrimiento de Locke, se han hecho varios y notables esfuerzos para relacionar los números que pueden leerse en los nudos con el conocimiento calendárico y astronómico, debiendo mencionarse especialmente los trabajos de Nordenskiöld en 1925 y de Day en 1967. Sin embargo, tales esfuerzos parecen no haber convencido a muchos investigadores en razón de que las "demostraciones" consisten, por lo general, en seleccionar y ordenar cuidadosamente una parte de la información numérica, tanto la astronómica como la de los quipus, para obtener determinadas concordancias, dejando sin explicación la parte restante que es la mayor."

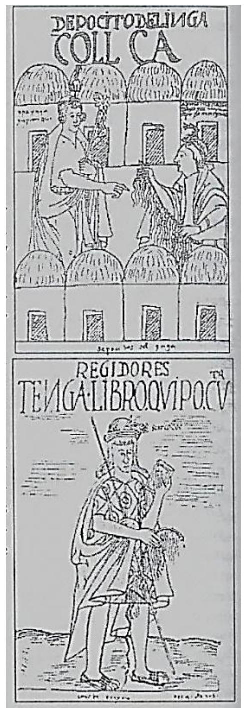
Los pobladores del Tawantinsuyo (Las Cuatro Regiones) emplearon sistemas de medición y de contabilidad que, no eran inferiores a los usados en Europa Medieval. En el ordenamiento demográfico crearon una división poblacional basada en un cómputo decimal que facilitaba un conocimiento aproximado del número de habitantes par regiones. Al norte Chincha-Suyo , al este, Anti-Suyo, al Sur, Kolla-Suyo, y al oeste, Conti-Suyo lo que, en el pensamiento occidentalizado, quien sabe sería apenas la región norteña, sureña, etc. Regiones que a su vez tenían provincias llamadas *humanus*, integradas por las distintas *markas*, o sea "*ciudades que fueron planificadas con sentido global, lo que ha dado motivo a algunos arqueólogos para calificar como "Urbanística" (J.F. Velarde 90)*

La cuenta del tiempo transcurrido ha tenido que basarse en referencias de prácticas empíricas, como ser la observación del año solar (Inti), el lunar (Quilla) y/o el de los acontecimientos importantes como los referidos para fines agrícolas de siembra, cosecha y festivos, p. ej.: la fiesta del Inti Raymi. Es decir que con "...*los conocimientos heredados de los tiwanakotas por vía de la tradición amauta -medían el año, conocían los meses, los solsticios, los equinoccios y algunas constelaciones principales -aunque su técnica para calcular el tiempo, de atenerse a las evidencias arqueológicas, era diferente. Lo hacían guiándose por la dimensión y el ángulo de la sombra, proyectados por el sol en pilares de piedra levantados a propósito y llamados **inthihuatanas** o "amarraderos del sol",..."*

"Una de las características de las culturas andinas fue una clasificación poblacional de acuerdo con los ciclos vitales de las personas y no en el cómputo de años transcurridos; es decir, eran culturas preparadas no sólo para contabilizar la infinidad de depósitos escalonados a lo largo y ancho del imperio sino también con estructuras socio-políticas cuyas finalidades convergían hacia una organización de las fuerzas de producción y de trabajo para el Estado"

Esos registros eran realizados en "*Los quipus, que "eran llevados por partida doble. Uno quedaba en el poder de la autoridad subalterna bajo cuya responsabilidad era levantado y su copia iba al Cuzco, donde se guardaba una suerte de registro central para que el Sapa-Inca o la autoridades superiores, tuvieran a la mano un cuadro completo hasta sus últimos detalles, del estado del imperio. Los funcionarios locales debían dar cuenta estadística. Por otra parte cada año se hacía un nuevo censo total para mantener al día ese cuadro".*

El manejo de los quipus "s*e hallaba reservada a un tipo especial de funcionarios, los* ***quipucamayos"***



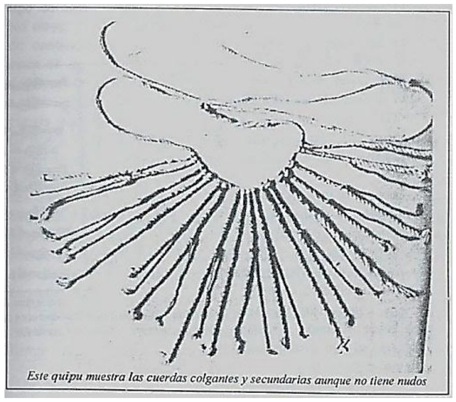
En todo lo hemos leído hasta ahora, no hemos encontrado alguna pista que nos sugiera que los quipus eran utilizados para realizar operaciones aritméticas, por tanto podemos inferir que su utilidad radicaba fundamentalmente en el registro de datos numéricos y de acontecimientos importantes (según algún autor) razón por lo que se les dio el nombre de “fichas mnemoptécnicas”.

DESCRIPCION DEL QUIPU

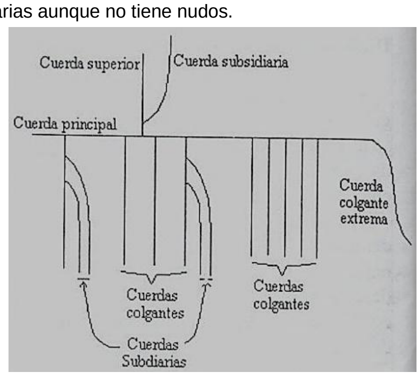
Entre las características observadas en el quipu se tiene las siguientes:

a) Una cuerda gruesa de aproximadamente unos 10 cm a 3 m. Cada cuerda de esta clase, tiene sus dos puntas terminadas en nudos con pequeños flecos a continuación de uno de ellos.

b) En forma transversal van unidas a esta cuerda gruesa, otras mas delgadas cuya longitud en algunas ocasiones llega a unos 50 cm. El número de estas cuerdas colgantes puede ser desde una a cien o más dependiendo de la cantidad de datos. Su colocación con respecto al cordón principal puede estar direccionada, hacia abajo o hacia arriba de modo opuesto al mismo tiempo.



Este quipu muestra las cuerdas colgantes y secundarias aunque no tiene nudos.

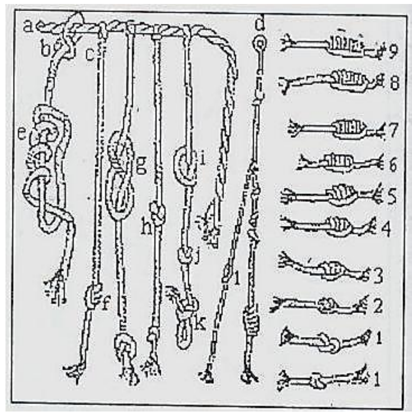


Las cuerdas colgantes se encuentran repartidas a lo largo de todo el cordón una a continuación de otra separadas por pequeños espacios o distancias, a veces formando grupos distanciados o unos más cercanos de otros.

Esas cuerdas colgantes son de distintos colores; unas de un solo color y otras de dos.

c) Las cuerdas colgantes tiene otras secundarias que pueden variar de longitud y valor de acuerdo al color. Su colocación con respecto de las principales se halla a diversas distancias de la transversal.

d) Los nudos se confeccionan con la misma cuerda, sea esta colgante o subsidiaria. Están colocados a diversa distancia de la transversal, algunos de ellos son simples, dobles, compuestos o a medio hacer. El nudo a medio hacer es el que se encuentra generalmente al final y no encierra a otros nudos.

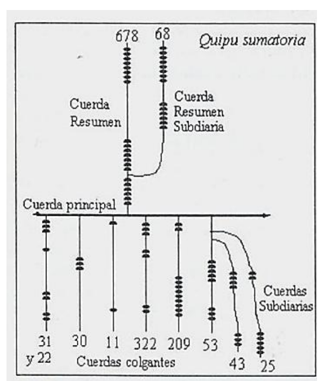


Los dibujos "j" y "2 a 9" representan los nudos simples y compuestos que aparecen con mayor frecuencia (Tomado de Locke 15)

Los datos y su representación en los nudos.

Cualesquiera que sea la cuerda colgante, superior, subsidiaria o colgante extrema en ella se realizan los nudos citados en el inciso *d*), cada grupo de nudos representan dígitos, por tanto se puede interpretar que cada cuerda contiene el registro de un dato que representa uno ó más dígitos.

Las unidades tienen un tipo de nudo diferente a los otros, pues es un nudo compuesto y además están en la parte inferior de la cuerda.



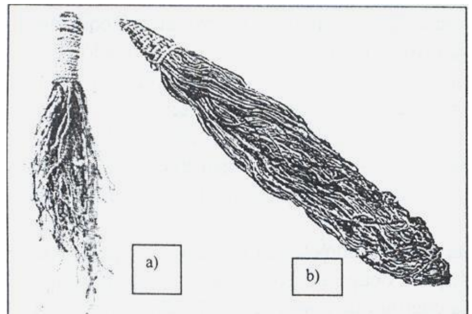
Los nudos de una cuerda pueden representar uno o varios números en el sistema posicional de base 10, pues, tienen un ordenamiento de en grupos de diez. O sea, el 322 equivale a 300 + 20 + 2, dicho de otro modo equivale a la representación por descomposición polinómica. También, en una misma cuerda pueden estar dos distintos números, tal el caso del "Quipu sumatoria" en cuya primera cuerda colgante se tienen los números *31* y *22*. Para una cuerda que contiene más de dos números, la única exigencia está en que ella debe ser más larga, según los requerimientos de uso o almacenamiento de datos.

Un aspecto importante que debemos tomar en cuenta es que, el cero es un número virtual, pues ocupa una posición a la que podemos llamar "nada" veamos la cuerda que contiene al 30, sólo vemos tres nudos, pero, por la posición que ocupan y por una convención que asumimos en la interpretación determinamos que esos nudos equivalen a 3 decenas.

Otro ejemplo podemos obtener en la cuerda que contiene al *209*. Sólo vemos los dos nudos que están cerca del cordón principal y nueve en la parte inferior, luego una vez más vemos que, el *cero*, o la "nada" está representada con la ausencia de un nudo o un grupo de nudos en el lugar que correspondería a las decenas.

Un aspecto muy importante que debemos tomar en cuenta es que el “quipumayo” apenas tomado el quipu y desplegado podía leer o saber de inmediato el valor que guardaba o representaba el quipu en cuestión, le era suficiente observar la cuerda superior, pues, ella es la “cuerda resumen” de todos los datos que el quipu contiene. Si, un quipu tiene cuerdas subsidiarias la cuerda resumen también posee su “cuerda subsidiaria resumen”.

Quipu-camayo. Diseño de G. Poma

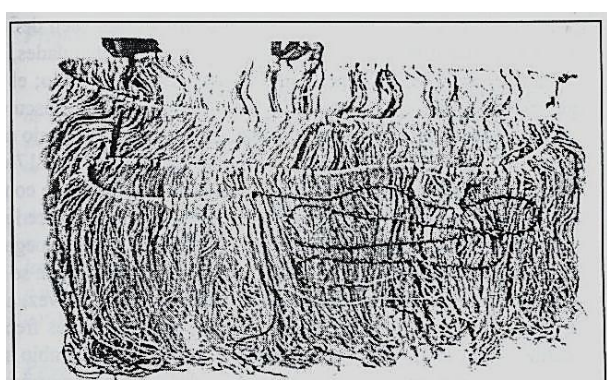


Quipus enrollados. La espiral formada por la cuerda principal los sujeta en esa posición compacta y manuable. Gráf. a) Museo Smithsoniano Washinton D.C. Graf. b) William J. Conklin

Cuando decimos apenas desplegado, queremos significar que, la forma de guardar un quipu con los datos ya registrados se asemeja mucho, a un quitapolvos casero hecho de cordones gruesos de algodón como la figura a). En tanto que la figura b), tiene el parecido con un limpiador de pisos cuya flecadura queda envuelta cual si fuera un pepino.

Es forma de guardar los quipus, al parecer era para facilitar su transporte y/o almacenamiento, pues, como ya lo indicamos debían ser hechos por partida doble, quedando, una con el ”quipumayo” y la otra era enviad al jefe superior o funcionario público más importante, ya sea de la marca o, alguna repartición del incario.

Los dos gráficos que aquí tenemos son más que elocuentes para mostrarnos, no sólo, el tamaño que podía alcanzar un quipu, más también de los encargados de manejar y custodiarlos.



El quipu más grande entre los que se conoce. (Colec. De Percy Douelsberg. AricaChile. Foto. Por Marcia y Robert Ascher

CROMATISMO DEL QUIPU

"Por lo que toca al cromatismo de los quipus contables, corta es la lista de colores que nos han proporcionado los cronistas. Ellos señalan, en primer lugar, el empleo del color natural (marrón en sus tonalidades, clara y oscura) que es propio del material (lana o algodón) empleado en la confección del quipu: mencionan luego, los colores obtenidos del teñido, como blanco, rojo, morado, pardo, amarillento pajizo, verde, carmesí. Como combinación cromática hablan de la mezcla de tres colores en la misma cuerda de tres torzales: azul, amarillo, blanco".

"En el señalamiento de los colores y de sus mezclas, la información arqueológica ha sido mucho más generosa que la de los cronistas. A base de las pocas decenas de quipus estudiados se ha podido precisar los siguientes colores básicos: el marrón que aparece con cuatro tonos, claro y más claro (casi un blanco amarillento), oscuro y más oscuro (casi un negro pálido); el blanco con dos tonalidades, la muy clara, casi el color de la leche y las más opaca un blanco sucio quizá el color natural; el azul en tonos claro y oscuro bien definidos; el verde pálido o bien muy intenso; el rojo en dos tonalidades, fuerte y tenue; el amarillo brillante como el oro o algo desteñido; el negro que cuando es algo pálido se confunde con el marrón más oscuro."

Las mezclas de colores son muchas, habiéndose registrado más de veinte: el quipu N° 7 de Nordenskiöl, por ejemplo, exhibe 17 expresiones cromáticas, de las cuales 8 son colores únicos y 9 de combinados. La tendencia de la mezcla se efectúa primeramente entre las mismas tonalidades de los colores, en especial del marrón; luego entre dos o más colores diferentes, preferentemente el blanco que se une a negro, el azul, el verde y sobre todo el marrón; éste a su vez, además de juntarse con el blanco, lo hace también aunque menos frecuentemente con el azul, el negro, el rojo y este último en cambio sólo se mezcla con el marrón como acabamos de decir y con el marrón.

La mezcla de colores se cumple mediante un sistema combinatorio consistente en tres modalidades bien definidas, que se aplicación mucha uniformidad y escrupulosidad. Ellas son la mezcla por jaspeado torzal más torzal y por posición.

CÓMO HACER UN QUIPU?

Aunque hasta ahora, sólo hemos visto las fotografías de los quipus y, de una manera rápida, sus clases temporalmente hablando, consideramos que es muy importante, sin embargo, conocer como se podían hacer estas llamadas fichas mnemotécnicas. Como es natural debió ser necesaria alguna técnica, por ello recurrimos a los esposos Marcia y Robert Ascher (quienes en su trabajo ya citado Código de los Quipus), luego de una prolífica investigación no sólo en el territorio que un día fue el Imperio Incaico, han visto alrededor de 400 quipus que se encuentran diseminados en diferentes Prestigiosos Museos alrededor del mundo, hoy, nos muestran como elaborar un quipu.

***Preparación de las cuerdas*.**

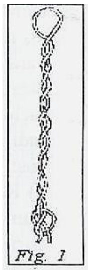


Fig. 1

"Los cordones individualmente hilados son la unidad básica de un quipu. Los cordones son distintivos en que cada uno, que es un juego de por lo menos dos y uno se tuerce mientras el otro se adelgaza y termina con un nudo pequeño" (Fig. 1)

Los extremos doblados se usan juntos para unirse a los cordones. Cuando el algodón o lana está hilados como cordón, o si los pedazos de torzal están cortados de los cordones más largos, un paso especial del hilado final se necesita para prepararlo como cordón del quipu. El último paso es doblar el cordón doblemente torcido.

Fig. 2

Paso 1

Para tener el equipo necesario es suficiente construir algo parecido a una rueca o huso llamado "huso de la gota" por su parecido a la gota de agua. Este simple instrumento puede crearse con cualquier pedazo de madera de modo que sea el piso redondo o una pequeña papa (patata) partida por la mitad. Una aguja de tejer o un lápiz introducido en la mitad de una patata o de otra cosa parecida son ideales. Para ello, inserte perpendicularmente la aguja de tejer a través del centro de la mitad de la patata como lo indica la *Fig. 2*. Como si fuera un eje de la misma.

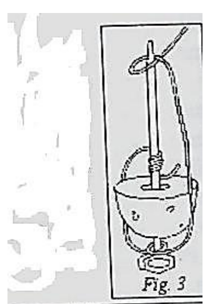


Fig. 3

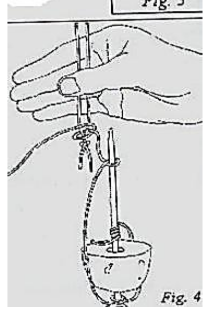


Fig. 4

Paso 2

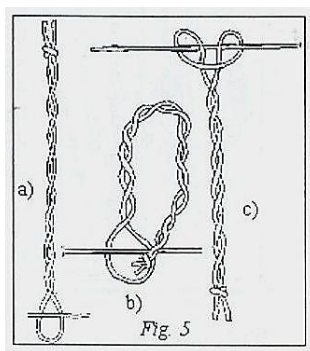
Luego, cortar un pedazo de torzal de dos veces la longitud del eje para ser usado como la cuerda principal. Atar el extremo de la cuerda alrededor del eje y la patata como indica el diseño y lo afianza en el lugar envolviéndolo alrededor del eje tres o cuatro veces. Sacar la punta fuera y, bajo la envoltura del eje una vez alrededor de su base; y lo pasa por encima del otro lado del eje a la punta del mismo (*Figs. 3 y 4*). Se sigue este procedimiento cada vez que se quiere hacer un nudo y el número de vueltas determinan las unidades que el nudo representa. (P .ej.; fig. "e" del "Cuadro A" de los nudos.

Para anudar al cordón principal, como está indicado en las letras de los cordones "b", "c", e inclusive la cuerda subsidiaria "I" del cordón 3 indicado con la letra "d"; puede seguir dos pasos.

a) Repita el paso anterior simplemente, ate la punta del cordón aproximadamente 4 cm. de la nariz del eje con un medio tirón. Ya están ahora completas y puede separar el torzal*. (Fig. 4)*

b) *Puede hacer lo que indican los incisos a), b), c)* de la Fig. 5.

Para asegurar en el cordón principal recorra el torzal, se tuercen dos pedazos juntos, es el como indica la fig. 4.



Como nosotros no podemos hilar los hilos de lana o algodón, y también hoy en día eso es indispensable. Las madejas de lana disponibles en el comercio dan buenos resultados mejor que el cordón de algodón disponible comercialmente. Antes de iniciar la preparación de los cordones para manufacturar el quipu, primero veamos los nombres que adquieren los tipos de torcedura o formas de torsión de los hilos.

a) Cuando se debe torcer en la dirección de las manecillas de un reloj no digital, a esta dirección se la llama torcedura en Z

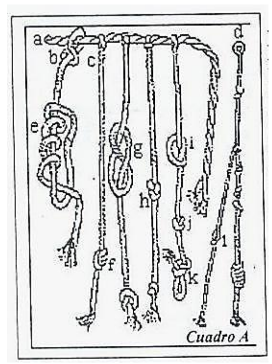
b) Cuando se procede a torcer en sentido contrario a las agujas del reloj a esta dirección se llama una torcedura. S.

Pruebe con un pedazo del hilo de lana para ver en que dirección esta la torcedura original del mismo. Si es en Z, siga con esa misma dirección, y si es en S hago lo indicado;

Para preparar los cordones se toma una longitud de unos 2 m de hilo de lana de la madeja.

Primero se extiende el hilo de lana luego , una vez bien torcido el hilo ya sea en *Z* o en *S*, se dobla a partir de la mitad del mismo y se deja que se junten los dos brazos del hilo y se retuerce aun más hasta conseguir la torsión deseada. Seguidamente se habrá obtenido una longitud aprox. de 1 m Si se quiere que éste sea el cordón principal se retuerce nuevamente ya sea en *Z* o *S* y finalmente se dobla por la mitad y se obtiene un cordón grueso al que llamaremos "doblemente doble torcido". Si se quiere que sea para las cuerdas colgantes se sigue la primera parte de este procedimiento hasta lograr la longitud de 1m o menos, luego se lo puede dividir en dos partes a cada parte le llamaremos "doble torcido". Cada parte es un tamaño conveniente para empezar. La cuerda subsidiaria bastará que sea un torcido simple. Ahora, anude los extremos del cordón y empiece a realizarlo según lo indicado en las figs. 2, 3, y 4.

Para colocar la cuerda secundaria como la de la letra "d" del "Cuadro A" puede seguir los pasos indicadas para la Fig. 5



Cada quipu normalmente tiene un cordón (el cordón principal) eso es mucho más grueso que los otros. Para hacer cordones más gruesos, doblar el torzal o se puede aumentar usando el primer método, finalmente, antes de doblar los cordones que usan el método modificado.

Para determinar los colores de los cordones y de las cuerdas principales o subsidiarias, puede tomarse en cuenta los explicado en el capítulo correspondiente al cromatismo de los quipus.

La YUPANA o el Computador Incaico

Gráfico A

El presente gráfico que reproducimos aquí se encuentra en el manuscrito de Guamán Poma. Nos permite ver de modo concreto, varios aspectos marcantes:

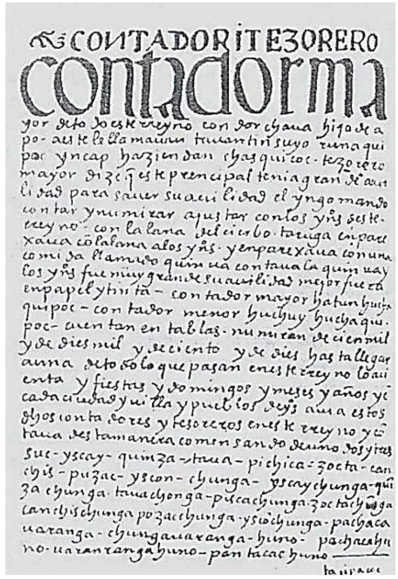
a) El título indica: *"Cotador maior i tezorero tawantinsuio quiposc curaca condor-chava."* De todo el título hay dos palabras que están en quechua: (*tauantinsuio*) "las cuatro regiones" y "*curaca*" (jefe principal) hace notar la alta posición que debió tener el personaje en el imperio incaico. "*condor-chava*" una castellanizacion de "*kuntur-chawa*" (Es una castellanización de “*kuntur-chava*” que se traduce como "insignia de cóndor"

b) Este personaje, que bien podría ser a quien refiere el título o el quipu-camayo, tiene en las manos un objeto con una sarta de hilos o cordones alineados como indicadores de cantidades, lo que ya conocemos con el nombre de quipu.

c) En la parte inferior izquierda nos llama la atención un rectángulo que parece una formación de 4 x 5 de fichas de dominó, por los puntitos que tienen suponemos, a primera vista que indican cantidades y muy posiblemente, las que están en el quipu. Sería este el instrumento que permitía hacer las cuentas? Intentaremos hallar respuesta a esta y otras cuestiones de las que, nos ocuparemos más adelante con las investigaciones respectivas.

Mas, antes de ese cometido veamos lo que contiene el manuscrito de la página 361. El que a la letra y sin corrección alguna dice:

"Contador I Tezorero Contador mayor deto doeste rreyno condorchaua hijo de apo oeste le llamauan tauantinsuyo runaquipoc yncap haziendan chasquicoc tezorero mayor dize que este principal tenia una grande auilidad para sauer su auilidad el ynga mando contar y numirar ajustar con los yndios deste reyno con la lana del cierto taruga enparexaua con una comida llamado quinua contaua la quinua y los yndios fue grande su auilidad mejor fuera en papel y tinta contador Mayor hatunhuchaquipoc – contador menor huchuy huchaquipoc- cuentan en tablas – numiran de cien mil y dedies mil y de ciento y de diez hasta llegar auna deto do lo que pasan eneste rreyno lo asienta y fiestas y domingos y meses y años y en cada ciudad y uilla y pueblos de indios auia estos dichos contadores y tesoreros eneste rreyno y contaua desta manera comensando de unos dos y tres suc – taua – pichica – zocta – canchis – puzac - yscon -chunga -yscacychunga - quinzachunga - tauachunga - piscachunga -zoctachunga - canchischunga - pozacchunga - ysconchunga - pachaca - uaranga -chungauaranga - huno -pachahuno -uarangahuno - pantacachuno.


CONTADOR I TEZORERO
CONTADORMA
yor dicho deste reyno condor chaua hijo de a
po. aueste le llamauan tauantinsuyo runaqui
poc yncap haziendan chasquicoc. tezorero
mayor dize q(ue) este prencipal tenia gran deaui
lidad para sauer su auilidad el yngo mando
contar y numirar ajustar con los yn(dio)s deste
reyno. con la lana del cierbo taruga enpare
xaua co la lana a los yn(dio)s. y enparexaua con una
comida llamado quinua contaua la quinuay
los yn(dio)s fue muy grande su auilidad mejor fuera
en papel y tinta. contador mayor hatun hucha
quipoc. contador menor huchuy huchaqui
poc. cuentan en tablas. numiran de cien mil
y de dies mil y de ciento y de dies hasta llegar
a una dicho solo que pasan en este reyno la cu
enta y fiestas y domingos y meses y años y e
cada ciudad y uilla y pueblos de yn(dio)s aua estos
dichos contadores y tesoreros en este reyno y co
taua desta manera comensando de uno dos y tres
suc. yscay. quinza. taua. pichica. zocta. can
chis. puzac. yscon. chunga. yscay chunga. qui
za chunga. taua chonga. pisca chunga. zocta chunga
canchis chunga pozac chunga. ysco chunga. pachaca
uaranga. chunga uaranga. huno. pachaca hu
no. uaranranga huno. pantacac huno
tauraue

Análisis.

El gráfico del manuscrito muestra los siguiente:

a) un título manuscrito en el cual se lee: *Contador i tezorero CONTADOR Mayor condor chava.hijo de apo*. "Apo" ó "apu" cuyo significado es "señor"; "noble". Según el diccionario, Castellano-Quichua de Angel Herbas Sandoval, publicado por el diario Presencia.

Después de dar una lectura general, nos percatamos que el manuscrito se ha realizado con el lenguaje propio de su autor. Es decir, tal como él lo hablaba y como es de suponer, eso haría que el idioma se presente defectuoso. Sin embargo eso no le quita su valor informativo e ilustrativo, pues, es comprensible, según log filólogos y lingüistas, en la legua Quechua y Aimara las vocales de mayor dominio son "a, i, u ", así como su alfabeto no tendría las letras "b" o "v"

"*En efta lengua ningún vocablo comiença por **B** ni fevfa defta letra entre Aymaraes"* (Diccionario de la Lengva Aymara P. Lvdovico-Bertonio) (1612)

La letra "h" en quechua, se la pronuncia como 'j" en "*hatunhuchaquipoc*" acompañada de la "c" como en "canchis" o, no se la pronuncia por ello en "habilidad" se pronunciaría "auilidad". En cuanto a las vocales, ellas soncambiadas cuando se las pronuncia castellanizadas. Aun hoy en día podemos escuchar a nuestros campesinos de habla Quechua, decir "lichi" por "leche" y "mastruy" por "maestro", pese a que se los sometió a una castellanización forzada desde 1955 con el pretexto de la Reforma Agraria. Los detractores de nuestro nativo cronista no se dignaron analizar este aspecto tan importante, como el que citamos, dado que el castellano o español era una lengua extranjera para él, así como para todos los pueblos originarios del Tawantinsuyo.

Consideramos que será de mucho mas valor realizar una traducción donde corresponda y luego un análisis semiológico del contenido decodificando, el mensaje, antes que buscando lo semántico. Por tanto, vamos a interpretar lo que no es totalmente Castellano o Quechua ya sea un párrafo, oración o palabra:

b) Se lee: //Ie llamauan tauantinsuyo runaquipoc yncap haziendan chasquicoc tezorero mayor

Interpretación: //Le llamaban el hombre encargado de los quipus en la hacienda del inca de las cuatro regiones//

c) Se lee "*el ynga mando contar y numirar ajustar con los indios deste reyno con la lana del cierto taruga*

Interpretación: *//*El Inca mandó enumerar y hacer cuentas con los indios de este reino con la lana de cierto cervatillo. Se sobre entiende que dicha lana era para hilar los cordones de los quipus en los cuales quedarían registrados los datos de esas cuentas.

"... *enparexaua con una comida llamado quinua contaua la quinua y los yndios fue grande su auilidad mejor fuera en papel y tinta contador mayor hatunhuchaquipoc... "*

Interpretación: *II*Hacia las cuentas (sumaba y contaba) paralelamente con una comida llamada quinua. Para aclarar aun más, los granos de quinua son del tamaño de los granos de alpiste, par ello resalta "*su grande auilidad"* del contador mayor o *"hatunhuchaquipoc*" (encargado de usar la matemática "Juchhawa" en Quechua), mejor que si lo hubiera hecho con tinta y papel. Después de saber que la quinua son unos granos muy pequeños hasta para manipular, nos parecería algo ilógico o contradictorio usarlos para hacer las cuentas. Pero, no es así, pues, como ya lo leímos, *contaban de 1 a 100 000*; luego, sólo para tener una idea, si las cantidades de las cuentas hubieran alcanzado un número sólo de hasta 4 cifras, algo así como 5483 ¿en qué bolsas o depósitos hubieran tenido cabida otros granos de mayor tamaño, si cada grano representaba a un habitante del Imperio? Imaginemos que hubieran usado, maíces, porotos o piedrecillas ante la ausencia de esos granos. Además del tamaño tendríamos el peso, lo que significaría un problema para su traslado dependiendo de las cantidades y tomando en cuenta que, los medios de transporte en la época eran las llamas, las que no pueden llevar más de una arroba u 11 kgs de peso y más aun por esos serpenteantes y empinados caminos.

"…- contador menor huchuy huchaquipoc - cuentan en tablas - numiran de cien mil y dedies mil y de ciento y de dies hasta llegar auna deto do lo que pasan eneste rreyno lo asienta y fiestas y domingos y meses y años..."

Interpretación: *// S*ignifica que había toda una jerarquía de entendidos en contabilidad, además del contador mayor, el contador menor también hacia las cuentas *("- ...en tablas* –“) o contaba con los pelos de la "taruca" (ciervo) acompañando con los granos de quinua hasta la cuenta de "*1 a 100 000*" de todas las actividades que merecían ser cuantificadas y que acontecía en todo el reino incluyendo las “*fiestas y domingos*". (Léase semanas en lo escrito por el cronista).

"... *y en cada ciudad y uilla y pueblos de yndios auia estos dichos contadores y tesoreros eneste rreyno y contaua desta manera comensando de uno dos y tres.*

interpretación: *II*Todos los poblados del Imperio tenían personas encargadas de las cuentas públicas y de la custodia de los valores por los llamados tesoreros.

"...*era suc (uno)- iscay (dos) - quinza (tres) - taua (cuatro) - pichica)cinco) - zocta (seis) - canchis (siete) - puzac (ocho)- yscon (nueve) - chunga (diez) - yscacychunga (veinte) - quinzachunga (treinta) - tauachunga (cuarenta) - piscachunga (cincuenta) - zoctachunga (sesenta) -canchischunga (setenta) - pozacchunga (ochenta) - ysconchunga (noventa) - pachaca (cien)- uaranga (mil)- chungauaranga (diez mil) - huno (millón) - pachahuno (cien millones) - uarangahuno (mil millones)- pantacachuno (infinito).*

Interpretación: *II*Vemos que la forma de contar por lo que está escrito, increíblemente llegaron a contar hasta mil millones y lo que admira tener un nombre para aquella cantidad superior a mil millones. "Pantac o pantajj, cuya palabra primitiva es **panta** que en quechua significa **equivocación**. Es decir el número es tan grande que, el contador después de los **mil millones** no teniendo otro nombre para utilizar en siguiente lo llama **el Millón que puede hacer equivocar**.

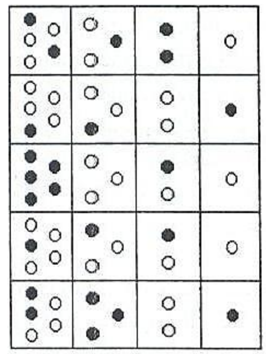
Una pregunta que nos hacemos es, si alguna vez se realizó una cuenta empírica tan grande que obligó a crear este nombre, o el mismo es fruto de una cuenta apriorística?

Dejando de lado esto último, queremos ratificar que, manipular cuentas con tales números en los quipus hubiera sido un trabajo no sólo difícil, mas también agotador, en eso de hacer y deshacer nudos, así, como el tamaño y el peso que tendrían los quipus, máxime si los cordeles de los mismos dada la naturaleza del que estaban manufacturados absorben la humedad ambiental con lo que se hacen aun más pesados, especialmente si ellos eran tan grandes como el de la colección de Daulsberg en Arica-Chile que vimos en las páginas precedentes.

Hasta ahora hemos vista de un modo muy simple lo que es el quipu. Y, encontramos que, este es un instrumento utilizado por los habitantes andinos desde la época del incario. Después de haber aprendido como se construye un quipu, dada la laboriosidad que requiere manufacturarlo, además del análisis anterior, no nos queda duda alguna de que el mismo, apenas podía ser un instrumento para registrar o guardar esa cuentas, de un modo organizado. Los Esposos Ascher por ejemplo han hecho una relación de su interpretación del quipu con aplicaciones algebraicas por lo que se colige que los incas tuvieron, al igual que en otras culturas, un sistema de numeración basado en el valor de posición de los signos, los cuales como ya lo vimos, en vez de ser gráficos, tenían la forma de nudos situados a lo largo de un cordón. La numeración incaica, por lo visto era decimal, pues, no se puede pensar de otro modo cuando se habla de los encargados de las personas que eran miembros del ejército, los "chunca-camayo" (por diez personas), "pachaj-camayo" (por cien personas), o, "waranca-camayo" (por mil personas). Por usar la modalidad de los romanos hasta podríamos decir decuriones, centuriones, etc.

Sin embargo para no quedar en el campo puramente especulativo y quien sabe, por ahí surge alguien que diga que, con los quipus se podían realizar perfectamente las operaciones de computo tomando como base la palabra quechua *"quipuni*", que aparece en los antiguos glosarios y que, además de la idea de *anudar,* expresa también la de contar por nudos, sin tener que recurrir forzosamente al empleo del ábaco. Por ello en lo sucesivo nos abocaremos directamente a nuestro objetivo como es el estudio de la "Yupana" al que hemos dado en llamarle *el primer computador incaico*.

QUÉ SIGNIFICA *YUPANA*?



Yupana según los primeros léxicos, se denominó *yupani,* que en quechua quiere decir, "hacer cuentas o contar" o, ***yo hago las cuentas***. Por las informaciones que ya tenemos, los encargados de la contabilidad (si vale la expresión), preferían calcular con piedrecitas u otros materiales parecidos, en especial granos e quinua, maíz o frijoles, y luego anotar con nudos, los resultados obtenidos en los hilos del quipu. De acuerdo con la mayoría de los cronistas, el cálculo con piedrecitas y granos era ejecutado con gran precisión, y según relata asombrado el padre Acosta, *"...las cuentas, "aún las muy embarazosas", se hacían "puntualísimamente, sin errar una tilde*...". (1954:190)

Esta manera de calcular generalmente" cuando eran varias las personas que iban a realizar las cuentas decían "*yupana*" que significa "***contemos o hagamos nosotros las cuentas***". Luego, de ahí viene el nombre que se le dio al instrumento con el que se contaba y realizaban las cuentas.

""Son pocos los datos que se obtienen del procedimiento adoptado para calcular, el padre Acosta se limita a informar que para ello "los indios toman sus granos y ponen uno aquí, tres acullá, ocho no se donde; luego pasan un grano de aquí, truecan tres de allá, y así salen con su cuenta""

De todas las fuentes consultadas las que mejor nos explican estas la de Guamán Poma en su "Nueua Coronica", que lo representa como una especie de tablero, que lo hemos visto en el diseño realizado por el mismo en la pagina 360; otra información tenemos en la "Historia del Reino de Quito", del padre Juan Velasco, que al parecer conocía bastante, sobre de las antigüedades indias, él nos dice que, "... *el instrumento usado para esos menesteres era algo así como unos depósitos hechos de madera, de piedra o de barra, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas de distintos tamaños, colores y figuras angulares"* (1841- 44, T.II: 7), y una tercera en las explicaciones que nos da Radicati Di Primeglio. Mas veamos por partes.

Según el dibujo antes citado, dijimos que parecían fichas de dominó, el mismo viene a ser la *yupana*, es decir, un tablero con veinte casillas distribuidas en cinco filas y cuatro columnas. En cada casilla aparece cierto número de círculos, correspondiéndole cinco círculos a las casillas de la primera columna, tres a las de la segunda; dos a las de la tercera y uno a los de la cuarta. Además, algunos de estos círculos son negros y otros son blancos.

Algunos han considerado que los círculos blancos representan sitios u hoyos destinados a ser ocupados por elementos auxiliares de cálculo; tales como granos de quinua (que los hay negros y blancos), maíz, frijoles, piedrezuelas, etcétera. Los círculos negros representarían lugares ocupados por elementos (que en general llamaremos fichas). Dando por válida esta suposición, a lo más podrían colocarse cinco fichas en una casilla de la primera columna, o dos fichas en la casilla de la tercera columna.

"...Otra opinión sobre el particular es que se ha tratado de representar fichas de dos colores diferentes, recurso que resulta de mucha utilidad para la operación de sustracción si se asigna uno de los colores al minuendo y otro al sustraendo.

Entre los científicos que han estudiado el ábaco incaico, llegando a formular planteamientos concretos sobre su estructura y uso, mencionamos a Henry Wassen, que en 1931 publicó *The Ancient Peruvian Abacus*, a Carlos Radicati di Primeglio, quien en su libro *El sistema Contable de los incas* se ocupa conjuntamente del tablero de cálculo y de los quipus (al estudio de este último tema se dedicó de 1950 hasta su muerte en 1990); a Emilio Mendizábal Losack, que dedicó a la yupana uno de los capítulos de su tesis doctoral escrita en 1971; a William Burns Glynn, que en el trabajo "La tabla de cálculo de los incas" desarrolla su visión sobre el uso del ábaco; a Juan Ansión que hace desarrollos importantes sobre el tema en su artículo "Cómo calculaban los incas"; a Hugo Pereyra Sánchez, que en su trabajo "La Yupana, complemento operacional del Quipu" plantea una generalización de los trabajos de Wassen y Radicati; y a Percy Aitken-Soux y Faustino Ccama, que en su artículo "Abaco andino, instrumento andino ancestral de cómputo" describen las instrucciones de una yupana etnográfica del pueblo de *Itujata,* Potosí, Bolivia..." (Ref, tomada de *Colección de Escritos por los autores citados* 1990:207-209)

Por razones didácticas y obedeciendo a nuestro objetivo, el de poner en vigencia la *yupana incaica* como un coadyuvante actual en el aprendizaje de la matemática en la escuela Primaria (valga la reiteración), vamos a quedarnos, principalmente con Carlos Radicati de Primeglio, por la clara interpretación que hace de lo que ha escrito Guamán Poma y por la colección de informaciones que nos da respecto a una variedad de "yupanas", que no son apenas, literales, pues, nos presenta una colección de ilustraciones que son elocuentes y no precisan mayores descripciones. Gracias a ellas podemos tener una visión real más clara, a la imagen mental que no habíamos formado por lo indicado por el padre Acosta refiriéndose al tablero de realizar cuentas, pero sin nombrarlo: *"los indios toman sus granos y ponen uno aquí, tres acullá, ocho no se donde; luego pasan un grano de aquí, truecan tres de allá, y asa salen con su cuenta".* (1954: 190)

En cambio el padre Juan Velasco hace mención del tablero para hacer las cuentas, pero no le da el nombre con el que se le conoce.

"... *el instrumento usado para esos menesteres era algo así como unos depósitos hechos de madera, de piedra o de barro, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas de distintos tamaños, colores y figuras angulares"* (1841- 44, T.II: 7)

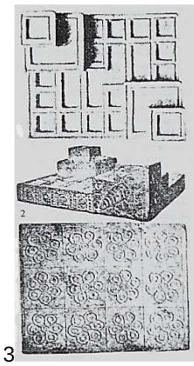
A parte de usar las ilustraciones que Radicati de Primeglio nos ofrece en su singular trabajo titulado "Tableros de escaques en el antiguo Perú" también copiaremos sus respectivos textos en su íntegra, pues, consideramos que de ese modo, ayudamos a difundir su trabajo manteniendo fielmente su contenido.

"Antiguos tableros con escaques"

El primer tablero con el respectivo perfil original, lo tenemos al lado con una vista desde arriba.

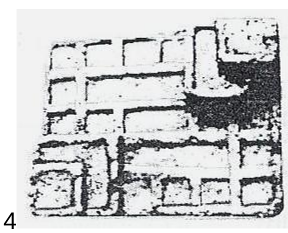
"Se trata de un tablero de madera de forma rectangular (33x27 cm.) en cuya cara superior hay 17 compartimientos, de los cuales 14 son cuadrados, 2 rectangulares y 1 octogonal. De ellos, 7 cuadrados y 1 rectangular, están sobre el lado más prolongado del tablero y otros tantos aparecen en el lado opuesto; ambos conjuntos están separados por un espacio central, que tiene forma octogonal como la de un signo escalonado. En dos de las esquinas del tablero hay unas salientes prismáticas en forma de torres cuadradas (12x12cm.) con dos plataformas superpuestas; la segunda de estas plataformas, que es la más pequeña (7 x 7 cm.), se asienta sobre uno de los ángulos exteriores de la primera. Por los cuatro costados el tablero está decorado con figuras incisas que representan cabezas humanas y un animal que, según M. Uhle, podría ser el cocodrilo (Uhle 1922); en el fondo hay dibujos de rosetas."

1



3

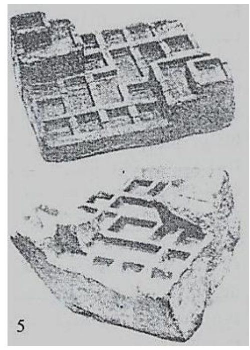
"Idéntico a este aparato es otro excavado en las ruinas de Chan Chan y conservado en el Museo Etnográfico de Gotemburgo (Izikowitz 1967:78- 79). Es también de madera y sus casilleros, al igual que las torres, siguen el mismo ordenamiento; carece, sin embargo, de decoración y tiene tamaño mucho más pequeño(*16.5x13*.5cm.)(Fig.4)."



4

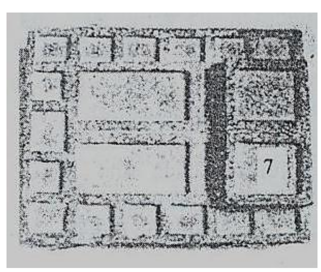
"Otros hallazgos, posteriores al de Chordeleg, se realizaron también en el Ecuador, en lugares situados entre Cuenca y Sig Sig, proporcionando abundante material de estudio al Padre Jesús Arriaga para su obra Apuntes de Arqueología Cañar (Arriaga 1922). En el Perú, además del ejemplar de Chan Chan anteriormente citado, objetos semejantes fueron señalados a partir de 1877 por Ch. Wiener (Wiener1880) y, más tarde, por R. Verneau y R Rivet (Verneau y Rivet 1912-22) y por E. Nordenskiöld (Nordenskiöld 1931) como procedentes del departamento de Ancash."

"Estos tableros, tantos ecuatorianos como peruanos son de piedra y, salvo pequeños detalles, resultaban casi idénticos a los de madera. El primero, encontrado en Caraz, se diferencia tan sólo por haber sido sustituido el espacio octogonal central por un casillero de forma rectangular y por tener tres plataformas las torres de las esquinas. (Fig. 5). Otro, procedente de Pallasca, es de planta ovalada y la distribución dual de los casilleros es perfectamente simétrica (Fig. 6). Un tercero, que integra la colección del autor de la presente monografía, es de origen desconocido, pero debe proceder de algún lugar del Callejón de Huaylas; tiene las salientes prismáticas de los costados recortadas en ángulo en una de sus esquinas, como si se hubiese deseado trasladar la reproducción del signo escalonado, que en los aparatos de madera tipo Chordeleg está en el centro, a las aristas de los torreones laterales. (Fig. 5). Este aspecto, que rompe la configuración cuadrada de las plataformas, da lugar también a que el piso de las dos primeras adquiera de una manera más pronunciada, la forma de una especie de mazo o martillo, particularidad que, como veremos más adelante, es la característica más notable de algunas casillas de tableros del mismo tipo encontrados en Ica."



"Mayores diferencias se advierten en otros subtipos, originarios también del Callejón de Huaylas, de los cuales el mejor representante lo tenemos en el tablero que describió E. Nordenskiöld en su obra Origen de las **civilizaciones** indígenas de América del Sur (Ibidem). Aquí los casilleros cuadrados están alineados a lo largo de los lados laterales de la tabla, mientras que los rectangulares se encuentran en su interior. Las dos torres, que son cuadradas y de una sola plataforma, están colocadas una a continuación de otra, en la parte superior, justamente encima de los dos casilleros rectangulares del centro; debajo de éstos se sitúa también otro compartimiento rectangular mucho más pequeño. (Fig. 7)."

"Otro subtipo, que hemos estudiado en el Museo de Arqueología de Lima, tiene casi todos los casilleros en forma de triángulo (en total 18) dispuestos alrededor del tablero, a excepción de un lado en que esta ubicada una torre rectangular de un solo piso y con tres compartimientos también triangulares. En la parte central hay cuatro casillas de forma cuadrada, dispuestas de dos en dos."

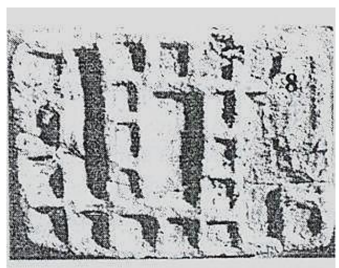


"Aunque el monumento que ocupa nuestra atención estuvo, evidentemente, distribuido por todo el territorio del Tahuantinsuyo, las noticias arqueológicas que por el momento poseemos se refieren solamente a ejemplares provenientes de la provincia de Cuenca en el Ecuador y de algunos lugares nórticos del Perú, en especial el departamento de Ancash."

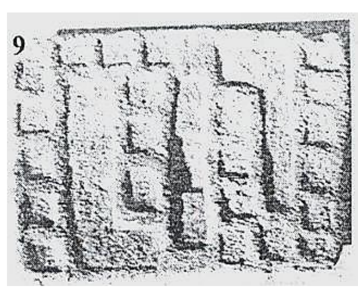
"Por esta razón hemos decidido incluir en la presente monografía la descripción de los especímenes inéditos originarios de la región de lea, los cuales presentan, además, modalidades desconocidas y tienen la originalidad de haber sido trabajados en materiales que, como la arcilla y el hueso, aún no han sido señalados por la información arqueológica y, por lo que atañe el empleo del hueso, ni siquiera por las noticias de los cronistas. Ellos se encuentran en el Museo Regional de Ica y han sido descubiertos en el yacimiento arqueológico de Carhua de la Bahía de la Independencia en la provincia de Pisco."

"El primero es de arcilla, de color marrón oscuro, y está asentado sobre una base igualmente de terracota, pero más tosca y de color más claro. Ha sido obtenido mediante el empleo del molde, lo que confirió exacta proporcionalidad y una orgánica distribución de los casilleros. Es de planta rectangular, de 47 x 32 cms., y tiene una altura de 5 cms., sin incluir la base. Los compartimientos de forma cuadrada son veintidós y los rectangulares tres; los cuadrados tienen una superficie que oscila entre los 4 y 5 cms. por cada lado; y los rectangulares 16 x 18 cms. la del casillero central y 21.5 x 5.5 cms. la de los laterales; su profundidad es de 1.5 cms. También aquí la disposición de los casilleros evidencia el propósito de presentar dos conjuntos, cada uno de diez compartimientos cuadrados y uno rectangular, situados en las partes laterales del tablero y separados por tres casilleros independientes, de los cuales dos son cuadrados y uno rectangular, ubicados en el centro.

No hay ningún indicio de existencia de torres en las esquinas. (Fig.8)."

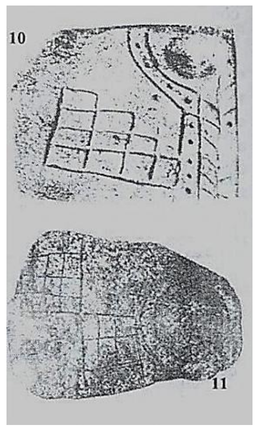


"El segundo ejemplar iqueño es de hueso de cachalote, material empleado frecuentemente en la región para usos diversos, como la construcción de techos de tumbas, según indica J.C. Tello cuando trata de los hallazgos realizados en Paracas (Tello 1959). Su plano (32 x 23 cms.) es algo más reducido que el del ejemplar de arcilla y, en consecuencia, los casilleros son también más pequeños (3 x 3 cms. los cuadrados y 5 x 3 los rectangulares); en su disposición se ha seguido el mismo principio dual, o sea dos conjuntos de casilleros ubicados a ambos lados del tablero. Cada conjunto presenta doce casillas, de las cuales once son cuadradas y una en forma de mazo o martillo, tal como ocurre con la configuración de las bases de las plataformas de los torreones con esquinas recortadas en signo escalonado que hemos encontrado en otro artefacto de piedra del Callejón de Huaylas. Dichos casilleros "en martillo" son mucho más grandes que los tres rectangulares que se encuentran en el centro, separando los dos conjuntos laterales. (Fig.9)."



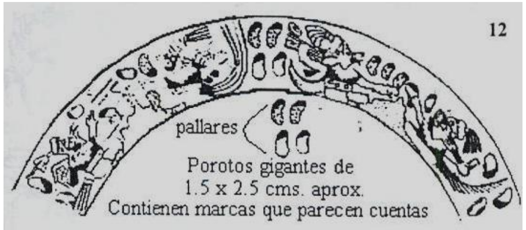
"Al lado de estos tableros cuya principal característica es la forma cóncava de sus compartimientos existen otros en que los casilleros están simplemente señalados con rayas incisas o dibujadas, o también mediante cuadritos de colores alternados muy parecidos a los que son propios de las tablas que se emplean actualmente para jugar ajedrez o a las damas. La representación del ajedrezado fue muy difundida en el antiguo Perú y llamó la atención de los españoles desde el instante mismo de su llegada al país, siendo precisamente los testigos de la captura de Atahuallpa los que describen los trajes de los acompañantes del inca como libreas con colores dispuestos a manera de escaques de tablero de ajedrez. Trajes semejantes los podemos admirar en las vitrinas de los museos o reproducidos en la figuración de la cerámica peruana de todas las épocas y estilos."

"Como ejemplo de tablero con casilleros señalados mediante rayas, podemos mencionar el que encontró Mas Uhle en una sepultura de Huancarcucho en el alto Ecuador (Uhle 1922: 230). Tiene la forma de una pequeña loseta de 2,5 cm. de espesor y 805 x 9 cm de superficie y representa grabados en una de sus caras. 10 casilleros distribuidos en triángulo escalerado; en una de las esquinas del lado superior hay cavado en la piedra, un platillo de 5 cm. de profundidad, separado del damero escalonado por un espacio con ornamentos constituidos por dos fajas con puntos y una tercera con motivos de ramas de árbol. (fig. 10)



"Delineamientos también incisos es otro ejemplar presentado por Olaf Holm en la Mesa Redonda de Arqueología de Guayaquil de 1057 y descrito en el ensayo titulado "Taptana o el ajedrez de Atahuallpa" (Holm 1958) Se trata igualmente de una loseta de piedra arenisca, pero de dimensiones mucho mayores que la de Uhle: 38x25 cm. De superficie por 7.5 cm de espesor. Su procedencia probable es el austro ecuatoriano. En la parte superior hay un platillo de 12 cm. de diámetro y un cm. de profundidad, cavado en la piedra. Inmediatamente debajo vienen dos campos formados por líneas incisas y diagonalmente opuestas: cada campo está constituido por nueve casilleros (3 x 3) y mide aproximadamente 9 cm. en cuadro."

“Como dijimos también en la alfarería el escaque sirvió de motivo para la decoración de las vasijas o de los trajes de los personajes en ellas figurados; en este caso cuando se trata de guerreros, significó las chapas o cintas metálicas que como blindaje protector recubren las cusmas y los escudos. Sin embargo, a veces, el dibujo en cuadros o rectángulos, no está función de simple decoración o para señalar aspectos particulares del atuendo, sino como modalidad precisa de un verdadero artefacto en forma de tablero con escaques. De esta clase de representaciones nos limitaremos a señalar dos, que pertenecen a la cerámica mochica. La Primera de ellas es la escenografía de un huaco que Rafael Larco H. escogió para demostrar su tesis de la escritura sobre pallares (Larco 1939, T,II: lámina XXIII). En la escena aparecen individuos rodeados de pallares y en actitud de disponer sobre la arena algunas varillas que forman una especia de enrejado o damero cuya particularidad consistía, quizá, en su fácil confección y en la rapidez con que se podía desarmar. (Fig. 12). La segunda representación de tableros con escaques la encontramos en una vasija del Museo de arqueología de Lima que ha sido por L. Y Th. Engl (Engl 1967: lámina 15 p.200) La escena de este cántaro consiste en un desfile de personas que transportan con solemnidad un tablero de grandes proporciones, en cuya superficie están delineados veinte casilleros (5 x 4), de los cuales la mayoría tiene dos puntos en su extremidad superior. El individuo que carga el tablero está precedido por dos guerreros ricamente ataviados y seguido por músicos y cargadores de trofeos que llevan estacas en cuyas cimas están clavadas cabezas humanas."



"El dibujo de este tablero es muy semejante, diríamos casi idéntico, al de una viñeta de la difundida crónica de Guamán Poma de Ayala, aquella que ilustra la manera de contar de los antiguos quipo-camayos (Guamán Poma 1936:360)."

"Yupanas y Taptanas"

Aunque no es nuestra intención hacer un estudio que establezca analogías o diferencias entre la Yupana (centro de nuestro interés) y la Tapatana, consideramos que las explicaciones que nos da Radicati De Primeglio son más que suficientes.

"En relación con su uso, las tablas de escaques fueron interpretadas de tres maneras: como maquetas arquitectónicas, como yupanas o ábacos y como taptanas o tablas empleadas en los juegos de azar, especialmente aquellos que se practicaban en cumplimiento de ciertos preceptos o ritos funerarios."

La hipótesis de que fueron maquetas de edificios se planteó al conocerse el tablero de Chordeleg, porque a primera vista se tiene la impresión de que es la representación de una fortaleza. cuyas torres dominan un recinto plano con habitaciones cuadradas y oblongas, dispuestas una a continuación de otra. El primero que lanzó esta idea fue Adolfo Bastian (Bastian 1877), a quien siguió inmediatamente Federico Gonzales Suárez (González 1878) al sostener que se trataría de la reproducción de todo un conjunto urbanístico, quizá el mismo pueblo de Choredeleg. Esta suposición dio lugar a que cuando se habla de este tablero se acostumbre denominarlo también "plano de Chordeleg."

Con el tiempo la hipótesis arquitectónica fue prácticamente abandonada y se impuso más bien la creencia de que los tableros sirvieron para la realización de cálculo y fueron, por consiguiente, verdaderos contadores o ábacos.

La tesis del ábaco tuvo su mejor representante en Carlos Wiener, que planteó y desarrolló en el relato de su viaje por el departamento de Ancash (Wiener 1877) y después, en su obra Perú y Bolivia (Wiener 1880). Fue en el pueblo de Huandoval, cerca de Caban y en la hacienda Urcon, siete leguas de Corongo, donde este viajero tuvo la oportunidad de examinar dos tableros de granito parecidos al de madera de Chordeleg, que habían sido encontrados en las ruinas de la población prehispánica de Chucama y en la antigua apacheta del cerro Huauyan."

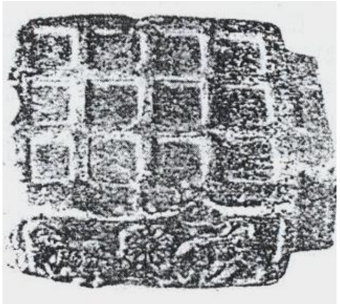
"Un relato tradicional, difundido en localidad y recogido probablemente de labios del cura de Huandobal, sugirió Wiener la idea de que estos aparatos debían haber servido para calcular los tributos que pagaban los ayllus de la zona "Según la leyenda, dice, en ellos fueron registradas, en otros tiempos, por medio de granos de diferentes colores, las contribuciones de todos los habitantes Huamachuco, representando cada color una tribu especial".

En cuanto a la manera realizar cálculo, piensa que "los diferentes pisos de estas especies de depósitos tenían la particularidad de elevar al décuplo el valor del grano que allí se hallaba; de manera que un grano en una división indicaba un valor de contribución que podía ser el décuplo o céntuplo de aquél de otra división", Concluye expresando que, "en el Perú de ayer existía un cierto orden de cosas que se reflejaba en el libro mayor de la relación exacta del Debe y Haber"; concepto este que explicaría el dualismo de los casilleros y torres porque señala que, en un mismo tablero uno de los conjuntos de casilleros con su respectiva torre, servía para consignar el tributo que se debía pagar mientras que el otro conjunto situado en el lado opuesto, registraba la cantidad de trabajo a medida que se recaudaba."

"En cuanto a las fichas o marcas, se apuntaba lo de cada lado de la pisca con guijas que eran movidas dentro de los escaques del tablero. Sin embargo era muy frecuente el uso de frejoles, generalmente redondos, de varios géneros y nombres y, más que todo, de diferentes colores. De ellos, los preferidos eran los llamados huairuros, lindísima semilla del huairo (Erythrina corallodendron)" (más conocido como "sirari” en la región oriental de Bolivia), "árbol que crece en las regiones cálidas de las vertientes orientales de los Andes. Parece que cuando el juego se realizaba con fichas de huairuros, la pisca que se empleaba era de mayor tamaño y el propósito del juego no era simplemente la distracción o la ganancia sino el cumplimiento de ciertos ritos o ceremonias funerarias. Al respecto González Holguín apunta en su diccionario que la palabra huairo significó el juego con este tipo de frejoles sobre todo en el velorio de cadáveres" (González Holguín 1952); finalidad admitida por muchos cronistas que al comentar los actos ceremoniales anteriores al entierro, señalan como de gran importancia el juego de la pisca"

Interesante es observar que si se pone en relación el contenido mágico-religioso del juego de los huairuros con los motivos de decoración del tablero de Chordeleg, es preciso admitir que. probablemente estuvo acertado Max Uhle al afirmar que las figuras de cabezas humanas que están distribuidas alrededor del tablero, representan las de los prisioneros de guerra que fueron decapitados por no haber tenido la suerte de ganar en el juego ceremonial del huairo que antecedió los sacrificios. Como dato significativo se puede agregar que el número de cabezas dibujadas es catorce, el cual coincide con el de la suma de los dos conjuntos de casilleros cuadrados (7 + 7) colocados a ambos lados del tablero. Esta opinión de Uhle queda, además, confirmada por la escenografía del cántaro mochica del Museo de Arqueología de Lima anteriormente descrito, en la que un tablero con escaques, llevado solemnemente en procesión, está escoltado por portadores de astas en cuyas cimas aparecen cabezas de trofeo."

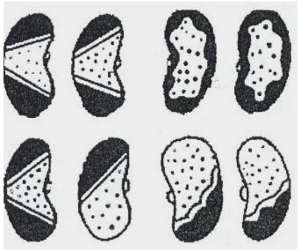
"Para dar término a estas reflexiones sobre la taptana debemos considerar, por último, la posibilidad de que de ella haya derivado la yupana, suposición que coincide, en parte, con la tesis de Nordenskiöld que señala como un paralelismo cultural entre el Viejo y el Nuevo Mundo la práctica de los juegos de fortuna con tablas para contar (Nordenskyöld 1931). Creemos que, después de haberse inventado y usado por cierto tiempo la tabla de juego, surgió la idea de que ella podía ser empleada también con fines contables. Esta creencia se basa principalmente en la similitud que, en cuanto forma, disposición y número de casilleros, existe entre el tablero de juego reproducido en el cántaro mochica y el auténtico ábaco incaico dibujado y descrito por Guamán Poma: similitud que ha sugerido a algunos autores, entre ellos L. Y Th. Engl, la suposición de que la escena del mencionado cántaro representa un cortejo que vuelve triunfante del combate, llevando la tabla de contar que sirvió para calcular y liquidar el botín de guerra o los tributos recaudados (Engl 1967 didascalia lam. 15). Otra razón favorable a nuestra manera de pensar es la natural derivación que de la taptana a la yupana debió producirse cuando fue necesario facilitar el recuento de las cosas con la adopción de un sistema de cómputo más rápido y eficiente."



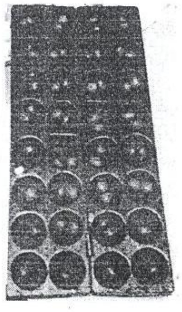
54 55

"Es evidente que de todos los tipos de taptanas, el que mejor se presta para la finalidad contable es el más simple, o sea aquel formado por casillas del mismo tamaño, distribuidas uniformemente en sentido vertical y horizontal: en otros términos, un tablero que puede ser confeccionado fácilmente con rayas trazadas sobre una plancha de madera o representadas mediante esas famosas varillas dispuestas en enraejado que, de acuerdo con la interpretación de R. Larco Hoyle, sirvieron para descifrar los mensajes escritos sobre pallares (Larco 1939, Cap. V), o, según opinión de otros autores, representan taptanas donde los frejoles eran empleados como fichas para señalar los tantos del juego (Vivante 1942)."

Corroborando un poco con R. L. Larco, podemos indicar J. F. Velarde en "Los Imperios Andinos" hace referencia que las inscripciones en los pallares ya era usadas por culturas inclusive anteriores a la de los incas. "*Es altamente probable que conocieron, además un tipo de escritura ideográfica, perdido después de las convulsiones que azotaron la región. Esta conjetura descansa en el descubrimiento de unos vasos donde se ha dibujado, con suma claridad, la escritura, el correo, y la lectura o interpretación de pallares. Los arqueólogos han descubierto varias colecciones de pallares pintados*. Pues, se supone que los puntitos o marcas indicaban determinadas cantidades según su respectiva aplicación, pero, hasta ahora no se ha logrado descifrarlos.



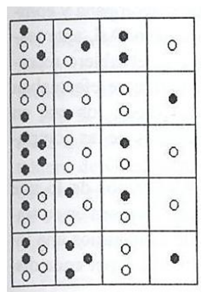
Pallares calcadas de un vaso de Chicama, E interpretados como formas de escritura



La figura que tenemos al lado es uno de los tableros parecido a una taptana que, aun hoy en día es usado por los Yao de Mozambique, Este tablero es de 4 x 8, pues, los hay de menos casilla circulares y, sólo es usado para jugar y no para realizar cálculos.

Interpretando la *YUPANA*

Si bien podemos colegir que entre el quipu, el ábaco y la yupana existen relaciones concomitantes sobre su uso, por las razones ya indicadas en otro acápite, no, nos ocuparemos de modo pormenorizado de las mismas, pues, muchos cronistas, ya se han ocupado de ello, por tanto en lo que a nosotros concierne, centraremos nuestra atención sólo, a la Yupana propiamente dicha. Por tanto, continuaremos con Radicati, toda vez que, es el que mejor interpreta la ***YUPANA***, de Guamán Poma, comparado con otros cronistas y, por lo que hemos estado viendo el material que nos ha ofrecido hasta ahora. Luego, para no perdemos o, confundimos una vez más vamos a observar el diseño junto al quipu-camayo, que nos legó Guamán Poma por lo que podríamos decir que, para, él, la yupana es el complemento del quipu. Según el dibujo, la yupana era un tablero con 20 casillas distribuidas en cinco filas de cuatro columnas. En otras. palabras diríamos que es una matriz de 4 x 5.



En cada casilla aparece cierto número de círculos, correspondiéndoles cinco círculos a las casillas de la primera columna, tres a las de la segunda, dos a las de la tercera y uno las de la cuarta. Además, algunos de estos círculos son negros y otros son blancos. Esa observación hace que algunos consideren que los círculos blancos representan sitios u hoyos destinados a ser ocupados por elementos auxiliares de Cálculo, tales como piedrecillas, granos de quinua, maíz, frijoles, etc. Por tanto, los círculos negros representarían lugares ocupados por elementos (a los que podríamos llamar de fichas), luego la suposición sería válida, pues, a lo más podría, ponerse cinco fichas en una casilla de la primera columna, o dos en una casilla de la tercera columna.

Una segunda opinión al respecto es que, las fichas de dos colores diferentes, se convierten en un recurso muy útil, especialmente en la sustracción, asignando uno de los colores al minuendo y el otro al sustraendo.

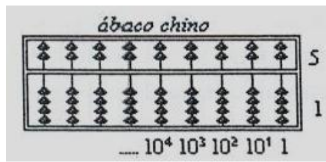
Consideramos que estas dos suposiciones no están alejadas de la verdad, pues, presuponemos que Guamán conocía la forma en que se operaba la yupana, o que por lo menos estuvo informado de su uso y por ello lo dibujó.

Dicho de otro modo, en la ilustración de Guamán Poma el tablero visto en la parte izquierda inferior, sin duda alguna acompaña y complementa al Quipu que extiende el contador y tesorero. Así, ante testimonio tan preciso, sería, arbitrario desconfiar que, el tablero representado no sea un instrumento de cálculo con el que se efectuaban operaciones cuyos resultados se registraban en quipus, los que en nuestros días serían nada menos que, los discos duros de las computadoras en los que se almacenó información numérica.

Aquí vamos a tomar íntegramente algunos fragmentos de lo que dice Pereyra sobre la interpretación que hace Henry Wassén en su trabajo "**The ancient Peruvian Abacus**", porque consideramos una información muy valiosa que no precisa ser interpretada y por ende distorsionarla.

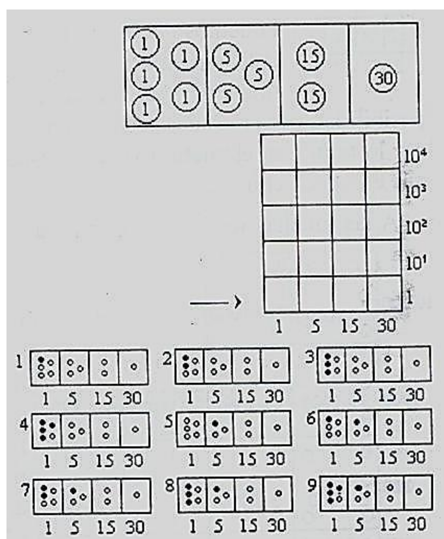
"En su estudio, este autor afirma que "*en el imperio de los Incas para las cuentas en quipus se usaban evidentemente tableros para la ejecución de operaciones aritméticas, esto es como ayuda para recibir el resultado que después se anudaba en los hilos de los quipus*." Así mismo discrepa de Nordenskiöl y está de acuerdo con Locke en cuanto a que, por sus propias características, el quipu no podía haber sido utilizado para efectuar cálculos."

Pereyra hace notar, la interpretación del ábaco relacionada con la *yupana* es la más acertada, pues, concuerda con el sistema de numeración decimal que usaban en el incario sin entrar en contradicción con las referencias de los cronistas.

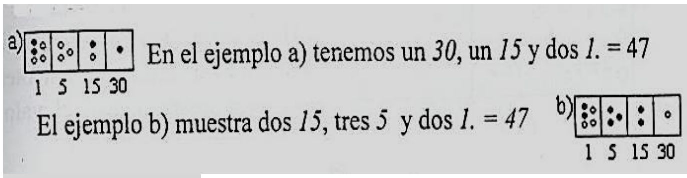


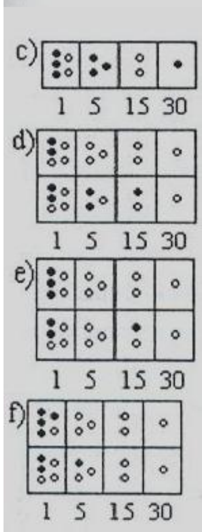
"En cambio, la asignación de valores de las columnas resulta a nuestro juicio, innecesariamente complicada y poco útil. Esta asignación es como sigue: cada elemento colocado en la primera casilla toma el valor de 1, o sea que en dicha casilla puede contener hasta 5 unidades; cada elemento colocado en la segunda casilla toma el valor de 5, o sea que en ella puede haber un máximo de 15 unidades, cada elemento de la tercera casilla toma el valor 15, de modo que en dicha casilla puede haber hasta 30 unidades; y, finalmente, a la única ficha que se puede colocar en la cuarta casilla se le asigna el valor de 30.

Lo dicho anteriormente se expresa mucho mejor en el siguiente esquema, válido para cualquier fila, independientemente de su valor posicional:



De la anterior descripción queda claro que el autor admite la hipótesis de que en el tablero de Guamán Poma los pequeños círculos dibujados en cada casilla indican el número máximo de elementos que pueden colocarse en ella." Veamos este gráfico según el modelo de Wassén





En c) tenemos un *30*, tres *15* y dos *1.= 47*

En los tres ejemplos sólo se puede usar la primera fila.

En d) se tiene dos *10,* un *15*, dos *5* y dos *1 = 47*

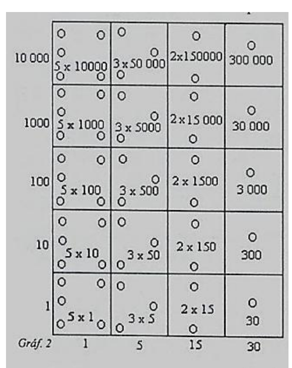
El tablero e) presenta tres *10*, un *15*, y dos *1 = 47*

Y, en f) observamos, cuatro *10*, un *5* y dos *1= 47*

Podemos decir que este último ejemplo es el más acertado, sin embargo, tal como observa Pereyra, las dos últimas filas parecerían no tener función alguna, pero, la posibilidad de ser usadas se daría en las “*sumas altas*” según Wassén, por lo tanto esa estructura vendría dada sólo por dos columnas igual que en ábaco chino del ejemplo antes mostrado.

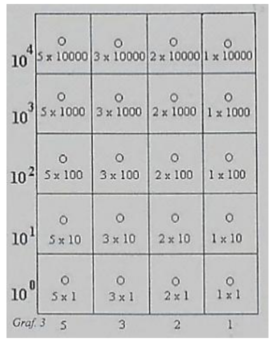
A las muchas formas de interpretar que realizaron otros investigadores como Wassén Henry (1931), Hugo Pereyra (1990, Carlos Radicati de Primeglio (1990). Tal como en el modelo de Wassén, las sucesivas filas, comenzando desde abajo, corresponden a las unidades, la primera fila; decenas, la segunda; centenas, la tercera; millares, la cuarta y decenas de millar, la quinta. Multiplicando por el número de fichas o marcas que contiene cada casilla.

Hugo Pereyra, considera que la cantidad de círculos existentes en una casilla indica el valor que se le dará a cualquier ficha colocada en dicha casilla. Es decir, una ficha colocada en una casilla con tres círculos tendrá un valor igual a 3.



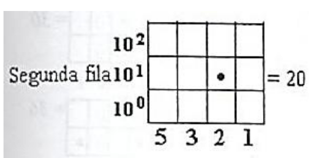
A las muchas formas de interpretar que realizaron otros investigadores como Wassén Henry (1931), Hugo Pereyra (1990, Carlos Radicati de Primeglio (1990). Tal como en el modelo de Wassén, las sucesivas filas, comenzando desde abajo, corresponden a las unidades, la primera fila; decenas, la segunda; centenas, la tercera; millares, la cuarta y decenas de millar, la quinta. Multiplicando por el número de fichas o marcas que contiene cada casilla.

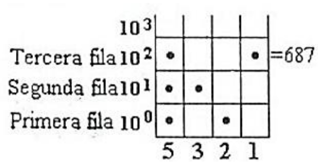
Hugo Pereyra, considera que la cantidad de círculos existentes en una casilla indica el valor que se le dará a cualquier ficha colocada en dicha casilla. Es decir, una ficha colocada en una casilla con tres círculos tendrá un valor igual a 3.



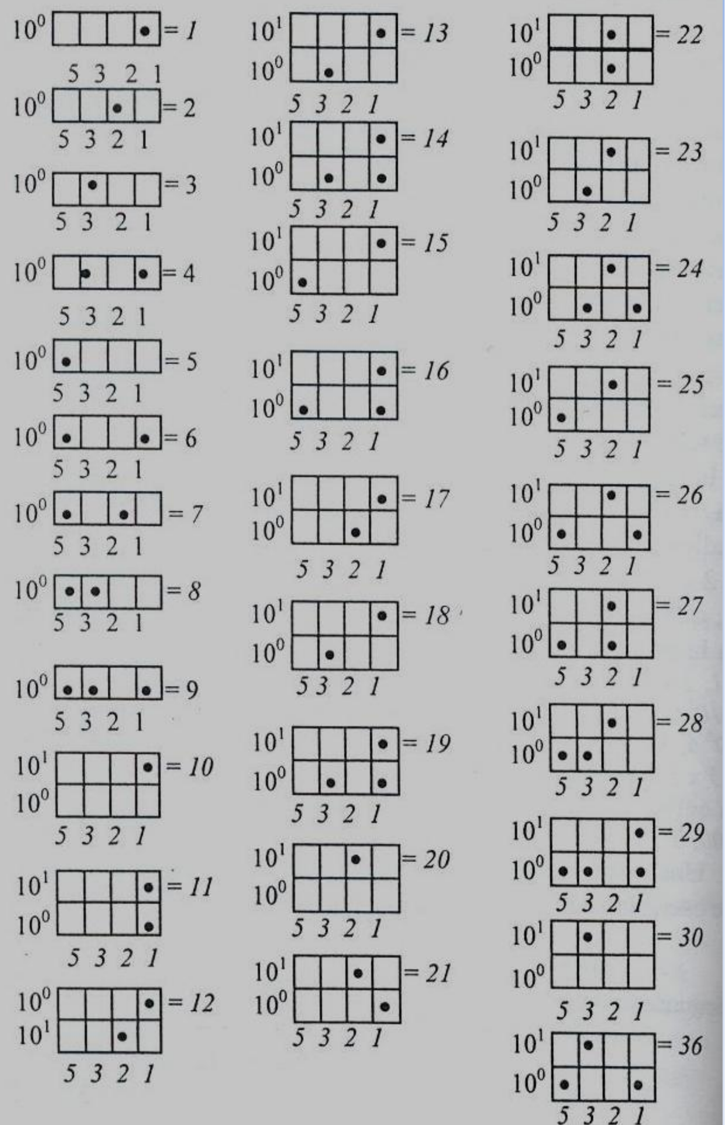
Radicati de Primeglio, propone un sistema, donde cada columna, independientemente de las otras, sirve para escribir un número. Su concepción permite equiparar la yupana a un teórico quipu de cuatro cuerdas, estableciéndose entre ambos instrumentos una correspondencia perfecta. En lugar de los valores 1,5,15 y 30 que se supone, tenía una ficha en el tablero de la ilustración de Guamán Poma. El tablero propuesto por Radicati, tiene los valores de 5, 3, 2 y 1, para todas la filas, pero, que los mismos se multiplican por las potencias de base diez. Así, en la primera fila, viene a ser: $5x10^0$ *ó, 5x1;* $3x10^0$ *ó 3x1;* $2x10^0$ *ó, 2x1;* $1x10^0$ *ó, 1x1;* en la segunda fila*;* $5x10^1$ *ó, 5x10;* $3x10^1$ *ó, 3x10;* $2x10^1$ *ó, 2x10;* $1x10^1$*; ó 1x10;* en la tercera fila*:* $5x10^{2;}$ *ó, 5x100;* $3x10^2$ *ó, 3x100;* $2x10^2$ *ó, 2x100;* $1x10^2$ *ó, 1x100;* en la cuarta fila*:* $5x10^3$ *ó, 5x1000;* $2x10^3$ *ó, 2x1000;* $1x10^3$ *ó, 1x1000 y* en la quinta fila*:* $5x10^4$ *ó, 5x10 000;* $3x10^4$ *ó, 3x10000;* $2x10^4$ *ó, 2x10000;* $1x10^4$ *ó, 1x10 000;*

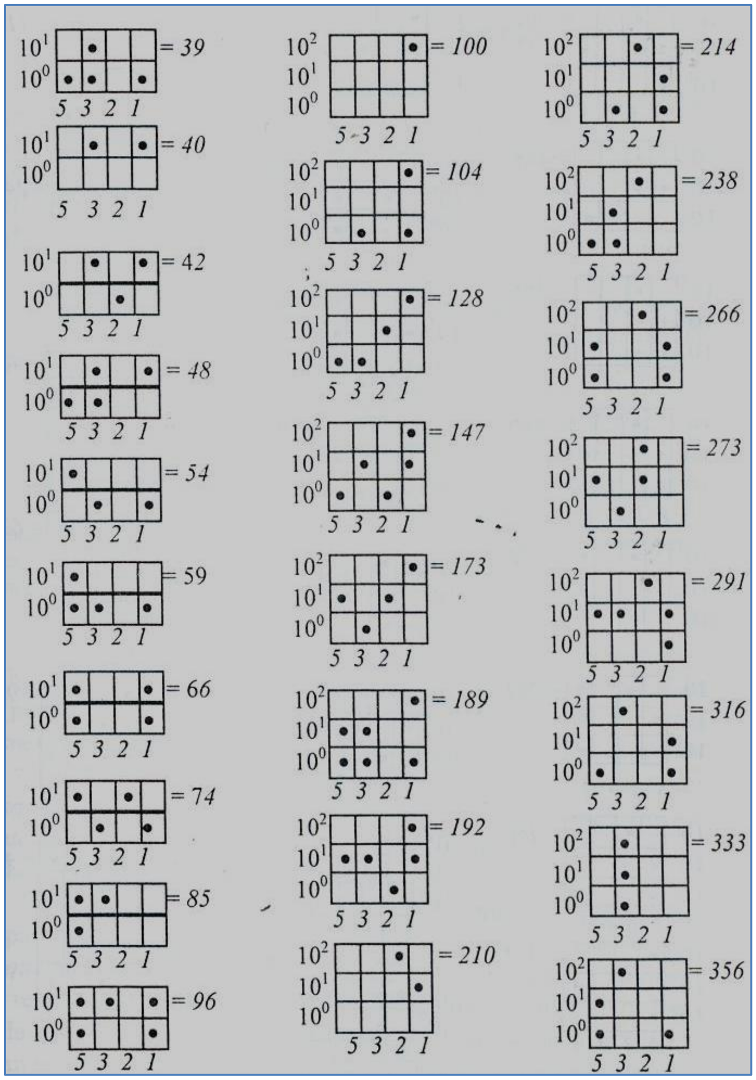
Una vez analizadas las filas y columnas del tablero. Veamos cómo se escribirían algunos números, por ejemplo el *20* y el *687.*

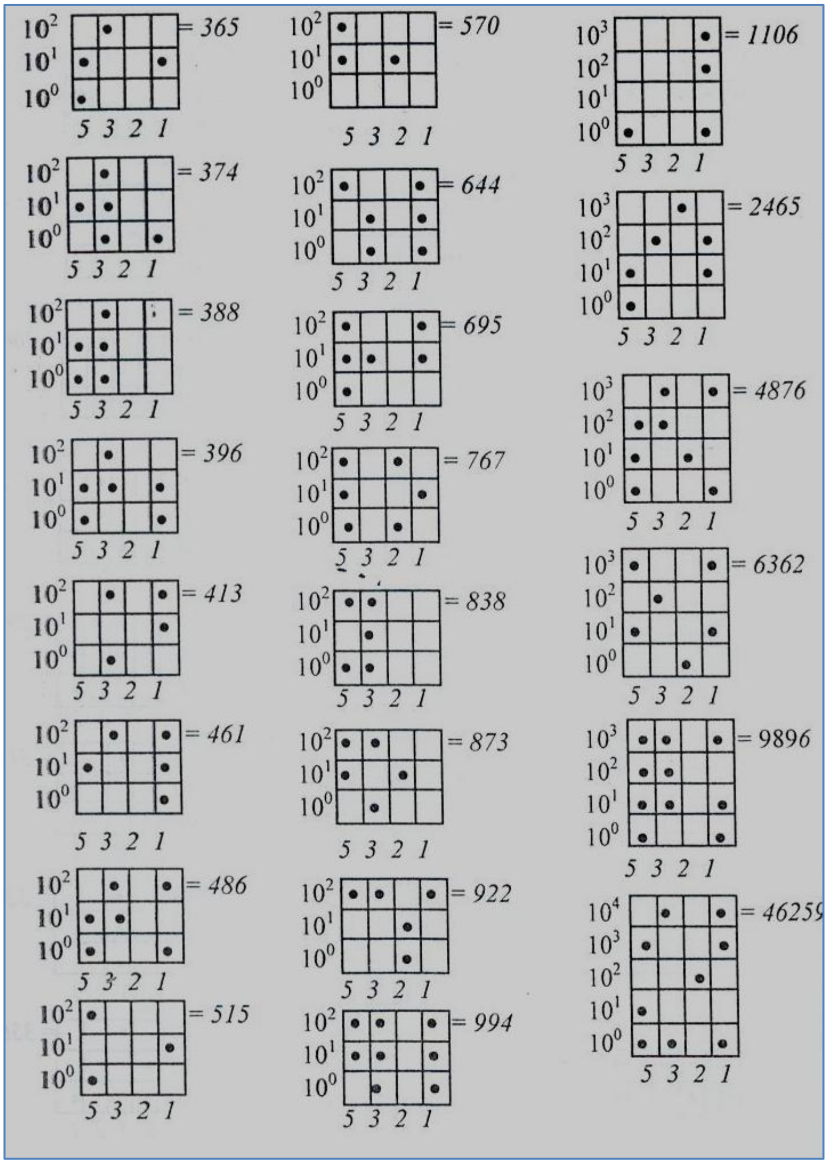




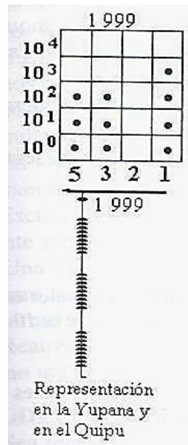
ESCRITURA DE NUMERALES MENORES QUE 50 000




= 39
= 40
= 42
= 48
= 54
= 59
= 66
= 74
= 85
= 96
= 100
= 104
= 128
= 147
= 173
= 189
= 192
= 210
= 214
= 238
= 266
= 273
= 291
= 316
= 333
= 356


= 365
= 374
= 388
= 396
= 413
= 461
= 486
= 515
= 570
= 644
= 695
= 767
= 838
= 873
= 922
= 994
= 1106
= 2465
= 4876
= 6362
= 9896
= 46259
5 3 2 1

OPERACIONES CON LA *YUPANA*



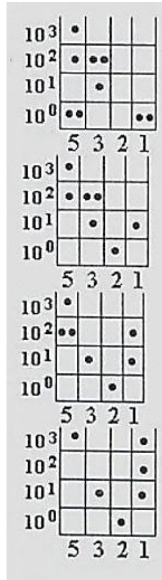
"… Pues verle otra suerte de quipos que usan de granos de maíz, es cosa que encanta; porque una cuenta muy embarazosa, en que tendrá un muy buen contador que hacer por pluma y tinta, para ver a cómo les cabe entre tantos, tanto de contribución, sacando tanto de allá, y añadiendo tanto de acá, con otras cien retartalillas. Tomarán, uno aquí, tres allá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí, trocarán tres de allá, en efecto ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente sin errar un tilde; y mucho mejor se saben ellos poner por cuenta y razón de lo que cabe a cada uno pagar ó dar, que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado. Si esto no es ingenio, y si estos hombres son bestias, juzguémoslo quien quisiere, que lo que yo juzgo de cierto es, que en aquello á que se aplican, nos hacen grandes ventajas" (Acosta 1954: 190).

Antes de iniciar las operaciones con la *yupana*, consideramos, que bien vale recalcar las expresiones del Padre Acosta al inicio de esta página al manifestar su admiración por la forma como llevaban las cuentas los nativos del incario y, veamos sólo estas dos expresiones: "*Tomarán, uno aquí, tres allá, ocho no sé donde; pasaran un grano de aquí, trocarán tres de allá, en efecto ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente sin errar un tilde" y "Si esto no es ingenio, y si estos hombres son bestias, juzguémoslos quien quisiere,...* Claro se nota, como se tenía a menos a nuestros ancestros al compararlos con "bestias" *"... que lo que yo juzgo de cierto es, que en aquello á que se aplican, nos hacen grandes ventajas"* Con hidalguía reconoce el Padre la superioridad intelectual de los nativos frente a la pseudosapiencia de los avasalladores y si esa hidalguía la hubieran tenido dichos burócratas hispanos, otra sería nuestra historia.

Según los cronistas, con la yupana se pueden realizar las operaciones de adición, sustracción y multiplicación .No obstante creemos haber descubierto un método experimental sobre la división, aunque es muy posible que está se realizaba por sustracciones sucesivas. Eso lo veremos a su debido tiempo.

Antes de realizar las operaciones es necesario saber realizar operaciones de reducción mediante simplificaciones sucesivas. Supongamos que el resultado de final de una operación nos presente el presente cuadro:

Veamos el proceso



Las dos unidades se convierten en una ficha cuyo valor es *2* y las dos *5*, se convierten en una ficha cuyo valor es *10*.

Después de la simplificación, estos son los valores finales en las dos filas en las que realizó la reducción.

Las dos fichas *300* se convierten en dos fichas de *500* y de *100* y se tienen dos fichas de *500* y una de *100*

Las dos fichas de *500* se convierten en una ficha de *1000* y finalmente se tiene una sola ficha en cada casilla.
El número resultante es *6142*.

En resumen podemos decir que, para realizar las reducciones mediante la simplificación hasta obtener el resultado final, lo único que se debe tener en cuenta son los valores que las respectivas casillas de la *yupana* admiten en cualquiera de su filas y columnas.

Qué es la adición de Números Naturales en la Yupana?

La adición en general es una operación de composición, que nos obliga a realizar la operación por reunión, así, si tenemos: 4 + 5 = 9. Gráficamente equivale a ♥♥♥♥+♥♥♥♥♥=♥♥♥♥♥♥♥♥♥; hemos reunido las cuatro unidades (primer sumando) con las otras cinco (segundo sumando), obteniendo un grupo de nueve unidades (la suma).

En toda operación de adición de naturales, sin importar el número de *sumandos* se deben seguir pasos determinados e invariables:

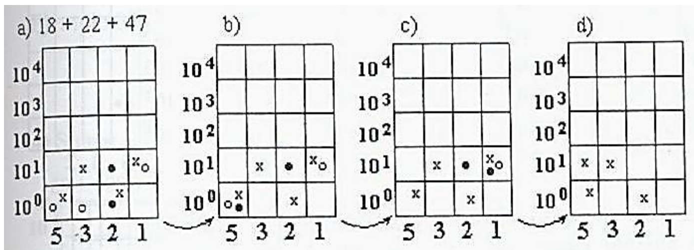
a) Escribir o colocar las fichas sumando, cada una de ellas sucesivamente si eliminar las anteriores que ya hubieran ocupado una casilla.

b) Una vez colocadas las *fichas sumando* que pueden ser todas del mismo color, se tendrá como resultado que en varias casillas se encuentren mas de una ficha, siendo así, proceder a la simplificación.

c) Realizar todas las reducciones necesarias hasta conseguir que haya como máximo una sola ficha en cada casilla.

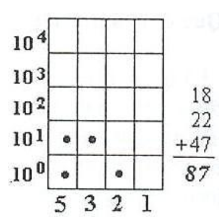
MODELOS DE ADICION CON LA *YUPANA*

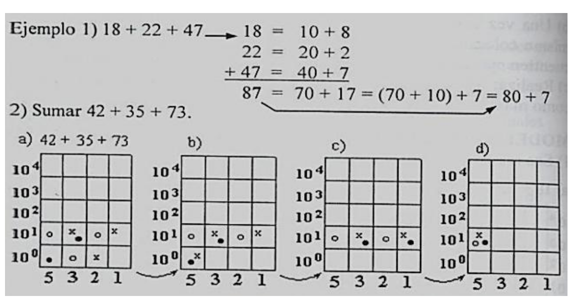
1) Sea realizar la siguiente operación: 18 + 22 +47



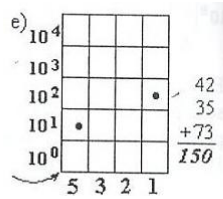
En la parte superior del tablero **a**) están los *sumandos* y dentro de él, sólo por razones didácticas, tenemos las diferentes marcas que los representan, para el *18* hemos usado "o", el *22* con "**.**" y el *47* con "x". En el tablero **b**) hemos simplificado las fichas de valor *2* y *3* y convertido a *5* por ello aparecen tres fichas en la casilla del 5; en el tablero **c**) en la casilla del *10*, tenemos ahora tres fichas y en la del *2* una ficha, luego su valor es de *5*, eso implica que debemos colocar una ficha en la casilla del *5*; el tablero **e**) muestra que ya no hay más simplificaciones, luego, la reducción está completa y el tablero con la respuesta lo tenemos como muestra el gráfico.

El proceso de operar con la yupana resulta fácil debido a que ese proceso se realiza por descomposición polinómica lo que pasamos a ilustrar cada operación realizada con la *Yupana.*



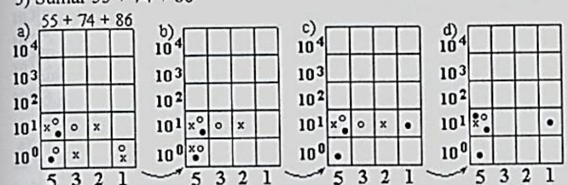


En este segundo ejemplo hemos seguido los mismos pasos que en el anterior y de igual modo para cada sumando usamos los mismos símbolos que los representan 42 = x, 35=**.**, y 73 = o. Cada uno de los tableros nos muestra, las simplificaciones respectivas hasta llegar a la reducción total en **e**).

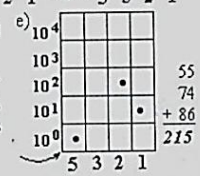


Ejemplo 2) 42 + 35 + 73 → 42 = 40 + 2
35 = 30 + 5
+ 73 = 70 + 3
150 = 140 + 10 =
100 + (40 + 10) = 100 + 50

3) Sumar 55 + 74 + 86

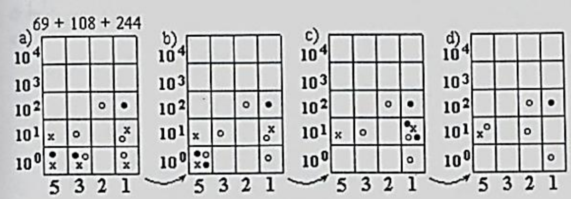


El gráfico **e)** nos muestra el resultado final de la operación.
Tanto en el tercer ejemplo, como en los anteriores hemos tenido *sumandos de dos cifras*, cuyos resultados son proporcionales a los mismos.

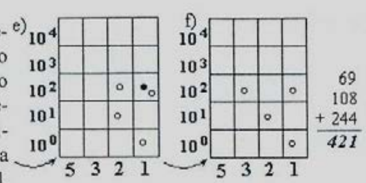


Ejemplo 3) 55 + 74 + 86 → 55 = 50 + 5
74 = 70 + 4
+ 86 = 80 + 6
215 = 200 + 15
→ 200 + 10 + 5

4) Sumar 69 + 108 + 244



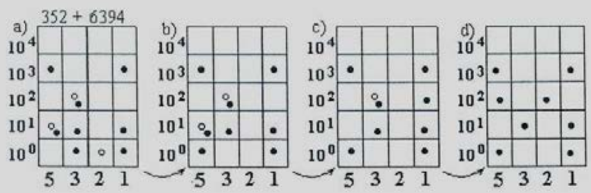
A diferencia de los modelos anteriores, el tablero conteniendo el resultado tenía las fichas de color negro. Éste último tiene fichas blancas, eso implica que, en el resultado final, lo que importa es tener en un solo color de fichas cualesquiera que sea, pues si nos tocara registrar ese resultado en unos quipus, también utilizaríamos un solo color de cordón o uno mèzclado con algún color dominante.



Ejemplo 4) 69 + 108 + 244

$$
\begin{array}{rl}
69 = & 60 + 9 \\
108 = & 100 + 00 + 8 \\
\underline{+\,244} = & \underline{200 + 40 + 4} \\
\mathbf{421} = & 300 + 100 + 21 \\
= & (300 + 100) + 20 + 1 = 400 + 20 + 1
\end{array}
$$

5) Sumar 352 + 6394



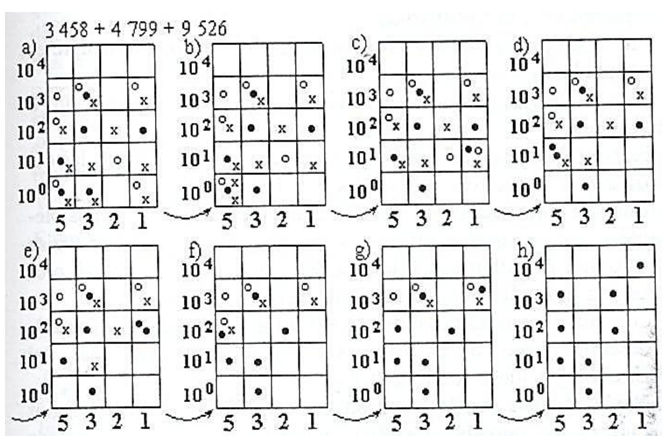
Una vez realizadas las simplificaciones y la respectiva reducción se tiene el resultado 352 + 6394 = ***6746*** - tablero **d)**

5) Sumar 352 + 6394

$$
\begin{array}{rl}
352 = & 300 + 50 + 2 \\
\underline{+\,6\,394} = & \underline{6000 + 300 + 90 + 4} \\
\mathbf{6\,746} = & 6000 + (600 + 100) + 40 + 6 \\
\to & 6000 + 700 + 40 + 6
\end{array}
$$

Ahora vamos a operar con *sumandos de cuatro dígitos*.

6) Sumar 3458 + 4799 + 9526



3 458 + 4 799 + 9 526 = *17783*

Como hemos podido observar, en todas las operaciones, para poder simplificar al realizar las reducciones, el único requisito es saber igualar valores menor o igual que diez en cualquiera de las filas, pues, por ejemplo en la segunda fila, podemos decir, *dos decenas* más *tres decenas* son *cinco decenas* y llevarnos a la casilla respectiva donde ya hay una ficha, *dos-cinco decenas* hacen una *centena*, etc. etc.

$$
\begin{aligned}
3\,458 &= 3\,000 + 400 + 50 + 8 \\
4\,799 &= 4\,000 + 700 + 90 + 9 \\
+9\,526 &= 9\,000 + 500 + 20 + 6 \\
17783 &= 16\,000 + 1600 + 160 + 23 \\
&= 10\,000 + (6\,000 + 1\,000) + (600 + 100) + (60 + 20) + 3 \\
&= 10\,000 + 7000 + 700 + 80 + 3
\end{aligned}
$$

¿Qué es la sustracción de Números Naturales en la *Yupana*?

La sustracción es una operación inversa de la adición, o sea es una operación de descomposición en la que intervienen dos *operandos*: el "*Minuendo*" y el "*Sustraendo."*

En la sustracción de números naturales el "*Minuendo*" siempre es la cantidad mayor o igual que el "*Sustraendo.*"

Para realizar la sustracción se deben seguir pasos determinados e invariables:

a) Escribir o colocar las fichas *Minuendo* con un solo color, y las del "*Sustraendo*" con otro color para facilitar las reducciones.

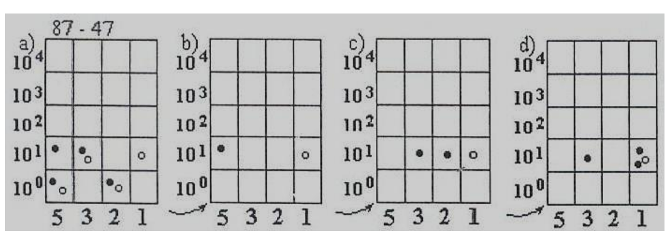
b) Una vez colocadas las fichas operando con distinto color, posiblemente se tendrá como un primer resultado en el tablero, que en varias casillas se encuentren dos fichas de color contrario. Siendo así, proceder a la simplificación retirando ambas fichas.

c) Con las fichas restantes que representan al "*Minuendo*" se procede a descomponerlas hasta llegar a equipararse a las fichas del "*Sustraendo*" y luego retirarlas del tablero.

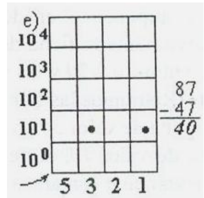
d) Realizar todas las descomposiciones necesarias hasta conseguir que haya como máximo una ficha del color del "*Minuendo*" en cada casilla.

MODELOS DE SUSTRACCIÓN EN LA *YUPANA*

1) Sea realizar la siguiente operación: 87 - 47



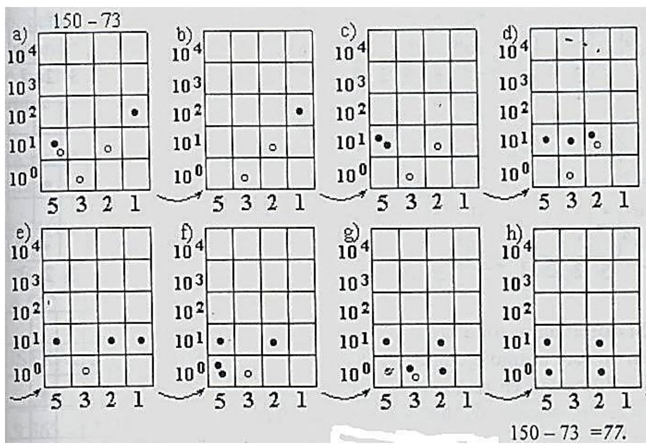
El tablero **a**) muestra la disposición o colocación de las fichas que representan al "*Minuendo*" con las fichas de color negro y al "*Sustraendo*" con las de color blanco. Se procede a retirar las fichas con colores contrarios y tenemos el tablero ***b***), la ficha de color negro que vale *50*, la descomponemos en sus valores de *30* y *20* colocándolas en sus respectivas casillas como lo muestra el tablero ***c***); nuevamente procedemos a descomponer la ficha de valor *20*, en dos fichas de valor *10* y las colocamos en la casilla de ese valor, en el tablero ***d***). Retiradas las dos fichas de color contrario queda el resultado con las fichas del color del "*Minuendo*" en ***e***), 87- 47 = ***40***. Veamos por descomposición polinómica



Ejemplo 1) 87 – 47

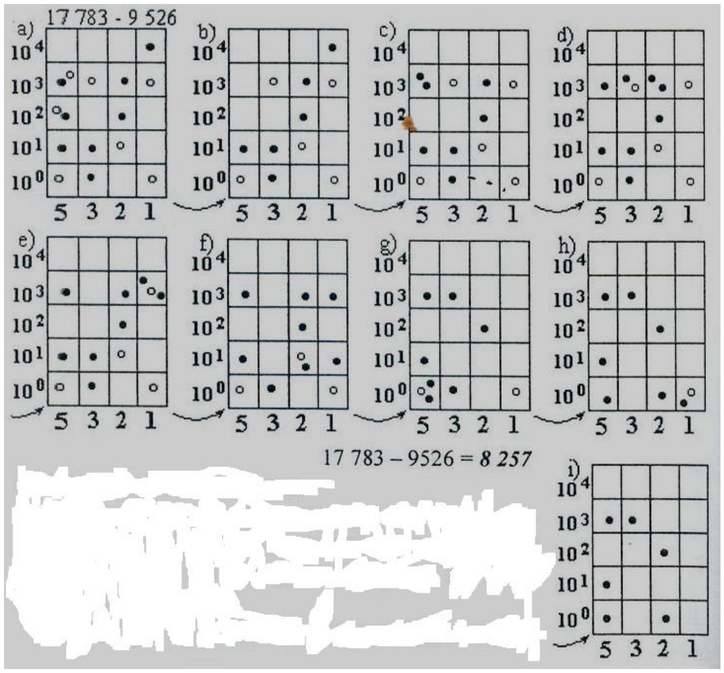
$\longrightarrow$
87 = 80 + 7
<u>47 = -40 + (-7)</u>
40 = 40 + 0 = 40

2) Realizar la sustracción 150 - 73



Reiteradas las fichas de color contrario en el tablero ***a***) podemos ver lo que queda en el tablero ***b***). La ficha de valor *100*, la descomponemos en dos fichas de valor *50* -tablero ***c***)- Tomamos nuevamente la ficha de valor *50* y la descomponemos en dos fichas de valor *30* y *20* y las colocamos en sus respectivas casillas –tablero ***d***) -Retiramos las fichas de color contrario y pasamos a descomponer la ficha de valor *30* en dos de valor *20* y *10* -tablero ***e***)- , luego, la ficha de valor *10,* la descomponemos en dos de valor *5* -tablero ***f***)-, nuevamente tomamos una ficha de valor *5* y se la descompone en otras de valor *3* y *2*- tablero *g*)-, finalmente se retiran las fichas de color contrario y se tiene el tablero ***e***) conteniendo el resultado o "*Diferencia*".

3) Realizar 17 783 – 9 526



Si observamos todo el proceso en este último ejemplo vemos que no hay ninguna dificultad en realizar la sustracción mediante la descomposición de los valores mayores en otros menores equivalentes.

Al igual que en la adición, la operación se realiza por descomposición polinómica.

Ejemplo 2) 17 783 -9 526 17 783 = 17 000 + 700 + 80 + 3

-9 526 = -9 000 + (-500)+(-20) +(-6)

8257 = ?

Descubrimos que en las unidades no es posible realizar la sustracción, esto implica que previamente debemos reagrupar decenas a unidades.

17 783 = 17 000 + 700 + 70 + 13

-9 526 = -9 000 + (-500)+(-20) +(-6)

8 257 = 8 000 + 200 + 50 + 7

En caso de que en una operación de sustracción, el "sustraendo" fuera mayor que el "minuendo" en cualquiera de sus cifras, se debe proceder a la reagrupación como en el ejemplo anterior.

La descomposición polinómica en la sustracción ratifica la simplificación que se realiza en la *yupana* con fichas del mismo valor absoluto, pero de signo contrario, por lo que de manera subliminal se llega a concebir la noción de operar con números negativos. Además de que no hay necesidad de estar reagrupando para el que minuendo siempre sea mayor o igual que el sustraendo.

Para una mejor reafirmación de lo tratado hasta aquí recomendamos realizar los ejercicios siguientes:

ADICIÓN

a) 36+45+72;	b) 84+93+75;	c) 342 + 711 +801;
d) 4 563 + 6 237;	e) 4626 + 8109;	f) 23706 + 47025

SUSTRACCIÓN

a) 264-171;	b) 784-375;	c) 4701-2801;
d) 9563 -5 339;	e) 24 626 -18109;	f) 43706 -27828

¿Qué es la multiplicación de Números Naturales en la *Yupana*?

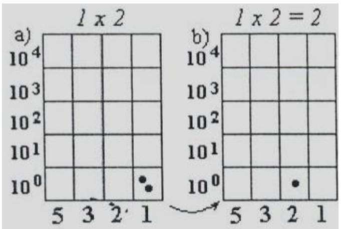
La multiplicación igual que la adición es una operación de composición y en la *yupana* se presenta de un modo interesante.

Por razones didácticas y para una fácil comprensión, los ejemplos los realizaremos con valores bajos para el *multiplicador con respecto del* multiplicando, a fin de manejar bien el mecanismo operativo.

Supongamos que queremos elaborar la tabla del *2.* Veamos cómo se procede en cada caso.

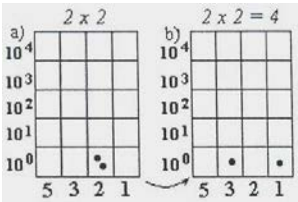
MODELOS DE MULTIPLICACION EN LA *YUPANA*

Ejemplo 1



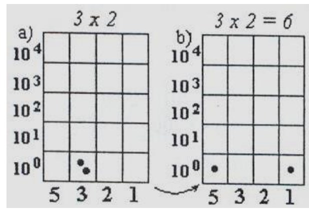
Lo que se ha hecho aquí es tomar en cuenta de modo virtual el valor de la casilla *1* (*multiplicando*) y colocar ahí dos fichas negras *1* x *2.* Luego el valor real de las dos fichas es *2* y se coloca ese valor en la correspondiente casilla, ahora podemos leer *dos* en ***b***)

Ejemplo 2



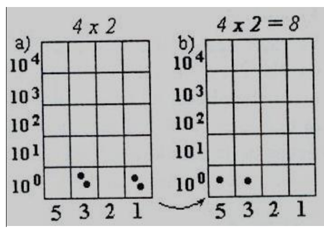
Igual que en el caso anterior colocamos dos fichas en el valor, virtual de la casilla para hacer 2 x 2, como el valor real es *cuatro*, ponemos las fichas donde corresponde y se tiene la respuesta *cuatro* en ***b***)

Ejemplo 3



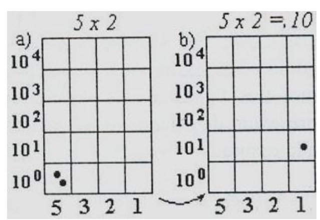
De modo análogo al anterior ejemplo se ha procedido con el mismo mecanismo y ha sido fácil hallar la respuesta en ***b***). 3 x 2 = 6

Ejemplo 4



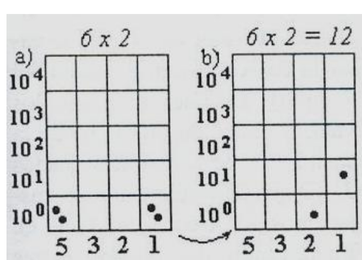
En este ejemplo ya no podemos proceder igual que en el caso anterior, por que no existe el *4* virtual, pero, obtenemos sumando los valores virtuales en **a**). Por tanto se colocan dos fichas en cada valor virtual y luego se obtiene el valor real con la suma de 6 + 2 , que es el resultado de multiplicar 4 x 2 = 8 en **b**).

Ejemplo 5



En este ejemplo procedemos igual que en los *ejemplos 1, 2 y 3.* Luego, obtenemos el valor real correspondiente a *5* x *2= 10*

Ejemplo 6

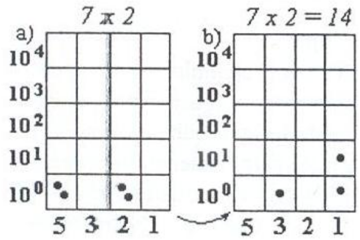


Como después de los valores virtuales de *1, 2, 3 y 5* ya no tenemos los que les siguen, siempre procederemos igual que en el *ejemplo 4*, para el 6 con *5 + 1*. Y, no tendremos problema alguno en proceder como ya sabemos.

A partir de ahora en todos los numerales que sean mayores que *5* y que no estén en el tablero, siempre procederemos aplicando los pasos iniciales a sus respectivas sumas, así, para el *6*, será *5 + 1*, para el 7, 5 + 2, para el **8**, 5 + 3 y para el 9, 5 + 3 + 1.

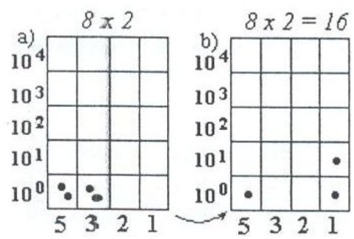
En el caso de las decenas, centenas, etc., el mecanismo también será análogo, pues, por ej. Para el ***40*** será *30 + 10*, el ***70***, *50 + 10*, el ***90*** será *50 + 30 + 10*, el ***600*** *= 500 + 100*, etc., etc. Luego se aplicará a esas cantidades virtuales del tablero el mecanismo del ejemplo 4.

Ejemplo 7



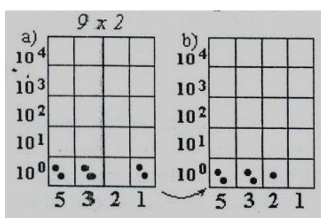
El valor real de las fichas de la casilla *2* es 4, luego llevamos una ficha a la casilla del *3* y otra a la del *1*; el valor real de las dos fichas de la casilla del *5*, es 10 y lo llevamos la casilla del *10*.

Ejemplo 8



El valor real de la casilla del *3* es 6 en **a**), luego llevamos una ficha a la casilla del *5* y otra la del *1*, como en la casilla del *5* tendríamos tres fichas el valor que representan dos fichas lo llevamos a la casilla del *10* en **b**)

Ejemplo 9

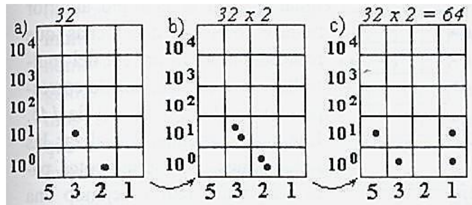


La casilla *1* en **a**) tiene dos fichas cuyo valor real es 2, ese valor lo colocamos en la casilla del *2* en **b**). Después tomamos los valores reales de una ficha de la casilla *2* y de la *3,* que sumados 3 + 2 nos da 5. Ese valor lo trasladamos a la casilla del *5* en **c**). En la casilla del *5* tenemos tres fichas cuyo valor real es 15, Tomamos dos fichas cuyo valor real es una decena y ese valor lo llevamos a la casilla del 10 en **d**) de ese modo obtenemos el resultado final indicado en la parte superior del tablero.

Veamos otros ejemplos con numerales virtuales mayores que el diez o sea de *polinomio* por un *monomio.*

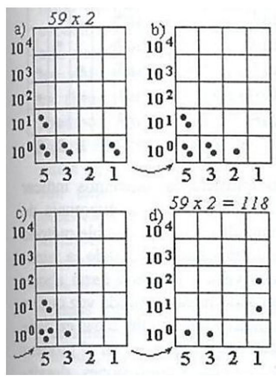
Sea multiplicar: a) 32 x 2; b) 59 x 2; c) 145 x 2; d) 1246 x 2.

Ejemplo a)



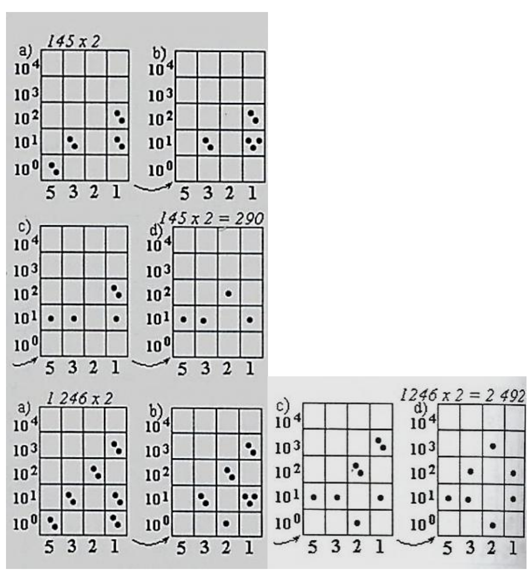
Ahora se trata de multiplicar números de dos o más cifras, por tanto vamos a crear un mecanismo muy simple que nos facilitará la operación. En primer lugar marcamos con una ficha las casillas que representan al *multiplicando*. Luego, como el m*ultiplicador* es 2, aumentamos una ficha más a cada casilla y se convierte en multiplicador. Una vez colocadas las fichas en las casillas correspondientes, se procede a realizar la reducción, dos fichas en la casilla del *2*, equivale a *3 + 1* y, dos fichas en la casilla del *30* es igual a *50 + 10*. El resultado de 32 x 2 = 64

Ejemplo b)



Siguiendo el mecanismo del anterior ejemplo, en el gráfico **a**) está el valor virtual de *59* por la posición de las fichas, en el grafico **b**) observamos que el valor real de las dos fichas de la casilla *1* ha sido colocado en la casilla *2*. En el **c**) muestra la reducción del valor real de las fichas de las casillas *2* y *3* y llevadas a la casilla *5*. Luego el valor real de las dos fichas de *5* se ha llevado a la casilla *10* y finalmente se ha realizado el mismo proceso con las otras fichas.

Ejemplo c)



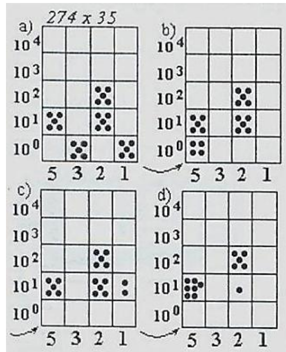
Igual que en el ejemplo anterior hemos colocado dos fichas representan el valor real del multiplicador *2* en cada casilla correspondiente al valor virtual de *145*. Luego procedemos a realizar las reducciones correspondientes para cada valor real y dejando una ficha en la respectiva casilla, tal como lo muestran los gráficos **b**), **c**) y **d**) de manera secuencial, hasta llegar al resultado final.

Siguiendo los mismos pasos se ha realizado la última operación.

Antes de continuar con más multiplicaciones, queremos indicar que, hemos realizado nuestra propia interpretación a diferencia de otras descritas por los cronistas consultados, sobre el posible método o modalidad, cómo se realizaba la multiplicación aplicando la *yupana* y, esa modalidad es la que hemos visto y aplicado hasta ahora. Pues, si tratamos de multiplicar, colocando fichas por cada vez que se repita el multiplicador se tendría un enorme montón de fichas en cada casilla, además de significar un trabajo muy engorroso en el proceso de reducción, lo que inclusive podría llevar a confusiones, desvirtuando, la versatilidad y utilidad práctica que tenía la *yupana,* pues, al intentar operar con multiplicandos con más de dos cifras, por ejemplo multiplicar 274 x 55, siguiendo los pasos de la descomposición polinómica y no teniendo suficientes espacios en las casillas, donde registrar los productos parciales, las fichas con los valores de los mismos tendrían que ser colocados en algún otro lugar o casillas, a las que hemos dado en llamarlas auxiliares por consiguiente siguiendo nuestro método se evitaría el caos con las consecuencias indicadas.

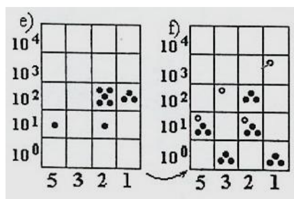
Esa interpretación nace de la observación de la estructura del tablero con escaques o casillas, pues, cualesquiera que haya sido la forma de éste y/o posiblemente anterior al modelo con el cual presentamos los ejemplos, tanto con los de piedra como, los de terracota, consideramos que hemos encontrado un singular camino debido, a su configuración con espacios ortogonales en un nivel más alto en relación a las de la plataforma, han debido tener una función específica (Figs. 1). Una reflexión idéntica hacemos, primero con el tablero de la figura 2, por la disposición de las casillas en forma de martillo que debieron tener alguna utilidad entre las otras casillas pequeñas y segundo con el tablero de la figura 3, pues, a diferencia de los dos modelos anteriores, esta última tiene una especie de plataformas cuadradas escalonadas y diagonalmente opuestas. Suponemos que cuando una casilla tendría muchas fichas momentáneamente se la colocaría ahí y, luego se las tomaría para seguir con las reducciones.

Sin más teoría, tratemos de multiplicar 274 x 35.

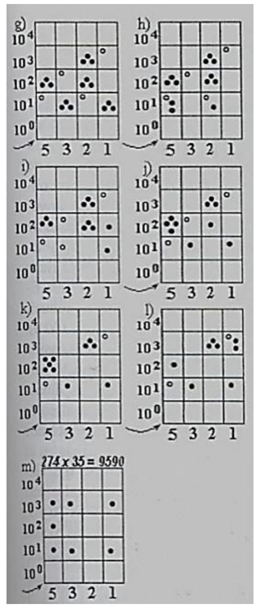


Tenemos dos caminos para realizar a operación, uno es por descomposición polinómica iniciando con las centenas o decenas y otra por el método tradicional comenzando por las unidades.

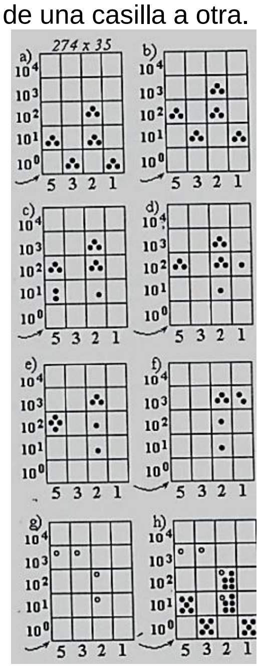
Comenzamos utilizando éste último. Siguiendo nuestro método hemos colocado primero una ficha para determinar el número 274 como *multiplicando*, después hemos completado al *5* con las otras cuatro fichas que corresponden al *multiplicador*, el tablero **a**) muestra esta operación.



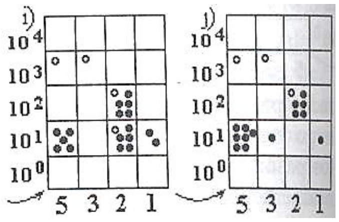
En el tablero **b**) ya tenemos las reducciones hechas y la casilla *5* nos presenta *cuatro cincos* que equivalen a *dos decenas* que han sido llevadas donde corresponde en **c**) de igual modo el valor real de las fichas de la casilla *20* han sido trasladadas a la casilla *50* y ahí tenemos 7 fichas de las que tomamos *6* cuyo valor real 30 *decenas* o sea 300 unidades y han sido colocadas en **d**); luego, su valor real ha sido colocado en la casilla 300, al mismo tiempo se ha hecho la reducción de las fichas de la casilla *200* y su valor real llevado a la casilla *500* en **e**), como ese valor real es *1000*, entonces se ha colocado ese valor en la respectiva casilla. Antes de seguir y sólo para marcar este producto parcial cambiamos de color las fichas respectivas y ahora reiniciamos multiplicando por 30. Primero colocamos 3 fichas en los valores virtuales de *274* en **f**) y, en los valores virtuales de *274* en **f**) y luego las subimos un lugar para que sea *3 x 10* y operar con el 30 en **g**) después se realiza la reducción correspondiente donde obtenemos el valor real de 12 y colocamos *dos* fichas *cinco* en la casilla *50* y una en la *2* de **h**); ahí las dos fichas de la casilla *20* se reducen a *30 + 10* y se las coloca respectivamente en su casilla, así como las *dos* fichas *50* se trasladan a la casilla *100* en **i)**. En este tablero se siguen realizando las reducciones necesarias y se llega a lo que muestra **j**), tomando las fichas de las casillas *200* y *300* se las reduce a su valor real de *500* y el mismo se coloca en esa casilla **k**); tomamos cuatro fichas de *500* cuyo valor es *2000* y las colocamos en la casilla de *1000* en **l**).



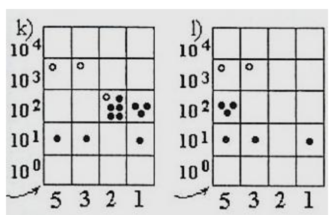
Finalmente tomamos el valor real *9000* de las *tres* fichas de la casilla de *1000* y de las *tres* de la casilla de *2000* y las reducimos colocándolas donde corresponde, *una* a la casilla de *1000*, la segunda a la casilla de *2000* y la *tercera* a la de *5000* y obtenemos el resultado final presentado en la parte superior del tablero **m**). Por la observación de tantos gráficos utilizados para la demostración, seguramente nos parece un trabajo muy largo y engorroso, sin embargo en la práctica, no es así, pues, todos los pasos de reducción y simplificación se los realizan casi simultáneamente, trasladando valores de una casilla a otra.



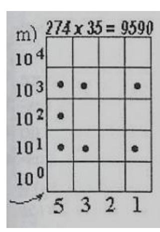
acostumbrada por descomposición polinómica. Para ello vamos a iniciar primero multiplicando *274* por *30* y luego será 274 x 5.



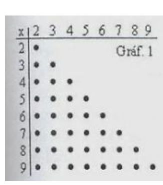
Iniciamos 274 x 3 y después por *10* para que sea por *30*, tablero **a**), el valor real de las casillas *10 y 30* **b**) es 3 fichas de *10* y 3 fichas de *30* y 3, procedemos a la reducción obtenemos lo indicado en **c**). Igualmente reducimos las dos fichas de la casilla *50* a la casilla *100* y tenemos **d**). El valor real de la ficha de la casilla *100* y de las tres fichas de la casilla *200* las reducimos y se llevan a la casilla *500* **e**), ese valor real llevamos a la casilla 1000 **f**) y tenemos el producto parcial en **g**), sólo por razones didácticas les hemos cambiado el color a las fichas. Ahora multiplicamos *274 x 5* colocando las fichas en el respectivo valor virtual **h**). Haciendo la reducción del valor real de las fichas de las casillas *10 y 3*, tenemos **i**), igualmente las fichas de las casillas *10, 20* y 50, las reducimos y tenemos **j**). El valor real 1500 de las 3 fichas de la casilla 100 y de las 6 fichas de la casilla 200 en **k**) las reducimos a la casilla *500* en **l**). Las dos fichas de valor real de 500 las reducimos y las llevamos a la casilla de *1000*. Luego, no teniendo que hacer más reducciones cambiamos el color de las dos fichas del producto parcial anterior y tenemos el resultado final en **m**).

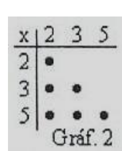


En todo el proceso de esta operación ejemplo, dado que hemos trabajado con números pequeños no hemos necesitado usar de casillas auxiliares y por tanto diríamos que ha sido fácil la operación.



Además, el método que hemos adoptado, es de nuestra propia interpretación, en lugar de aquella presentada por Radicati, porque, en su trabajo, él indica, la posible existencia de una tabla de multiplicar, para evitar el trabajo engorroso por acumulación de fichas hasta obtener el producto. Esa tabla tendría por lo menos 36 productos (Graf.1). Sin embargo, también, indica que, estando los números en a *yupana* para multiplicar por 10, 100, 1000, etc. bastaría recorrer uno, dos, tres lugares etc. hacia arriba, como ya lo hicimos en nuestra operación ejemplo. Él indica que, *"para multiplicar con la yupana resulta muy cómodo retener en la memoria una pequeña tabla de multiplicar con sólo 6 productos"* (Graf. 2), pero, que "*en realidad no hace falta memorizarla ni registrarla, pues, basta mirar la yupana con la que operamos para conocer de inmediato los valores de la tabla"* (ver la operación ejemplo de 274 x 35 en **g**) de la 81 y en **b**) de la 82. Bastó recorrer hacia arriba un lugar).



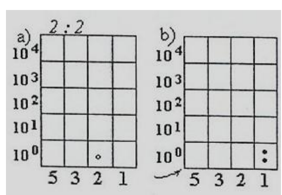


La División de los Números Naturales en la *Yupana.*

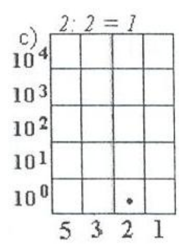
La división como operación inversa de la multiplicación es una operación de descomposición, por ello, en la *yupana* a tiempo de descomponer un *Dividendo* para encontrar el *cociente* con respecto a un *divisor* del número virtual de la *yupana*, vamos a utilizar muchas fichas que posiblemente no tendrán cabida en las casillas correspondientes a los *divisores*, eso implicará que deberemos utilizar casillas auxiliares o colocarlas fuera de la *yupana* circunstancialmente. Sin embargo, creemos que con los ejemplos de la tabla del "2" igual que en la multiplicación podremos tener el conocimiento suficiente sobre el modo de operar con la *yupana*. Antes de iniciar los ejemplos respectivos de los algoritmos de la división, queremos señalar que no hemos encontrado nada escrito respecto de esta operación de descomposición. Hugo Pereyra Sánchez indica que Henry Wassén tuvo mucha razón al afirmar que *"es muy poco probable que el uso de las divisiones fuera muy propagado en el Perú antiguo".* El mismo autor opina que: "*se harían solamente divisiones muy simples por el método elemental de distribuir en dos o más partes iguales las piedrezuelas o granos de un conjunto dado*". Y, junto a Pereyra nos unimos a lo expresado por el Padre Acosta al inicio de este capítulo, como una forma de rendir homenaje a los etnomatemáticos ancestrales, valorando sus saberes que fueron destruidos por una ambición material en desmedro una riqueza intelectual.

MODELOS DE DIVISION CON LA *YUPANA*

Ejemplo 1. 2: 2

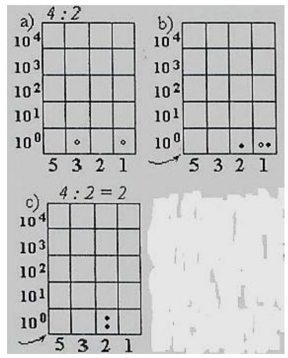


En primer lugar hemos adoptado la decisión de usar fichas blancas para indicar el dividendo y así, diferenciar de las fichas de la descomposición. En este ejemplo tomamos el valor real de 2 y lo descomponemos en dos unidades que se colocan en la casilla de valor virtual "*1*" en **b**).



Luego pasamos esas dos unidades a la casilla de valor virtual "*2*" convertida en una sola ficha, que ficha, que finalmente es la respuesta buscada en **c**).

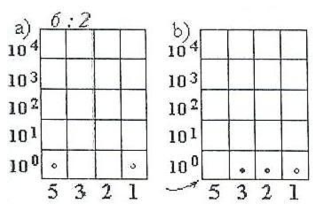
Ejemplo 2 4 : 2



Como en nuestro tablero no dispone del valor virtual “4”. Usamos las casillas que lo representan por su sumatoria 3 + 1. Colocamos las fichas blancas en las casillas 3 y 1 en **a**), luego pasamos, el valor real de 3 descompuesto en 2 y 1 a las respectivas casillas en **b**)

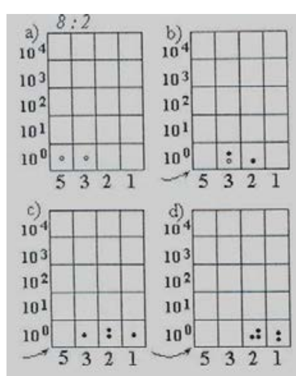
Tomamos las dos unidades (fichas blancas y negra) de la casilla 1 y las trasladamos a la casilla 2 siendo esta la operación final, cuyo resultado es 2 por el número de fichas que se encuentran en la casilla de valor virtual 2 que es la casilla de divisor por tanto el cociente es 2.

Ejemplo 3. 6 : 2

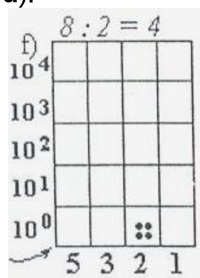


Como en el ejemplo anterior tampoco tenemos el valor virtual de *6*, por consiguiente lo reemplazamos por la sumatoria de *5 + 1*, colocamos las fichas blancas en las casillas *5 y 1* en **a**), después tomamos la ficha blanca de la casilla 5 y la descomponemos en su valor real de 3 y 2 y colocamos esos valores en las respectivas casillas de *3* y *2,* **b**).

Ejemplo 4 8 : 2

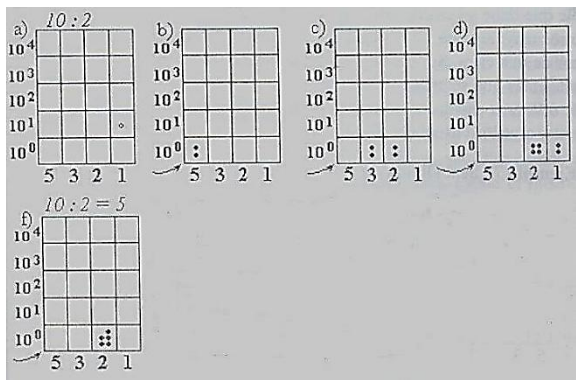


Como ya sabemos, al no tener el valor virtual de 8 en el tablero colocamos las fichas en las casillas que hacen la sumatoria de *5+3*, **a**). Pasamos a descomponer el valor real de 5 en *3 y 2* y colocamos en las respectivas casillas, **b**). Realizamos una operación análoga con el valor real de 3 y pasamos a colocar las fichas donde corresponde, **c**). Nuevamente realizamos otra descomposición y tenemos que muestra **d**).



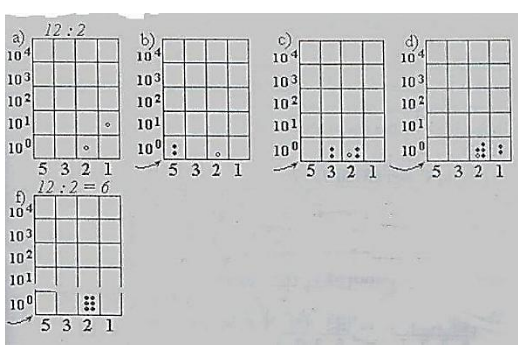
Para finalizar la operación, las dos fichas que se encuentran en la casilla *1*, las convertimos en una y las pasamos a la casilla *2*. Ahora tenemos 4 fichas en la casilla *2* de **f**), que representan al cociente de la división propuesta.

Ejemplo 5 10: 2



En este ejemplo vamos a tratar directamente sin mayores explicaciones, pues consideramos que ya tenemos bastante base para seguir con descomposición de los valores mayores en otros menores, sabiendo que el mecanismo es semejante en todas los casos, variando apenas en los respectivos valores reales. Así el valor de la casilla *10* se ha ido descomponiendo sucesivamente. Una decena vale dos 5, los dos cincos dos valores de 3 y 2 respectivamente, dos, 3 valen dos 2 y dos 1, tal como muestran cada uno de los cuadros hasta llegar al tablero **f**) en el queda representado el cociente de la división propuesta.

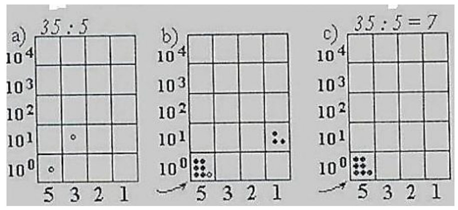
Ejemplo 6 12 : 2



Con el procedimiento del ejemplo anterior hemos realizado la división indicada de 12:2 y se ha conseguido el cociente de 6 fichas, las mismas que tomadas en su valor real conjunto siguen teniendo el valor de 12.

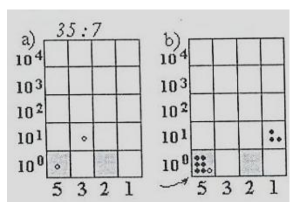
Considerando que ya tenemos suficientes ejemplos de división con *dividendos* menores que 20 y por un *divisor* simple que tiene su casilla como es el *2*, a continuación vamos a ver con otros mayores 20 y menores que 100, para divisiones por el divisor de un cifra. Sin embargo. Debido a que serán distintos divisores y además que se encuentran en dos casillas, como el caso *del 4, 6, 7, 8, ó 9, esas* casillas las tendremos con el fondo sombreado y así denotar al valor virtual del *divisor.*

Ejemplo 7 Sea: Dividir 35 : 5

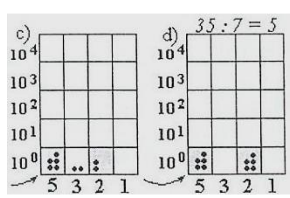


El valor 30 indicado en la casilla del *30* en **a**) lo convertimos en tres fichas de valor 10 cada una y las colocamos en la casilla del *10* en **b**). A continuación esas tres fichas que hacen el valor *30*, las convertimos en 6 fichas de valor 5 cada una y las trasladamos a la casilla del *5* en **c**), la ficha blanca que ya teníamos en esta casilla, queda juntada a las seis que llegan cambiando su color y se tienen 7 fichas en la casilla del *divisor 5* en **c**), que representan al *cociente* buscado. Podemos observar que siendo *5*, el valor real de cada ficha, las *7* fichas hacen un total de 37, por tanto la división está correcta.

Ejemplo 8. Sea: Dividir 35 : 7

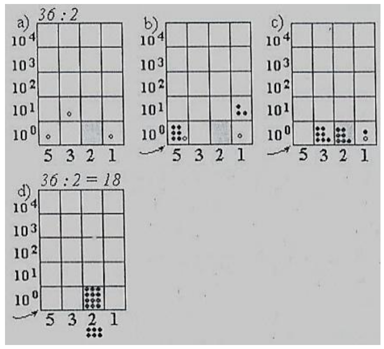


Dado que el divisor debe ocupar dos casillas, las mismas las tenemos sombreadas. Luego, procedemos a descomponer la ficha de la casilla del *30* en **a**), como en el ejemplo anterior y las trasladamos a la casilla del *10*, después las convertimos en 6 fichas de valor 5 y las llevamos a la casilla del *5* en **b**), Tomamos dos fichas de 5 y las descomponemos en fichas de 3 y 2 y las colocamos en las casillas correspondientes en **c**), finalmente las dos fichas de la casilla *3*, las convertimos en 3 fichas de valor 2 cada una y las colocamos en la casilla del *2* en **d**). Observando el tablero vemos que en ambas casillas sombreadas existe el mismo número de fichas que representan al cociente buscado y cuyos valores reales sumados nos da 35. Luego, la división se ha realizado correctamente.



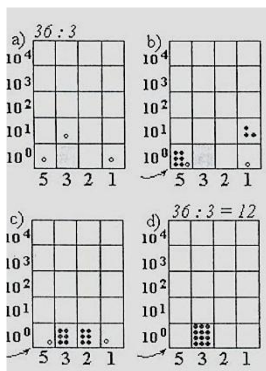
Veamos otros ejemplos en los que se justifica la necesidad de poseer un tablero auxiliar, mas, ante la falta de éste se colocan las fichas sobrantes fuera de la casilla que sirve para representar al cociente.

Ejemplo 9. Dividir 36 : 2



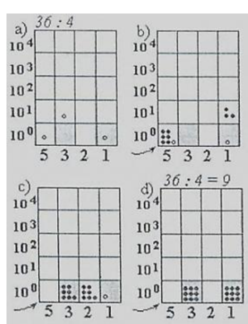
Ya conocemos los pasos **a**) y **b**) continuamos con las fichas de la casilla *5* y las descomponemos en valores de 3 y 2; por tanto tenemos a 7 fichas en esas casillas como indica **c**). Las fichas de la casilla *3*, las convertimos en número de fichas equivalentes para la casilla *2* y las colocamos en ella, lo mismo hacemos con las 2 fichas de la casilla *1* y las trasladamos a la casilla del *2*, como no entran en la casilla en **d**), las sobrantes colocamos debajo de ella y en total contamos 18 que viene a ser el *cociente* buscado.

Ejemplo 10. Sea dividir 36 : 3



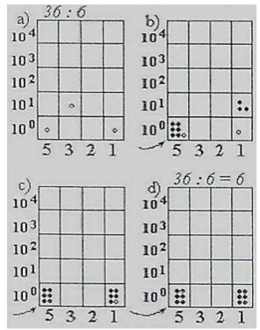
Los pasos **a**) y **b**) ya los conocemos, por tanto pasamos a descomponer las 6 fichas negras de la casilla *5* en fichas equivalentes de 3 y 2 y las colocamos donde corresponde en **c**), a continuación también tomamos las dos fichas blancas, una de la casilla *5* y otra de la *1 y* las reemplazamos por su valor de 6 con dos fichas de 3 y las colocamos en la casilla del *3* en **d**) y así completamos la operación. El *cociente* es 12. Y, 12 veces 3 es 36. Luego la operación es correcta.

Ejemplo 11. Dividir 36 : 4



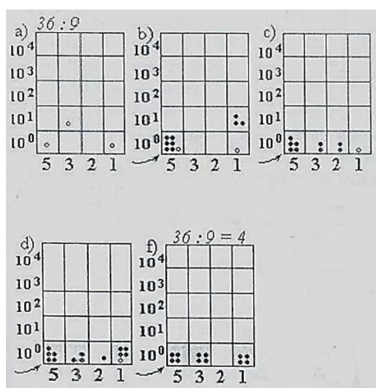
A diferencia de los dos ejemplos anteriores, el divisor 4 precisa de dos casillas las que hemos sombreado. Como los pasos de **a**) y **b**) ya los conocemos, pasamos a descomponer las 7 fichas de la casilla *5* en los valores de 3 y 2 en **c**), después, pasamos a distribuir las fichas de la casilla *2*, tomamos 3 de valor 2 de la casilla 2 y las regresamos a la casilla *3* convertidas en *2* fichas, las otras 4 fichas restantes las llevamos convertidas en 8 fichas a la casilla del *1* y se juntan a la ficha blanca que allí había y ahora tenemos a 9 fichas en cada casilla sombreada, por tanto ese es el número del *cociente.*

Ejemplo 12. Dividir 36 : 6



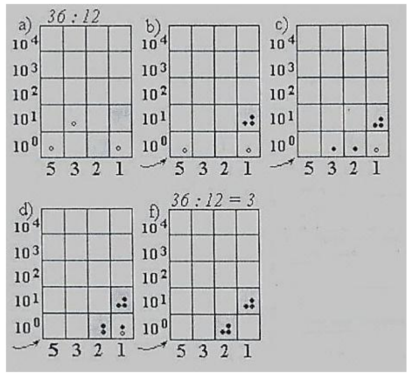
Obviando los tableros **a**) y **b**), tomamos la ficha blanca de la casilla *5* y La llevamos a convertida en *5* fichas a la casilla del *1* en **c**), luego, cambiamos de color, la ficha blanca, y tenemos *6* fichas negras cuyo número es el mismo a las de la casilla *5*. Por tanto. habiendo igual número de fichas en ambas casillas componentes del *divisor*, esas fichas representan el número del cociente buscado.

Ejemplo 13. Dividir 36 : 9



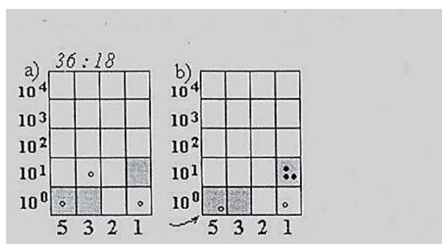
Dado que conocemos los pasos **a**) y **b**) iniciamos en **c**) tomando dos fichas de la casilla *5* y las convertimos en valores de 3 y 2 y las colocamos donde corresponde las 2 fichas de la casilla *2* las pasamos a la *1* en **d**) convertidas en 4 fichas. Nuevamente tomamos una ficha de la casilla *5* la convertimos en dos fichas de 2 y 3 y las colocamos donde corresponden. Levantamos la ficha blanca de la casilla *1* y la negra de la *2*, como, ambas equivalen a una de 3, colocamos una ficha en la casilla *3* en **f**). Ahora ya tenemos igual número de fichas en cada casilla sombreada, eso implica que la operación ha sido correcta.

Ejemplo 14. Dividir 36: 12

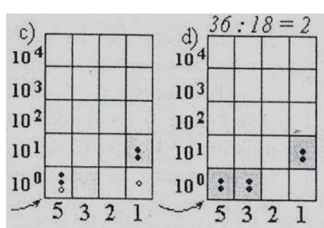


En esta operación el divisor tiene también dos cifras cuyo valor excede a 10, pero, no nos hacemos problema, pues ya sabemos como repartir las fichas en casillas que representan la sumatoria del divisor. La ficha tomada de la casilla del *30* la convertimos en 3 fichas de valor 10, luego pasamos a tomar la ficha blanca de la casilla del *5* y la descomponemos en los valores de 3 y 2 en **b**). La ficha de la casilla del *3* la descomponemos en los valores 2 y 1 y las colocamos respectivamente donde corresponden en **d**) Las 2 fichas de la casilla del *1* las convertimos en una de valor 2 y la pasamos a la casilla del 2, finalizando la operación, pues, ya tenemos las fichas del *cociente* en las casillas sombreadas que representan al *divisor.* 3 fichas que representan un 30 y 3 que representan un 6. Por tanto la división es correcta.

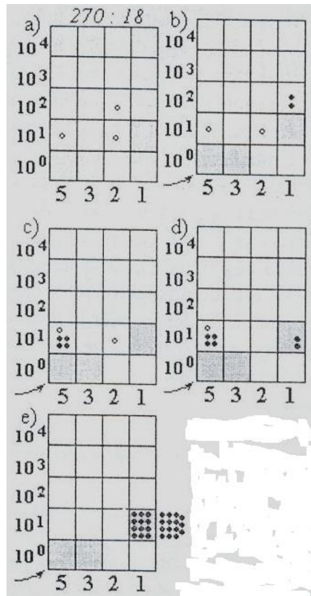
Ejemplo 15. Dividir 36 : 18



Ya conocemos cómo realizar lo indicado en **a**) y **b**), por ello pasamos una ficha de la casilla del 10 una ficha descompuesta en 2 fichas de 5 y las colocamos en la respectiva casilla en **c**). Tomamos las dos fichas blancas, una de la casilla *5* y otra de la *1* y las reemplazamos por su valor de 6 con dos fichas de 3 y las colocamos en la casilla del *3* en **d**). Las tres casillas sombreadas del *divisor* 18 tienen igual número de fichas, 2 en cada una, representando al número del *cociente.*



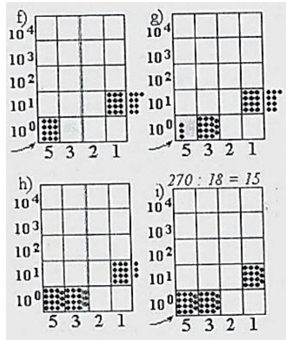
Ejemplo 16. Dividir 270 : 18



Este ejemplo tiene tres cifras en el *dividendo* y dos en el *divisor*.

Nuestra primera acción es marcar las casillas que serán las representantes de del *divisor*.

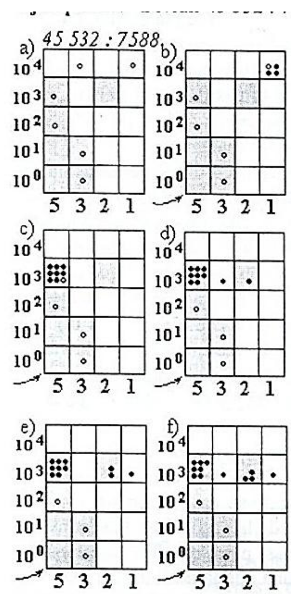
Tomamos la ficha de la casilla *200* de **a**) y la descomponemos en dos centenas que las colocamos en la casilla del *100* en **b**); Esas dos centenas las descomponemos en 4 cincuentenas y las llevamos a la casilla del *50* junto a la ficha existente en **c**), tomamos la ficha blanca de la casilla del *20* y la descomponemos n 2 decenas que las llevamos a la casilla del *10*, luego pasamos a tomar las 5 fichas de la casilla del 50 en **d**) y las descomponemos en 25 decenas que las llevamos a la casilla del *10* y las juntamos a las dos ya existentes en dicha casilla en **e**) se convierten en 27 decenas. Las fichas llegan a desbordar la casilla, razón por la cual, las 15 sobrantes las colocamos al lado de la misma. En seguida tomamos 6 fichas que equivalen a 6 decenas y las descomponemos en 12 fichas de 5 y las llevamos a la casilla del 5 en **f**), procedemos a tomar 9 fichas de 5 y las descomponemos en 15 fichas de valor 3 y las llevamos a la casilla del *3*, pero, descubrimos que la casilla del *10* aún tiene más fichas que la casilla del *5*, por tanto procedemos a tomar otra vez 6 fichas de las de la casilla del *10* y las llevamos descompuestas en 12 fichas para juntarlas a las 3 ya existentes en la casilla del *5* **h**). Una vez recontadas las fichas de todas las casillas comprobamos que en todas hay 15 en **i**), por lo tanto ha concluido la operación. Debemos hacer notar que en el proceso de igualación no siempre se toman las fichas de 6 en 6 como en este ejemplo, en realidad se comienza tomando una ficha y ésta se la descompone en valores equivalentes, pero, esa demostración nos hubiera obligado a usar muchos gráficos y además hacer parecer la operación como difícil y engorrosa. Sin embargo en la práctica se presenta lo que hicimos, pues debido a la experiencia que se adquiere en las equivalencias de los valores de las fichas se puede deducir cuantas fichas tomar para realizar la descomposición que permita encontrar el cociente buscado. Sin ánimo de ser reiterativos veamos una vez más esas equivalencias:



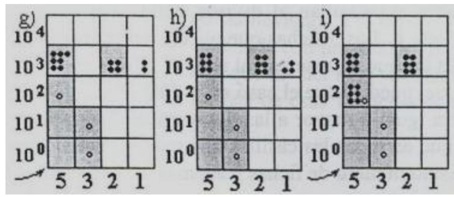
Una ficha de *10* = *2* de *5*; una de *5* = una de 3 y una de 2; una de *3* = una de 2 y una de 1, finalmente una de *2* = *2* de *uno*.

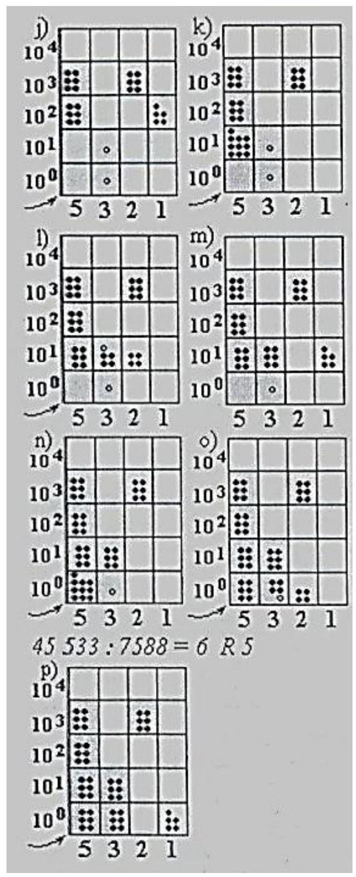
Todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora, están referidos a divisiones exactas, por lo tanto vamos a ver un ejemplo cuyo cociente no es exacto y además su número tiene más cifras en ambos términos.

Ejemplo 17. Dividir 45532 : 7588



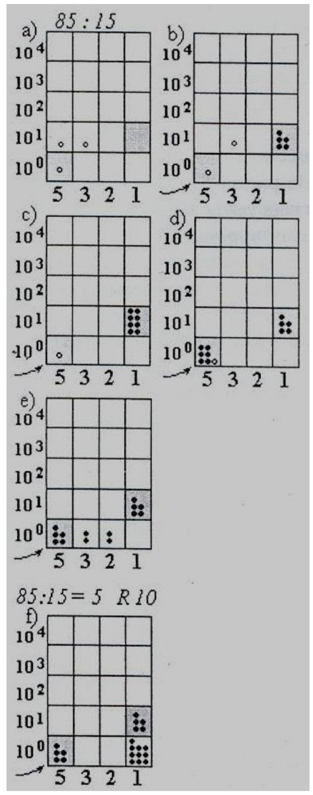
La ficha de la casilla del *30 000* de **a**) la descomponemos en 3 fichas de 10 000 y las llevamos a la casilla del *10 000* en **b**); esas 4 fichas las descomponemos en 8 de 5000 y las trasladamos junto a la otra de la casilla del *5 000* en **c**). La ficha blanca de dicha casilla la descomponemos en una de 3 y una de 2 en **d**), luego la de 3 pasa a ser una de 2 y una de 1 quedando dos fichas en la casilla del *2000* y una en la del *1000* en **e**); nuevamente tomamos una ficha de la casilla del *1000* y repetimos el paso **d**) y tenemos **f**), repetimos el paso **e**) y tenemos 4 fichas en 1a casilla del *2000* y 2 en la del *1000* en **g**). Como, al comparar el número de fichas de las casillas del *5000* y del *2000* no es igual, volvemos a tomar otra ficha de la casilla del *5000* y realizamos lo de los pasos en *d)* y *e)* lo que nos da **h**) Las 3 unidades de mil las descomponemos en 6 fichas de 500 que las colocamos en la casilla del *500* junto a la ficha existente en ella y tenemos 7 fichas de 500 en **i**). La ficha blanca las tomamos y la descomponemos en 5 centenas y la colocamos en la casilla del *100* en **j**). Esas centenas las convertimos en 10 fichas de 50 y las llevamos a la casilla del *50* en **k**) y de ellas tomamos 4 fichas las que las distribuimos en las casillas del *30* y del *20* en **l**), las 4 fichas de la casilla del *20*, las descomponemos en 8 decenas y de ellas dejamos 5 en las casillas del *10* y 3 decenas las convertimos en una ficha de 30 que la llevamos a aumentar las 5 existentes en esa casilla, como vemos en **m**). Las 5 fichas que quedaron en la casilla del *10*, las descomponemos en 10 fichas de 5 y las trasladamos a la casilla del *5* en **n**), de las 10 fichas tomamos 4 y las descomponemos en 4 de 3 y 4 de 2 colocándolas en las respectivas casillas en **o**), las 4 fichas de la casilla del 2 las convertimos en 8 fichas pero de ellas tomamos 3 y las convertimos en una que la trasladamos a la casilla del *3* para aumentar las 5 ya existentes quedando ahora 6 en esa casilla en **p**). Ahora tenemos el mismo número de fichas en todas las casillas sombreadas que representan al divisor siendo por tanto el *cociente* **6**. Las 5 fichas que quedan en la casilla del *1* son las que representan al residuo.





Debemos indicar que, puede darse el casó en el cual, el ***número de fichas restantes***, fuera igual o mayor a las del cociente, pero, por la regla establecida de que en todas las casillas que representan al divisor debe existir el mismo número de fichas y además, el valor real de las sobrantes deberá ser siempre menor que el *divisor*, al comprobar con 45 538 : 7588, veremos que nos da el mismo cociente pero un residuo de 8, ó 45 550 : 7588 = *6 R 22*. Sin embargo como una muestra real, verifiquemos con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 18. Dividir 85 : 15

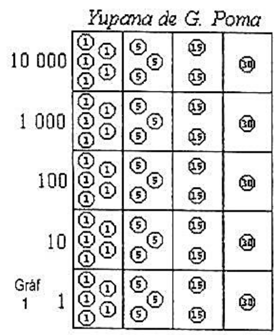


Tomamos la ficha de la casilla del *50* en **a**), la descomponemos en *5* decenas colocándolas en la casilla del *10* en **b**), seguidamente también tomamos la ficha de la casilla del *30* y la descomponemos en 3 decenas llevándolas a la casilla del *10* y juntándolas con las 5 anteriores en **c**). Aquí tenemos que razonar y ver cuántas fichas debemos llevar a la casilla del *5*. Si tomamos una decena al ser descompuesta serían dos 5, más, la ya existente en esa casilla, sólo tendríamos 3; si tomamos dos decenas equivalen a 4 fichas de 5, junto a la ya existente en la casilla del *5*, tendríamos 5 fichas, pero, este número de fichas sigue siendo menor que el de la casilla de las decenas, por consiguiente debemos tomar 3 decenas y descomponerlas en 6 fichas de 5 y juntarlas a la ya existente en la casilla del 5 en **d**). De esas 7 fichas tomamos 2 y las descomponemos en 2 de 3 y 2 de 2 en **e**) cuya suma de valores es 10, luego las llevamos a la casilla del *1* y la operación está concluida con un número mayor de fichas en el *residuo* que las del *cociente*. Debemos notar que el valor real de esas 10 fichas es menor que el valor del divisor.

LA YUPANA BOLIVIANA

A continuación presentamos la *yupana boliviana* Aunque sabemos que es una imitación de la peruana, recibe ese nombre debido a que el Ministerio de Educación Cultura y Deportes de Bolivia, lo ha puesto en vigencia en virtud de la Reforma Educativa para que sea un auxiliar del aprendizaje en el Ciclo de Aprendizajes Básicos C.A.B. de Primaria.

Esta *yupana* tiene un pequeño parecido con la *yupana* original de Guamán Poma, que analizamos en la página 53, decimos parecido, pues, aquí presentamos dos gráficos para ver la analogía o diferencia entre ambas "*yupanas*".

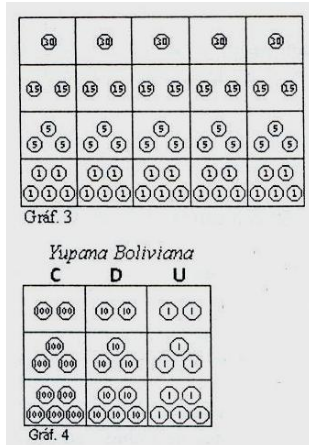


Gráf 1

10 000	10 000 x 5	50 000 x 3	150 000 x 2	300000
1 000	1 000 x 5	5 000 x 3	15 000 x 2	30000
100	100 x 5	500 x 3	1 500 x 2	3 000
10	10 x 5	50 x 3	150 x 2	300
1	1 x 5	5 x 3	15 x 2	30

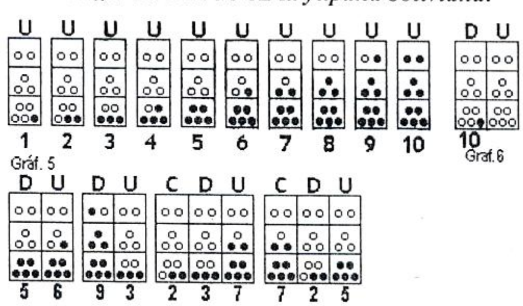
Graf. 2

En el Graf. 1, vemos que la Yupana de Guamán Poma es una matriz de 4 x 5 donde en la primera fila, la primera casilla tiene 5 huecos o círculos y cada uno equivale a una unidad, luego, el valor es de 5 unidades; en la segunda cada uno de los 3 círculos equivale a 5 unidades haciendo un total de 15 unidades, en la tercera se tiene dos círculos y cada uno equivale a 15 unidades haciendo un total de 30 unidades; en la cuarta se tiene un solo círculo que equivale a 30 unidades. En las siguientes filas el contenido del número de círculos se multiplica por 10, 100, 1000 y 10 000 respectivamente, tal como nos muestra el Graf. 2.



Sin embargo tal cual lo vimos en la página 57, para anotar un número de dos cifras, lo más que se puede ocupar, son las dos primeras filas, colocando este tablero en forma horizontal, haciendo que los 5 círculos queden en la primera fila de abajo hacia arriba como lo indica el Graf. 3. De donde se desprende el formato de la *yupana boliviana* padronizada por el Min. Educ. toman do en cuenta sólo las tres primeras filas haciendo un total de 10 círculos en cada columna, como lo muestra el *Yupana Boliviana* Graf. 4. Esto implica que, para representar cualquier dígito de 1 al 9 basta llenar uno cualquiera de los círculos de la primera columna, preferentemente, empezando, par el primero de la parte menor derecha (Graf. 5), los cuales al llenarse formarían la unidad del orden inmediato superior, en este caso las 10 unidades forman una decena, del mismo modo al llenarse las diez 10 decenas forman una centena y 10 centenas forman una unidad de mil, así sucesivamente según sea el número de cifras del número resultante después de utilizar en una operación de adición.

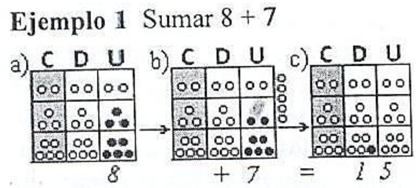
Numerales de 1 al 10 en la *yupana boliviana*.



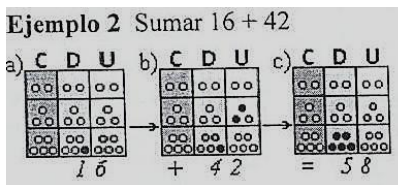
Se puede apreciar claramente que la representación es muy simple, pues bastará colocar un grano en el círculo vacío respectivamente según sea el número a ser representado. Una vez llenos los diez círculos, tomar un nuevo círculo de la columna de las decenas y comenzar a marcar tal como lo indica el Graf. 6. Luego, para cualquiera de los números dependiendo del número de las cifras se podrá usar dos o más columnas. Ver los ejemplos.

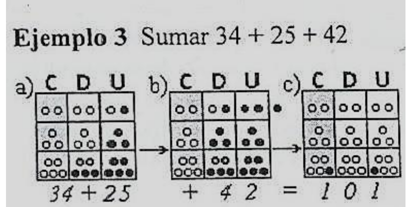
Si bien resulta fácil representar cantidades vemos a continuación como se pueden realizar operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división.

MODELOS DE ADICIÓN



Se colocan las 8 fichas del primer *sumando* en la columna de las **unidades** en **a**), luego se continua con el siguiente ***sumando*** *7,* pero nos sobran 5 fichas, porque ya se llenó la columna de la **unidades** en **b**), entonces, esas 10 fichas las convertimos en una sola de valor *10*, o sea una decena y la colocamos en la columna de las **decenas** en **c**) y se tiene *15*. Por razones didácticas hemos usado dos colores de fichas para diferenciar los sumandos y ver el proceso gráficamente, pues, en la práctica, no hace falta diferenciar los sumandos, pero, las unidades de las decenas, sí. Los colores y el tamaño de las fichas para unidades, decenas, centenas, etc., resultan de un acuerdo convencional



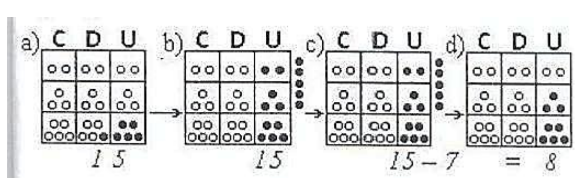


Como en el ejemplo anterior comenzamos colocando las fichas del primer *sumando* 16 en las correspondientes columnas de las **unidades** y las **decenas** en **a**), luego pasamos a colocar el siguiente *sumando* en **b**) y tenemos 58, lo que muestra **c**).

El tablero **a**) muestra la colocación de los dos primeros *sumandos* 34 + 25. En el **b**) tenemos más el tercer *sumando* 42 y como las fichas de las **unidades** desbordan la columna se toman 10 y se las convierte en una **decena**, la misma que se pasa a la columna de las **decenas**. Pero, esta columna, también se llena, por lo tanto se coloca una ficha equivalente a **10 decenas** en la columna de las **centenas** y se tiene el resultado final *101*.

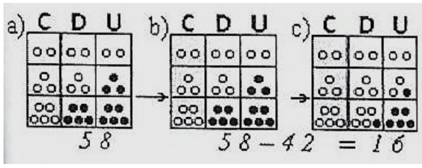
MODELOS DE SUSTRACCIÓN

Ejemplo 1 15 -7



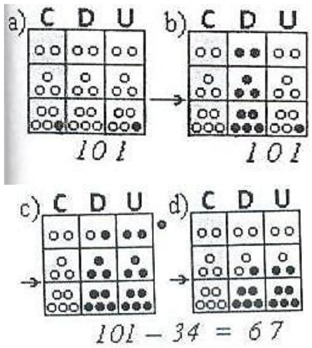
Para realizar esta sustracción, la **decena de** a) primero la descomponemos en 10 unidades que se juntan a las otras 5 de la **columna** de las **unidades** para tener las fichas *minuendo*, pero, como la columna de las unidades ha sido desbordada, se colocan las fichas sobrantes fuera de ella en **b**), luego cambiamos el color de las 7 fichas *sustraendo* en **c**) y, procedemos a retirarlas y obtenemos el resultado o *diferencia* 8 en **d**).

Ejemplo 2 58 – 42



Comparando este este ejemplo con el anterior, luego de determinar el *minuendo* 58 en **a**), vemos que fue más fácil cambiar de color a las fichas que representan al *sustraendo* 42 en **b**) y, proceder a retirarlas en **c**), obteniendo de ese modo la *diferencia* 16.

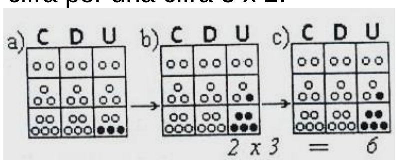
Ejemplo 3 101 - 34



El valor de la **centena** representado en **a**) lo descomponemos en 10 **decenas** y las llevamos a la columna de las **decenas** en **b**) luego tomamos una **decena** y la descomponemos en 10 **unidades** y las llevamos a la columna de la **unidades**, desbordando la columna, el excedente se coloca fuera de ella y presentamos así, el *minuendo*; cambiamos de color las fichas del *sustraendo* en **c**) y se procede a quitar las mismas, con lo que se tiene la diferencia 67 en **d**).

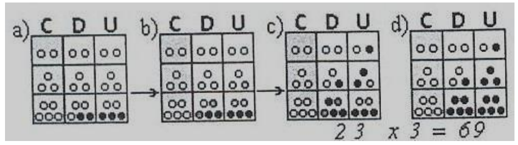
MODELOS DE MULTIPLICACIÓN

Ejemplo 1 Multiplicación de una cifra por una cifra 3 x 2.



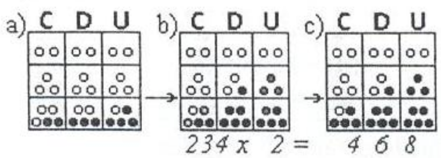
Para realizar la multiplicación de una cifra por una se coloca el número de fichas del *multiplicando* 3 en **a**) y **b**), tantas veces como sumando, tal cual lo indica el *multiplicador* 2, luego, el producto resulta del total de fichas colocadas en **c**). Como en otros algoritmos por razones didácticas hemos usado dos colores de fichas para apreciar más gráficamente el proceso, pues, en la práctica todas las fichas pueden ser de un solo color por cada columna.

Ejemplo 2 23 x 3



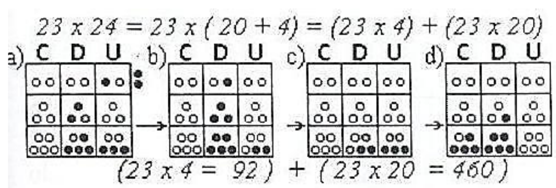
Igual que en los ejemplos precedentes basta repetir el *multiplicando* tantas veces como lo indica el *multiplicador*, como en este caso el multiplicador es 3, por ello tenemos en una vez en **a**), 2 veces en **b**), 3 veces en **c**), finalmente esta última acción determina la operación final y tenemos el producto en **d**), con fichas de un solo color para las unidades y de otro color para las decenas.

Ejemplo 3 234 x 2

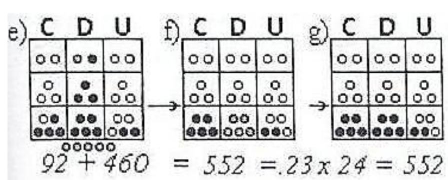


En este ejemplo hemos seguido los mismos pasos que en el ejemplo anterior, por tanto, es difícil multiplicar por una sola cifra.

Ejemplo 4 23 x 24



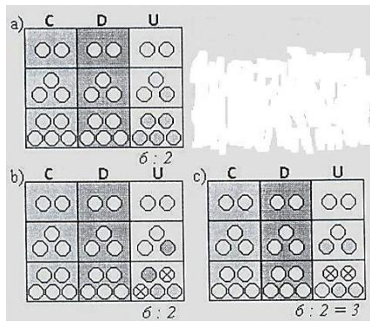
En este ejemplo tenemos una multiplicación de dos por dos cifras. Para realizar la operación utilizamos la descomposición polinómica en el *multiplicador* y luego procedemos a multiplicar tal como sabemos En **a**) y **b**) tenemos el producto parcial de 23 x 4 = 92. En **c**) y **d**), hemos realizado dos operaciones, como *20 es igual a 2* x *10,* primero hemos multiplicado *23 x 2* repitiendo el 23 dos veces en **c**) y luego por 10, para ello ha sido suficiente recorrer la cantidad anterior una posición hacia la izquierda y hemos obtenido el otro producto parcial de *460* en **d**). Procedemos a sumar los dos productos parciales en **e**), como las fichas de las **decenas** han desbordado esa columna, las fichas sobrantes las colocamos afuera. Las 10 **decenas** las convertimos en una **centena** y la colocamos en esa columna en **f**) y tenemos el *producto total* en **g**).



Al operar con números de mayor cantidad de cifras en las que harán centenas, unidades de mil, decenas de mil, etc. Se procede como en el ejemplo anterior, primero multiplicando por el dígito indicado y luego recorriendo uno, dos, tres, etc., lugares hacia la izquierda según sea por 10, 100, 1000, etc., respectivamente.

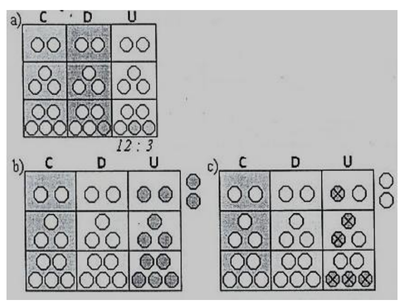
MODELOS DE DIVISIÓN

Ejemplo 1   6 : 2



Por razones didácticas en el uso del color hemos aumentado el tamaño de los gráficos. Las 6 fichas que están representadas en **a**), se recuentan de 2 en 2 como en **b**), marcando cada par de fichas con un color hasta que no quede ninguna. Luego se cuentan cuántos grupos de 2 fichas se han formado y, vemos que se formaron 3 grupos de 2 fichas. Por tanto dividir 6 : 2 es 3. Como se indica en **c**).

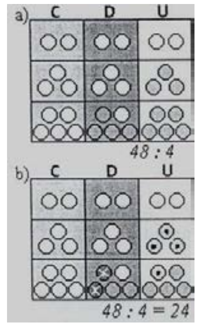
Ejemplo 2   12 : 4.



Para efectuar esta división, en primer lugar tenemos que descomponer la decena en 10 **unidades** y llevarlas a la respectiva casilla en **b**). Como ellas han desbordado la columna, las sobrantes se las coloca fuera. Luego procedemos como en el anterior a recontar de 3 en 3 fichas y darles un color de modo que se note cada grupo en **c**) y tenemos 12 : 3 = 4.

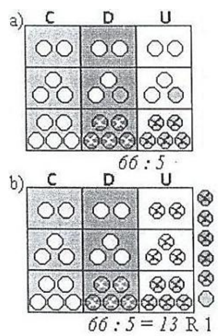
Observación.- En este ejemplo se ve fácil realizar la división por descomposición de la decena sin embargo si se tratara de un número mayor como por ejemplo 38 : 2, el desborde de las fichas en la columna de las unidades sería tal, que daría lugar a una confusión y la operación habría que realizarla en otro lugar o creando casillas auxiliares, salvo que se trabaje siempre que sea posible, como lo indica el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 48 : 4.



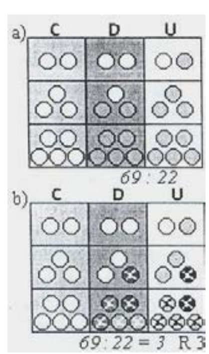
Tenemos las fichas de las *4* **decenas** en un color y las *8* **unidades** en otro. Observamos que en ambas columnas hay un número par de fichas además que, las podemos agrupar de a cuatro como lo indica el *divisor*. Para hacerlo notar gráficamente cambiamos de color dos fichas de las **decenas** y cuatro de las **unidades** y obtenemos **2 grupos de decenas** con *2* fichas y **2 grupos de unidades** con *4* fichas luego vemos en **b**) que el resultado o *cociente* de 48 : 4 es **24.**

Ejemplo 4 66 : 5



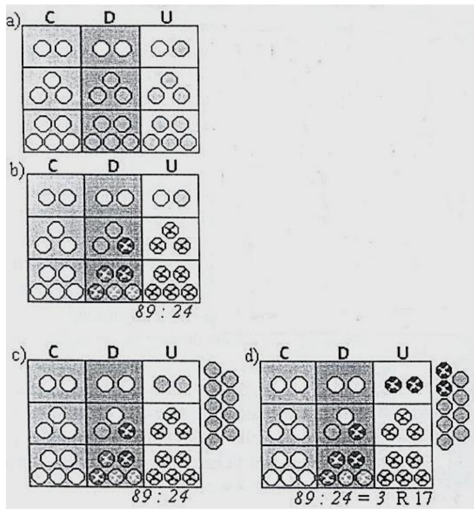
En este ejemplo, también ambas cifras del *dividendo* son pares. Si procedemos como en el ejemplo anterior tenemos **a**), pero, vemos que sobra una ficha en las **decenas** y otra en las **unidades**, equivalente a un *residuo* de *11,* indicando que ese valor es mayor que el *divisor,* luego debemos descomponer la **decena** y llevar esas fichas a la columna de las **unidades** en **b**), que desbordan la columna, formamos más grupos de 5 y obtenemos *1* grupo en las **decenas** y 3 en las **decenas** y 3 en las **unidades** nos sobra una ficha como residuo. En consecuencia 66:5 =*13* R1.

Ejemplo 5 66 : 22



En este ejemplo tenemos también cifras pares en las **decenas** y **unidades** del *dividendo* en **a**), pero, además son iguales. Procedemos como en el ejemplo anterior tomando 2 fichas de las **decenas** y 2 de la **unidades**, marcando con colores diferentes para que se distingan de las fichas de la proposición inicial y conseguimos 3 grupos en las **decenas** y 3 grupos en las **unidades**. Quedando sin agrupar 3 fichas en las **unidades**, las que resultan ser las fichas del *residuo*. Luego, 69 : 22 = 3 R 3.

Ejemplo 6 89 : 24



En este ejemplo tanto las fichas de las **decenas** como las de las **unidades** ya no son pares ambas. Sin embargo procedemos como en el caso anterior tomando 2 fichas de las **decenas** y 4 fichas de las **unidades**. Pero conseguimos agrupar sólo 2 grupos de 24 y nos quedan 2 **decenas** y una **unidad**. Por tanto, tomamos una **decena** y la descomponemos en 10 **unidades** y las llevamos a la columna de las **unidades**. Como ya teníamos dos decenas marcadas, agrupamos 4 fichas de las **unidades** y tenemos 3 grupos de 24 y sobra una **decena** y siete **unidades**. Por tanto. 89 : 24 = 3 con residuo de 17.

Podríamos seguir dando más ejemplos para realizar la operación de división con la ***YUPANA*** boliviana, haciendo notar la poca practicidad de la misma, como coadyuvante del aprendizaje de la Matemática, sin embargo nos abstenemos por las razones que hacemos notar más adelante en la "conclusión"

CONCLUSIÓN

Somos conscientes de que el trabajo que acabamos de presentar no es perfecto, pero, perfectible. Ese perfeccionamiento se dará en la medida en que, los colegas o personas que lo lean nos hagan llegar sus críticas constructivas, especialmente para mejorar el uso de la ***YUPANA*** como el instrumento más barato de fácil construcción y de múltiple aplicación. Pues, a los cinco algoritmos que ya conocemos pretendemos descubrir el de la *radicación*. Algoritmo que se convierte en un desafío muy particular y esperamos muy pronto poder darlo a conocer a quienes nos siguen en nuestro afán.

De igual modo consideramos que los diferentes modelos presentados para las operaciones, pero, sobre todo para la *división*, posiblemente, no sean los suficientes y quizá se precisen de otros más explícitos, sin embargo, pensamos, que silo hiciéramos así, tomando en cuenta ese criterio, estaríamos limitando la satisfacción de descubrir y aprender nuevas técnicas a quienes ingresen en ese maravilloso mundo de la construcción del aprendizaje, a partir de la propia iniciativa.

Para tener siempre una *Yupana* a la mano que pueda ser llevada a cualquier lugar, la misma se la puede construir apenas con 45 palitos de fósforos colados a una hoja de papel bond oficio formando un casillero de 20 cuadritos de 4 x 5, todos iguales de tamaño de los palitos de fósforos. Y, en lugar de fichas, se pueden utilizar los mismos palitos partidos por la mitad, quedando una cantidad con la cabecita negra y otra simplemente palitos. Esto para diferenciarlos en el momento de utilizarlos, ya sea, en la operación de sustracción o división como lo vimos en los respectivos modelos.

Queremos resaltar de modo especial, la invalorable ayuda que nos presto el Dr. Juan Ansión en nuestras consultas a través de la internet. Y por haber tomado nota de sus apuntes de la coletanea publicada por el "Consejo de Ciencia y Tecnología del Perú. CONCYTEC"

Finalmente, nuestra gratitud a todos quienes de uno u otro modo nos insuflaron el valor para dar a la luz este ensayo que en un principio estaba destinado a ser apenas un resumen de apuntes destinado al uso de la yupana, que sin embargo, se tuvo que ver aunque sea de modo rápido al quipu como el disco duro del computador incaico.

BIBLIOGRAFÍA

Aitken Soux, Percy y Faustino Ccama, "*Abaco andino, instrumento andino ancestral de cómputo*" Seminario internacional de Kipus y Kipucamayos, Lima, 1988.

Ansion, Juan, "*Cómo calculaban los incas*" Seminario internacional de Kipus y Kipucamayos, Lima, 1988.

Ascher, Marcia y Robert, “*Mathematics of the Incas -Code of the Quipu*" Dover Publication Inc. Mineola N. Y. 1997.

Colección de escritos: "*Quipu y Yupana*"

Andres R. Altieri, Juan Ansión, Marcia Ascher, Alberto Bueno Mendoza, Faustino Ccama, William J. Conklin, Olaf Holm, L. Leland Locke, Carol Mackey, Oscar Núñez del Prado, Erland Nordenskiöl, Hugo Pereyra Sánchez, Jacque Perret, Franklin Pease G. Y., Carlos Radicati di Primeglio, María Rostworowsky, Arturo Díaz Estrada. Froilán Soto Flores, Max Uhle, Henry Wassén. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología - CONCYTEC Paseo de la República 3505. San Isidro Lima Perú.

Conklin, William J. "*El sistema informativo de los quipus del horizonte medio*" Traducción de Hugo Pereyra del Título original "The information system of the midle horizon quipus" En Annals of the New York Academy of Sciences. N.Y. 1982,

Closs, Michael P. "NATIVE AMERICAN MATEMATICS" Univertsity of Texas Press, Austin 1996.

Guamán Poma de Ayala, Felipe, "*Nueua Coronica y Buen Gobierno*" Institut d'Ethnologie, Universite de Paris, Paris, 1936.

Locke, L, Leland, "*The Ancient Quipu of peruvian Knot Record*" En American Museum of Natural History, N. Y. 1923.

Nordenskiöld, Erland "*Calculations with years and monts in the peruvian quipus*" Comparative Ethnografical Studies VI: 2) 1931.

Núñez del Prado, Oscar, "*El Quipu Moderno*" Tradición Revista peruana de Cultura Mayo Diciembre 1951 p. 50 Cusco - Perú.

Pacheco Ríos, Oscar, "*Ethnogeometría para la Etnomatemática*" Editorial CEPDI. 1996. Santa Cruz Bolivia.

Pacheco Ríos, Oscar, "*Glosario Quechua de Matemática*" Editorial- CEPDI. 1997. Santa Cruz Bolivia.

Pereyra Sánchez, Hugo, "*La Yupana, complemento operacional del quipu*" Seminario internacional de Kipus y Kipucamayos, Lima, 1988.

Porras Barrenechea, Raúl. "*El cronista indio Felipe Huamán Poma de Ayala*". Editorial Lumen. Lima - Perú 1948.

Radicati di Primeglio. Carlos. *"El sistema contable de los Incas*" Librería Stadium, Lima - Peru 1979
Valdivia Gutierres, Oscar. "*Matemáticas en el mundo andino y meoamericano*", Seminario internacional de Kipus y Kipucamayos, Lima, 1988.

Velasco, Juan de, "*Historia del Reino de Quito*". 1841-1844, Quito 1989.

Wassén, Henry. "*The ancient peruvian abacus*". Comparative Ethnographical Studies, V .9, E. Nordenskiöld (ed.),Goteborg 1931

Wassén, Henry. "*El antiguo ábaco peruano según el manuscrito de Guamán Poma*". Ethnologista Studier, Goteborg 1941