VOLUMEN II **<u>SEGUNDO GRADO DE INSTRUCCIÓN</u>**

DÉCIMA-QUINTA LECCIÓN

De los números arábigos

§ 1

Hijos míos: estando imbuídos, como lo estáis, en los principios explicados en las catorce Lecciones precedentes, puede decirse que habéis desatado el nudo principal de la Aritmética, pues todos los demás misterios que ella encierra, se explican por las cuatro operaciones que habéis practicado: *sumar, resta, multiplicar* y *dividir.*

150. Mas, antes de abordar esas cuestiones subalternas, por decirlo así, voy á hablaros de una importantísima invención debida á los árabes, según la creencia general, pero que, según el historiador Cantú, fué invención de los Indios orientales, y que tanto ha contribuido al progreso de las artes y las ciencias: hablo de las cifras llamadas comúnmente *números,* que vosotros los conocisteis en la escuela de primeras letras; pero que, sin embargo, se hace necesario reproducirlos en nuestra pizarra para mejor entendernos [ ].

O, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, 9.
cero, uno, dos, tres, cuatro cinco seis siete ocho, nueve.

La novedad (si puedo expresarme así) de la presente Lección consiste, pues, en que vamos á reemplazar con esas *cifras* nuestras *hormillas* y *cajitas;* y también nuestro *armario,* con el *papel rayado* que emplean los comerciantes y todas las personas que llevan libros ó cuadernos de cuentas.

151. Suponiendo que las líneas horizontales y verticales del papel rayado representan las separaciones verticales y horizontales del armario, y, por esta sola suposición, los *espacios* contenidos entre las líneas del papel rayado representarán también las *casillas* del armario.

Esto sentado, vosotros podéis, por vosotros solos, hacer en el papel rayado todas las demostraciones y operaciones que hemos efectuado en nuestro armario tocante á la *numeración, adición, substracción, multiplicación* y d*ivisión.*

Creo necesario, sin embargo, haceros ciertas advertencias.

152. *Primera.- La* función del *cero* se reduce á señalar, en el papel, las casillas vacías de nuestro armario, siempre que sea menester. Ya os diré algo más sobre el particular oportunamente.

153. *Segunda.- Los* rangos de las *unidades, decenas* y *centenas* no se hallan marcados en el papel rayado; tampoco las *jerarquías,* pero estas faltas las suple uno con el pensamiento.

154. *Tercera.- A* falta de papel rayado, ó siempre que se hace necesario efectuar una operación auxiliar en papel común, se tiene el cuidado de poner las cantidades inferiores de tal modo, que las cifras de un mismo rango vengan á quedar sobre una línea vertical, imaginaria; es decir, que las *unidades, decenas* y *centenas* de un sumando (por ejemplo) han de escribirse exactamente debajo de las *unidades, decenas* y *centenas,* respectivamente, del sumando ó sumandos superiores.

155. *Cuarta.- Para* enunciar una cantidad escrita en papel común y que contenga muchas cifras, se la divide desde luego, al menos mentalmente, en secciones de á tres cifras, comenzando por la derecha, salvo el caso de tener que dejar solamente una ó dos cifras en la última sección de la izquierda. Se enuncia en seguida, comenzando por la izquierda,

sucesivamente cada sección, como si estuviese sola, y dando á cada una el nombre de la jerarquía á que pertenece.

EJEMPLO

81 564 732

156. Se enuncia: ochenta y un *millones,* quinientos sesenta y cuatro *mil,* setecientos treinta y dos.

157. *Quinta.- Aquí* es del caso hacer notar una diferencia esencial que existe entre la enumeración española y la enumeración francesa. Desde las unidades simples hasta las *centenas de millón,* están ambas conformes; mas, pasando de este último rango, ya difieren. En efecto:-

158. Los españoles enumeran unidades, decenas y centenas *de mil* de millones, para de ahí pasar á enumerar los *billones;* mientras que los franceses, pasando del rango de las *centenas de millón,* empiezan ya á enumerar *billones;* tal que, para los primeros, la unidad de billón ocupa el *décimo-tercio* rango, en tanto que, para los segundos, está esa unidad en el *décimo* rango; siendo de advertir que lo mismo sucede con los trillones. cuatrillones., etc.

159. Los franceses han dado á su sistema el calificativo de *ternario,* en razón de que cada *tres* rangos son designados con distinta denominación; y lo hemos preferido, porque esa denominación corresponde exactamente á la estructura de los dedos, que nos sirvieron al principio como de llave para abrir el área de la Aritmética (nuestro Armario). En efecto: sin más auxilio que el de las yemas de los dedos *(Primer* orden de falanges), fuimos formando colecciones de á diez *unidades;* estas colecciones las apuntamos, sucesivamente, en el *segundo* orden de falanges de nuestros dedos, dándoles el nombre de *decenas;* y, por fin, formando colecciones de decenas, las señalamos en el *tercer* orden de falanges. Para seguir adelante, es decir, para formar colecciones de *á mil,* nos servimos siempre de los mismos *tres* órdenes de falanges, con sólo cambiar el color de las señales… (Ya veis, hijos míos, que el *sistema ternario* de los franceses tiene, por lo menos, el mérito de estar basado en la naturaleza de los dedos de las manos, que desde los tiempos más remotos hasta nuestros días, son la cartilla en que se adquieren las primeras nociones de la *Ciencia* de *los números).*

Ahora, sin perjuicio de otras advertencias que tengo de haceros en el curso de la presente Lección, voy á daros aquí algunos modelos para serviros de las cifras arábigas en cada una de las cuatro operaciones que hemos practicado en el Armario.

Para mayor satisfacción vuestra quiero tomar las mismas cuestiones *ó* problemas que hemos resuelto en el Armario.

ADICIÓN		SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN	
Sumandos	249	*Restando.* = 628	Multiplicando = 926	*Dividendo* = 7408	8 = divisor
	106	Restador.. = 379	Multiplicador = 8	72	926 *cociente*
	85			20	
	72	*Resta.* = 249	48	16	
	66		16	48	
	50		72	48	
Suma =	628		*Producto..* = 7408	0	

160 *bis.* La sustracción puede servir de prueba á la adición.

EJEMPLO:

Adición		Prueba por la sustracción
	354	*restando*…… 490
	136	*restador*……. 136
	-------	--------
Suma =	490	*resto*………. 354

Es decir que, tomando como *restando* la suma, y como *restador* uno de los sumandos, debe encontrarse en el *resto* el otro sumando.

160 *ter.* Sucede á *veces,* en la práctica, que el restando viene á quedar debajo del restador, en cuyo caso hay que hacer la sustracción invirtiendo el orden, esto es, deduciendo cada cifra del número superior, de la respectiva cifra del número inferior, como ha de verse adelante.

160 *cuart.* Cuando sean muchos los sumandos, se tomará uno de ellos como *primer sumando* y, como *segundo,* la suma de los demás sumandos, según se ve en el primero de los ejemplos precedentes *(art.* 160).

161. *Sexta advertencia.*- En la práctica, tratándose de hacer una división, omiten, generalmente, escribir al pie de cada dividendo parcial el correspondiente restador, y ejecutan á la vez, y de memoria, la multiplicación y sustracción. Así, en la división que antecede, se dice y se procede como sigue:………………………………
«74 (centenas) *entre 8, caben* á 9 (centenas);
«*pongo* 9 (en el cociente); 9 veces S *son* 72, á 74
«*van* 2 (centenas), *que las pongo* (debajo del 4)
«*y llevo* 7; á 7 *pago. Bajo el 0*, *y tengo* 20 (de-
«cenas); 20 *entre 8 á 2* (decenas), *que las pongo*
«(en el cociente); 2 veces 8 *son* 16, *á* 20 *van* 4,
«*que los pongo* (debajo del 0 del segundo dividendo par-
«cial) *y llevo* 2; á 2 *pago, Bajo el* 8, *y tengo* 48 (unidades).
«48 *entre* 8 á 6 (unidades), *que las pongo* (en el cociente);
«Ahora; 6 veces 8 *son* 48, á 8 *pago; pongo 0* (debajo del 8)
«*y llevo* 4; á 4 *pago, y nada pongo* (*). He terminado».

7408	8
.	926
.	
20	
.	
.	
.	
48	
.	
0	

[Nota.- En la Advertencia que precede, se han marcado con letra cursiva los términos técnicos que la División emplea].

161 *bis,* Según lo expuesto en los artículos precedentes (160 y 161), se puede establecer que *hay dos modos de efectuar una división de números enteros:* 1°, como se ha hecho en el ejemplo del art. 160, y que puede llamarse *división ordinaria; 2°,* como se ha practicado en el art. 161, y que podemos llamar *división abreviada.*

162, *Séptima advertencia.*- Los ingleses prefieren casi siempre hacer la división ordinaria, en vez de esta última (que podríamos llamarla *división abreviada),* porque aquélla es menos expuesta á equivocaciones, aparte de que, si la prueba (esto es, la multiplicación del divisor por el cociente) acusa algún error, puede uno presumir aproximativamente dónde de halla, comparando los *restadores* parciales de la división con los *productos* parciales de la prueba por multiplicación.

163, *Octava.*- En el *art.* 58 se estableció, como regla, que podía aumentarse una *ó* más unidades al restando, en cualquier *orden,* con tal de que se haga igual aumento al restador. Fundados en ese principio es que, en la precedente *división abreviada,* después de haber tomado las 7 unidades de mil para trasladarlas momentáneamente, con el pensamiento, á la casilla de centenas, hicimos prescindencia de este préstamo, y consideramos el 7 como

----
(*) Pues basta con un cero para expresar que *nada* ha quedado del dividendo.

existente en su lugar; mas, como en seguida hemos *llevado* 7 á la correspondiente casilla del restador, ha quedado, con esto compensado el aumento hecho en el restando. (Lo mismo ha sucedido en las subsiguientes operaciones de la división que hemos hecho).

164. *Novena.-* Aunque al efectuar una multiplicación, se usa indistintamente, en la práctica, de las palabras *vez ó por,* en rigor se debería emplear la palabra *vez* cuando se quiere nombrar primero la cifra del multiplicador; y la palabra *por* (que es un modo abreviado de decir *multiplicado por),* cuando se ha empezado nombrando la cifra del multiplicando.

Ejemplo:
```
 926
 x 8
 ----
```

Hay que decir «8 v*eces 6»,* y no *8 por* 6.
" " " «6 por 8», y no 6 veces 8.
Décima.- Sobre el valor del *cero.*

165. Su función, como se insinuó en el *art.* 152, se reduce á reemplazar, en el papel, las casillas vacías del Armario, en cualquiera operación aritmética. Todos los tratadistas están de acuerdo en que el *cero,* puesto á la izquierda de un número cualquiera, nada vale; pero que, puesto á la derecha, hace diez veces mayor el número á que se le ha agregado; y no faltan preceptores de aldea que afirmen que el 0 á la derecha vale *diez.* A mi modo de ver, sea que el *cero* esté á la izquierda, á la derecha ó al centro, vale tanto como cualquiera casilla vacía del Armario, esto es, que nada vale. Prueba de ello es que, cuando en la multiplicación se dice «0 *veces* 1.(2, 3…….9), ó 1(2, 3…… 9) *por 0»,* cualquiera que sea el lugar que ocupe el *cero,* sea en el multiplicando, sea en el multiplicador, da por producto *nada)* porque ese es su intrínseco valor.

166. Para poner en relieve el despropósito de dar al *cero* el valor de *diez,* tomemos como ejemplo el número 20. .

Si el *0* vale *diez,* ¿qué valdrá la cifra 2?

Si se le da el valor de dos *unidades)* resultará 2 + 10 = 12, y si se le da el valor de dos *decenas,* resultará 20+ 10= 30.

Aquí es del caso hacer notar que, una vez que se halle determinado *el rango* de las unidades *simples,* aunque se agregue un *cero* á la derecha, éste no aumentará el valor de la cantidad á que se le agregue, como lo palpáremos al tratar de las fracciones decimales. Otra cosa será cuando, por efecto de una multiplicación por *diez,* hayan de avanzar las *unidades simples* al rango de; las decenas; las decenas al de centenas, *etc.*

Undécima.- Ya que he tocado la cuestión *de multiplicar por diez)* voy á daros algunas reglas para obtener el producto de la multiplicación de un número cualquiera *por diez, por ciento, por mil,* etc., sin efectuar la multiplicación.-

EJEMPLOS

167

```
1º    25X10          2º    25X100           3º    25X1000
         25                   25                      25
         10                  100                    1000
      -----                -----                --------
Operación: 00        Operación: 00                    00
         25                   00          Operación:  00
Producto= 250                 25                      00
                     Producto= 250                    25
                                          Producto= 25000
```

168. Según se ve, la multiplicación *por diez* da como producto un número cuyas cifras significativas son las mismas del multiplicando, con la diferencia notable de que, en el primer ejemplo, las unidades del multiplicando han pasado á ocupar el rango de decenas, y las decenas el rango de centenas; que, en el segundo ejemplo, las unidades han avanzado hasta el rango de centenas, y las decenas hasta el de miles; que, por último, en el tercer ejemplo, las unidades han llegado á colocarse en el rango de miles, y las decenas en el de decenas de mil… Siendo ahora evidente que el cambio de rango tiene que estar en relación con el número de *ceros* del multiplicador, fluye de ahí la siguiente regla:

169. *Cuando el multiplicador es la unidad seguida de uno ó más ceros, el producto contendrá las mismas cifras del multiplicando, seguidas de tantos ceros cuantos haya en el multiplicador; y será igual número de veces tan grande como el multiplicando.*

Nota.- Esta regla no está en contradicción con la doctrina establecida en la *Décima advertencia,* como vamos á demostrarlo.

170. Si es permitido que en una *operación auxiliar,* ó tratándose de una cantidad aislada, se coloque á la derecha uno ó más ceros, es porque, en estos casos, no estando determinado de una manera fija el orden de las unidades simples, puede uno tomarse la libertad, en vez de hacer avanzar hacia la izquierda el multiplicando, dejarlo en su lugar, marcando con uno ó más ceros el orden de las unidades simples, que es el punto de partida para haber de valorar los demás órdenes.

Mas, cuando ese punto de partida está ya fijado de antemano, el aumento de uno ó más ceros á una cantidad sería de ningún valor, ó, mejor dicho, inadmisible.

EJEMPLOS

171.

Adición	Multiplicación
432	29
46	125
25	145
Suma = 58	58
	29
	Producto= 3625

Vése claramente *en la adición* que, si al sumando 25, por ejemplo, se le agregase un cero, sería ello un despropósito, que no haría más que causar confusión. Echando la vista al ejemplo de la *multiplicación,* se ve igualmente que, en el producto parcial 58, ese 8 es *decena* de por sí, en fuerza sólo de su rango, sin necesidad de un *cero* á su derecha; y que, en el tercer producto, el 9 vale *nueve centenas,* con ó sin ayuda de *ceros…* Luego el *cero,* en cualquier caso, es siempre cero; y su valor y su misión se reducen á hacer acto de presencia, en ciertos casos, para denunciar que ese puesto se halla vacante.

(He sido tal vez difuso; pero ha sido, hijos míos, por preservaros de las falsas ideas que generalmente se tienen acerca de este punto, hasta hoy no bien definido).

CUESTIONARIO

Sírvase Vd. escribir sobre la pizarra los números llamados arábigos (150).- ¿En qué se parece al Armario el papel rayado para cuentas? (151).- ¿Cual es la función del cero? (152).-¿Cómo se suplen en el papel rayado los rangos y las jerarquías? (153).- A falta de papel rayado, ¿cómo se colocan en papel común dos ó más cantidades que deben estar unas debajo de otras? (154).- ¿Cómo se enuncia una cantidad escrita en papel común, y que contenga muchas cifras? (155).- Sírvase usted poner un ejemplo (156).- ¿En qué difiere la enumeración española de la enumeración francesa? (158).- ¿Qué calificativo han dado los franceses a su sistema de enumeración, y por qué se le ha preferido? (159).- Sírvase Vd, poner un ejemplo con números arábigos, sobre la adición, la substracción, la multiplicación y la división (160).- ¿Cómo se hace en la práctica una división? (161).- ¿Cuántos modos hay de hacer una división de números enteros? (161 bis).- ¿Cual de los dos modos es preferible? (162).- Sírvase Vd. explicar por qué razón, después de haber dicho «9 *veces* 8 *son* 72», se ha usado de la expresión «á 74 *van* 2, *que los pongo y llevo* 7, á 7 *pago»* (163).- ¿En qué caso se usará de la palabra *vez* y en qué caso de la palabra *por,* al efectuar una multiplicación? (164).- ¿Cuál es el valor real del cero? (165).- Haga Vd. la demostración (166).- Ponga Vd. algunos ejemplos para obtener, el producto de la multiplicación de un número cualquiera por diez, por *ciento;* por *mil,* etc., sin efectuar la multiplicación (167).- ¿Qué regla fluye de los precedentes ejemplos? (169).- Demuestre Vd, que esto no esta en contradicción con lo establecido en el articulo 165. (170 y 171).

DÉCIMA-SEXTA LECCIÓN.

De los números arábigos *(Continuación)*

§ 1

REGLAS

para facilitar la división, cuando el divisor contiene dos ó más cifras

Más, antes de establecerlas, conviene ocuparnos en un ejemplo.

172. Suponiendo que se trata de repartir entre 25 escuelas la cantidad de 20125 billetes, transformaremos la cantidad en los términos siguientes: 2 *decenas de mil* (6 billetes de á diez mil $ cada uno), *cero unidades de mil* (billetes de á mil), *una centena* (1 billete de cien $), 2 *decenas* (billetes de á diez $) y 5 *unidades simples* (billetes de á un $).

Preparando el cálculo como de ordinario, esto es, poniendo el divisor á la derecha del dividendo, separados ambos por una raya vertical, y poniendo otra raya horizontal debajo del divisor, resulta ……………………………………………..

```
20125 |25
……    |----
200   |805
……
……
  125
    0
```

Hecho esto, tomo por primer dividendo parcial tantas cifras, á la izquierda del dividendo general, cuantas tiene el divisor, es decir, las 20 *unidades de á mil* (billetes de á mil $), y digo: «20 entre 25, no puede ser; pues convierto las 20 unidades de á mil, en unidades del orden siguiente, las cuales, agregadas á la centena existente, hacen 201 *centenas* (billetes de á cien $). Entonces, reflexionando sobre cuántos de estos billetes, podrían caber á las 25 escuelas, hago primero la suposición de que pudieran caber á 7, y resulta que es muy pequeño este número (porque, hechas la multiplicación y consiguiente substracción, el *resto* es mucho mayor que el divisor). Supongo en seguida que pueden caber á 9; pero resulta que es muy fuerte este número (porque, multiplicado por el divisor, da un producto mayor que el primer dividendo parcial, y no hay cómo hacer la substracción). Concluyo, entonces, por poner 8 en el cociente, cuyo producto por el divisor me da 200, que los coloco debajo del *primer* dividendo parcial; y, hecha la substracción, queda *una* centena como resto. Convierto esta centena en *decenas,* y bajando las 2 decenas de arriba, tengo 12 decenas (billetes de á diez $), que las tomo como *segundo* dividendo parcial; pero, como estas 12 decenas no alcanzan para ser repartidas entre 25 escuelas, pongo *cero* al cociente (para expresar que *nada* recibirán las escuelas en billetes de á diez). Convierto las 12 decenas en unidades simples, las que, agregadas á las cinco de arriba (que al efecto las bajo al lado de aquéllas), me dan 125 *unidades simples* (billetes de á 1 $), que tomo por *tercer* dividendo parcial. Haciendo la multiplicación y consiguiente substracción, obtengo 5 por cociente, es decir, cinco billetes de á 1 $ para cada escuela, sin que nada quede del dividendo general.

En resumen:

173. Las principales reglas para efectuar una división pueden reducirse á cuatro.

REGLAS

174. *Primera.- Cuando el divisor consta de dos ó mas cifras, se tomara á la izquierda del dividendo un número suficiente de cifras para contener al divisor todo entero.*
<l6>. Pág.5, Ap.

175. *Segunda.- El* RESTO *proveniente de toda substracción, debe ser siempre menor que el divisor. Si éste fuese igual ó mayor, probaría ello que el número computado para el cociente ha sido débil, y que debe ser aumentado con una unidad* (ó *más, siendo muy grande el resto) Si, por el contrario, el producto de la multiplicación fuese mayor que el dividendo*

parcial, eso indicaría que el número tomado para el cociente es muy fuerte, y que debe disminuírsele de una unidad (ó más, según el exceso del producto). [En la práctica se hacen esas pruebas ó ensayos con lápiz, para no tener que enmendar ó raspar los números ó, mejor, en un papel auxiliar]

176. *Tercera.- Para calcular, aproximativamente, cuántas veces puede contener al divisor un dividendo parcial, hay que tener en vista si el dividendo parcial consta de igual número de cifras que el divisor, ó sí aquél tiene una cifra de más. En el primer caso, bastará comparar la primera cifra* (de la izquierda) *del dividendo con la primera* (del mismo lado) *del divisor, y computar cuántas veces puede aquélla contener á ésta; y el resultado de esa comparación será el número que ha de ponerse al cociente, con esta circunstancia: si el número que se halla á la derecha de la primera cifra del divisor es* 5 (y con más razón si fuese superior á 5), *hay casos en que se hace necesario aumentar mentalmente una unidad al valor de la primera cifra del divisor* (¹), *Mas, si el dividendo parcial constase de una cifra más que el divisor, se tomarán las dos primeras del dividendo parcial, para compararlas con la primera del divisor.* [Así, en el ejemplo últimamente propuesto, habiendo sido preciso tomar por primer dividendo parcial 201 centenas, y siendo 25 el divisor, en lugar de de decirse «20 entre 2 ¿á cuántos?» ha sido menester decirse 20 entre 3]. Sucede, empero, las más de las veces, que ese aumento de una unidad á la primera cifra del divisor exige que se aumente también una unidad al correspondiente número del cociente (y algunas veces 2 unidades), especialmente cuando la cifra ó cifras que siguen á la primera del divisor, no son muy fuertes. Es lo que ha sucedido al computar cuántas veces podía estar contenido 3 en 20; pues ha sido preciso decirse: «3 en veinte corresponde á 6 «y sobran dos, y como, por otra parte, se ha exagerado o« mucho, haciéndose 3 al 2 del divisor, aumento 2 al cociente y pongo 2».

177. *Cuarta.- Si algún* RESTO, *proveniente de una sustracción, y acompañado de la cifra que se hubiese* BAJADO *á su derecha, diese un número más débil que el divisor, deberá uno cuidar de no olvidarse de poner un cero al cociente; porque, sin esta precaución, las otras cifras no conservarían el valor que les corresponde, y que depende de su posición relativa.*

178. OBSERVACIÓN.- *Cuando el divisor es la unidad seguida de uno ó más ceros, la división quedará hecha con reproducir el dividendo y separar á la derecha, con una raya vertical, tantas cifras cuantos ceros haya en el divisor.*

179. EJEMPLOS

Sea………………. 250: 10 = 25'0 =25
» ………………….2500: 100 = 25'00 = 25
» ……………….. 25019: 1000 = 25'019 = $25 + \frac{19}{1000}$ (*).

180. DEMOSTRACIÓN

1er. EJEMPLO 250:10	2º EJEMPLO 2500:100	3ra. EJEMPLO 25019:1000
Oper'n	Oper'n	Oper'n
250 1000	2500 100	25019 1000
20 25	200 25	2000 25
50	500	5019
….	…..	……
50	500	5000
0	00	Resto = 019

(¹) Sea, por ejemplo, 25 | 25

Comparando la primera cifra del dividendo con la primera del divisor, se tiene entre 2 á 1, que es lo que corresponde al cociente. Lo propio sucede siendo el dividendo superior á 25 hasta 59.
De aquí para arriba, por ejemplo 60 | 25, hay que agregar mentalmente una unidad al 2 del divisor, á causa del 5, y decir: 6 entre 3 á 2, que corresponde al cociente; pues, si se dijese 6 entre 2, tendríase 3 por cociente, y multiplicándose 25 por 3 daría un producto superior al dividendo, lo que , no puede ser.

(*) En la practica se suprime el signo +, y se escribe simplemente $25 \frac{19}{1000}$

Analizando cada una de estas operaciones, efectuadas por el método ordinario, y comparándolas con las del artículo precedente (178), se ve que los resultados son iguales, con las circunstancias siguientes:

181. Que el cociente de la primera ha mantenido las dos primeras cifras del dividendo y ha eliminado el *cero;*

182. Que el de la segunda ha mantenido también las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo y eliminado dos *ceros;*

183. Que el de la tercera ha mantenido igualmente las dos primeras cifras, dejando 19 unidades como sobrantes, lo que, en lenguaje aritmético, se expresa dé esto modo $\frac{19}{1000}$, y se le da el nombre de *fracción.*

184. No podía ser otro el resultado*; porque dividir por diez* una cantidad, importa descomponerla en diez porciones iguales, cada una de las que, llamada *cociente,* ha de ser sólo una décima parte del dividendo, ó, lo que es lo mismo, importa decir: que los valores del dividendo retrocedan hacia la derecha, dé manera que las decenas vayan á ocupar el rango de las unidades simples, las centenas el de las decenas, y así sucesivamente, quedando sin rango las unidades simples del dividendo, para convertirse en sobrantes ó fracciones de unidad, ó desaparecer totalmente toda vez que la última cifra del dividendo sea un *cero.*

185. Por idéntico razonamiento, en la división por 100 tienen que reducirse á la condición de sobrantes, ó fracciones de unidad, las dos últimas cifras del dividendo, ó desaparecer siendo *ceros.*

186. Otro tanto hay que decir respecto á las *tres* últimas cifras del dividendo, cuando el divisor es 1000.

PRUEBA DE LA DIVISIÓN CUANDO QUEDA UN RESTO

187. En el *artículo* 149 se dijo que la prueba de la División se hace multiplicando el divisor por el cociente, cuyo producto debe ser igual al dividendo; pero esta comprobación no tiene lugar sino cuando la división se hace exactamente; pues en caso de quedar un resto, se opera de la manera siguiente:

Una vez obtenidos los productos parciales, se pone debajo de esos productos el resto, y se hace la suma, la cual debe ser igual al dividendo.

EJEMPLO

División:

```
2432|23
132 105
  17
```

Prueba por la multiplicación:

```
 105
  23
 315
 200
+ 17
2432
```

CUESTIONARIO

Sírvase Vd. mostrar, con un ejemplo, cómo se hace una división cuando el divisor contiene dos ó más cifras (172).- ¿Qué reglas pueden establecerse para efectuar una división? (178).- Sírvase Vd. exponerlas y explicarlas sucesivamente (174 á 177 inc.).- ¿Cómo se puede abreviar la división de un número cualquiera cuando el divisor es la unidad seguida de uno ó más ceros? (178).- Sírvase Vd. poner algunos ejemplos (179).- Sírvase Vd. comprobar la exactitud de las operaciones que acaba de hacer (180 á 188 inc.).- ¿Cómo se hace la prueba de la división cuando queda un resto? (187).

DÉCIMA-SEPTIMA LECCIÓN

Diversas materias

§ 1.

TABLA DE PITAGORAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

188. Para encontrar el producto de dos números en esta tabla, se busca el multiplicando en la primera línea horizontal y el multiplicador en la primera línea vertical de la izquierda; luego, se baja verticalmente, del multiplicando, hasta ponerse frente á frente del multiplicador; el número sobre el cual se encuentre la línea vertical con la horizontal del multiplicador, será el producto de los dos factores.

§ 2.

ADVERTENCIAS

para ayudar á la memoria á retener la tabla de Multiplicación

189. PRIMERA.- El número 10 no figura entre los multiplicandos ni multiplicadores de la tabla; mas, como su uso es tan frecuente (y que pudiera ser considerado como complemento de los números llamados *dígitos),* no es demás advertir aquí que: 1 por 10 (ó 10 por 1) es 10; 2 por 10 (ó 10 por 2) es 20;... y 9 por 10 (ó 10 por 9) es 90. En otros términos: que el 1 se convierte en *una decena,* el 2 en *dos decenas;…* y el 9 en *nueve decenas.*

190. SEGUNDA.- Cuando el multiplicando (ó el multiplicador) es 2, se obtiene el producto duplicando el valor del otro número, como si se tratase de hacer la suma de ese número agregado á él mismo.

EJEMPLOS

2 por 4 (ó 4 por 2).
Obtengo el producto diciendo: 4 y 4 son 8.
2 por 8 (ú 8 por 2).
Obtengo el producto diciendo: 8 y 8 son 16.

191. TERCERA.- Cuando el multiplicando (ó el multiplicador), sea 5, téngase presente que cada *par* de á cinco unidades forma *una decena.* Así, en 5 por 6 (ó 6 por 5) hay *tres pares;* luego 5 por 6 = 30. En 5 por 7 (ó 7 por 5) *hay tres pares* y *un impar,* que vale 5; luego, 5 por 7 = 30 + 5 = 35.

192. CUARTA.- Si el multiplicando (ó el multiplicador) fuese 9, hágase de cuenta, por el momento, que es 10, y disminúyanse del producto tantas unidades cuantas contiene el otro

factor. Por ejemplo, en lugar de 9 por 6, dígase: «10 por 6 son 60; pero, como en cada vez he cometido el error de aumentar 1 al producto, quito 6 y me quedan 54».

193. QUINTA.- Cuando no venga á la memoria el producto de algún número por otro, cámbiese el orden de los factores; por ejemplo, si no se acuerda uno el producto de 8 por 6, dígase 6 por 8.

194. SEXTA.- Hay algunas combinaciones que son gratas al oído, simpáticas, por decirlo así, y que la memoria las retiene fácilmente: tales son las que, en la Tabla, se han formado de dos factores parecidos, como 2 por 2, 3 por 3, 4 por 4, 5 por 5, 6 por 6, 7 por 7, 8 por 8, y 9 por 9; de las cuales puede uno aprovechar del siguiente modo:

No se acuerda uno, por ejemplo, del producto de 6 por 7. Entonces, se dice: «6 *por* 6 *son* 36, y *como* 6 *por* 7 *importa agregar* SEIS *unidades á* 36, *tengo* 36+6=42.»

Si igual tropiezo encuentra uno para recordar el producto de 8 por 7, se dice: «8 *por* 8 *son* 64, *y como* 8 *por* 7 *equivale d quitar* OCHO *unidades de* 64, *tengo* 64-8=56.»

195. *Nota.-* De lo expuesto podría surgir la siguiente: objeción:

Según la *Tercera advertencia,* en 5 por 9, por ejemplo, habría que decirse: «hay cuatro *pares* de á 5 y un *impar,* por consiguiente, son 45». Mas, según la *Cuarta advertencia,* debería decirse: «5 por 10 son 50-5=45».

Bien; la objeción se reduciría, en suma, á notar que en el caso propuesto y otros análogos, se presentarían dos medios para obtener el producto, lo que, en vez de ser inconveniente; es más bien ventajoso, pues que, entre dos ó más caminos conducentes al mismo fin, tiene uno la elección del que más convenga ó le acomode.

§

NUMEROS CARDINALES, ORDINALES Y PARTITIVOS

Aunque estas distinciones se consideran generalmente propias de la Gramática, ellas interesan, en mi concepto, no menos á la Aritmética que á la Gramática, y paso por tanto á tratar de ellas.

Número cardinales

196. Son los que se refieren al conjunto de una cantidad, sin considerar el lugar de prioridad ó precedencia de las unidades entre sí, por ejemplo: «En ese grupo hay *seis* soldados».

Respecto á la nomenclatura de estos números, nada hay que deciros, hijos míos, porque estáis ya muy familiarizados con ellos.

Números ordinales

197. Su nombre lo está diciendo: ellos tienen en cuenta el *orden,* la precedencia en que las unidades están colocadas las unas respecto de las otras, por ejemplo: «En esta fila de soldados, el *primero* es más alto que el *segundo;* éste más que el *tercero…* el *sexto* es el más pequeño».

He aquí las denominaciones:

198. Primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo, duodécimo, décimotercio, décimocuarto, décimoquinto, décimosexto, décimoséptimo, décimoctavo, décimonoveno (ó décimonono), vigésimo, vigésimoprimero, vigésimosegundo… vigésimonoveno; trigésimo, trigésimoprimero… trigésimonoveno;

cuadragésimo, cuadragésimoprimero cuadragésimonoveno; quincuagésimo, quincuagésimoprimero… quincuagésimonoveno; sexagésimo, sexagésimoprimero… sexagésimonoveno; septuagésimo, septuagésimoprimero… septuagésimonoveno; octogésimo, octogésimoprimero… octogésimonoveno; nonagésimo, nonagésimoprimero… nonagésimonoveno.

Nota.- De ahí para adelante casi no tienen uso los números ordinales, por evitar tal vez la confusión que resultaría entre ellos y las fracciones decimales.

199. Los *números ordinales* se expresan con cifras arábigas poniendo una *o* ó una *a* (según el género), á la derecha de la parte superior de la cifra ó cifras.

EJEMPLOS

Tomo *primero*……………	=	Tomo	1º
» *vigésimocuarto*…….	=	»	24º
Lección *segunda*……….	=	Lección	2.a
» *décimaquinta* ……..	=	»	15.a

Números partitivos

200. Llámanse así ciertos divisores cuando, por ejemplo, en vez de decirse «32 *divididos por* 2,» se dice *mitad* de 32.

Tales son: *mitad de, tercio (ó tercia parte) de, cuarto* (ó *cuarta parte) de, quinto* (ó *quinta parte) de, sexto* (ó *sexta parte) de, séptimo* (ó *séptima parte) de, octavo* (ú *octava parte) de, noveno* (ó *novena parte) de…* Por lo regular, esta denominación no se da sino á los divisores de una sola cifra, es decir, de 2 á 9.

201. En este caso, la operación se hace (tratándose de cálculos auxiliares) al pie del dividendo, rayando las cifras de éste.

Sea, por ejemplo, que haya de dividirse 432 *por* 2, y 765 *por* 5.

OPERACIONES

216 153

CUESTIONARIO

¿Cómo se busca en la tabla de Pitágoras el producto de dos números? (188).- ¿En qué se convierten las cifras 1,2, 3…. 9, cuando se las multiplica por 10? (189).- ¿Cómo se obtiene el producto de 2 (ó por 2) valiéndose de la suma (190).- Cuando el multiplicando ó el multiplicador sea 5, ¿qué medio especial puede emplearse para obtener el producto? (191).- Y ¿si el multiplicando ó el multiplicador fuese 9?: (192).- Cuando no venga a la memoria el producto de algún número por otro, ¿qué medios podrán emplearse, además de los ya indicados? (193 y 194).- ¿Qué se entiende por números cardinales? (196).- ¿Qué se entiende por números ordinales. (197).- ¿Cómo se nombran los números ordinales? (198).- ¿Cómo se expresan coro cifras arábigas los números ordinales? (199).- ¿Qué se entiende por números partitivos? (200).- ¿Cómo se hace la operación de dividir cuando el divisor es un número partitivo? (201).

CONFERENCIA *especial*

Al presente, hijos míos, voy á discutir ciertos puntos que, al parecer, son insignificantes, pero que en realidad importan mucho para ilustrar el entendimiento, y son más espinosos de lo que á primera vista parecen; razón por la cual tuve á bien no tocarlos antes de ahora.

FALSOS CONCEPTOS

202. Casi todos los que han aprendido la Aritmética por pura rutina, y gran número de comerciantes, piensan que, *para obtener el importe de un género á tal precio la vara" hay que*

multiplicar el precio por las varas" y quedan satisfechos. Tienen razón para estarlo; porque el resultado es exacto, aunque hayan razonado mal.

203. Otro error, por el mismo estilo, cometen los que (hablando de la división) piensan que ocurren casos en que *hay que dividir pesos por varas"* y otros casos en que *es menester dividir hombres por pesos* etc., etc.

§ 1

(*Relativo á la multiplicación)*

204. Contrayéndome desde luego al falso concepto referente á la multiplicación, voy á ponerlo en transparencia por medio del mismo ejemplo que nos sirvió en el *art. 90,* reemplazando aquí las naranjas con *pesos* y los niños con *varas de casimir,* á saber:

205. *Se desea comprar cinco varas de casimir del precio de tres pesos la vara; ¿cual será el importe de las cinco varas?*

Reproduciendo en la pizarra la figura A *(art. 90)* [▱], se ve que los 3 pesos son evidentemente el multiplicando *(cantidad concreta);* pero, ¿cómo se reproduce este multiplicando? —diciéndose: «5 VECES 3 *pesos, son* 15 *pesos».* Luego, no son las varas, sino las *veces* las que han entrado en el cálculo. [Sucede aquí algo de parecido á lo que pasa en la sanción de las leyes. Éstas se hacen para los pueblos; pero los pueblos no toman parte en la discusión, sino sus apoderados, con el nombre de *Representación Nacional (entidad abstracta):* así también, en la presente operación, aunque los pesos del importe son *para* las 5 va¡:as de, casimir, éstas no funcionan en el cálculo, sino sus representantes, que son las *unidades de vez*.]

M.- Antes de .ahora se ha sentado el principio de que puede uno cambiar el orden de los factores, lo que da lugar á una observación, y es: que representando el costado *b c* 5 unidades *de vez,* si se toma este costado como multiplicando, el producto de la multiplicación será 15 *veces* y no 15 pesos.

P.- Ahí está, pues, el zarzal; y es por esto que os decía, poco ha, que la cuestión es algo más espinosa de lo que á primera vista parece.

206. Ante todo, es preciso fijar la atención sobre una circunstancia muy importante, y es que:

Cada uno de los costados *a b* y *b c* puede representar dos valores, uno real y otro virtual, ó, en otros términos, un número *concreto* y, en su caso, un número *abstracto.*

Así, al principio de la operación, se ha tomado 3 pesos, que han sido colocados en el costado *a b,* como multiplicando, constituyendo así este costado un número concreto... y es de notar que, entre tanto, el costado *b c* ha representado las 5 *veces* que debían reproducirse los 3 pesos, funcionando de este modo como multiplicador *(número abstracto).*

Hecha la reproducción, el costado *b c* fué ocupado por 5 pesos, los mismos que vinieron á colocarse encima de las veces; de suerte que este costado contiene dos valores, el uno equivalente de *veces* y el otro de *pesos.*

Otro tanto sucede con el costado *a b,* en la hipótesis hecha por M., como vamos á verlo.

207. Puesto que se quiere que el multiplicando *a b* haga de multiplicador, por este solo hecho ese costado adquiere la virtud de representar, no sólo 3 pesos, sino también 3 *veces,* pues que sólo así puede funcionar como multiplicador.

Esto sentado, paso á resolver la cuestión.

208. Tomo como multiplicando el costado *b c* y (desentendiéndome de su valor virtual) lo cubro con *cinco pesos,* (Véase la fig. A).

Tomo en seguida el costado *a b,* en su valor virtual, esto es, 3 *veces* (desentendiéndome de su valor real), y multiplico 5 pesos por 3 veces. [Véase la misma figura A].

Contadas ahora las unidades contenidas en la figura, vista de costado, resulta que el producto es el mismo que se obtuvo vista la figura de frente, esto es, 15 *pesos.*

En resumen:

Atentas las consideraciones que acaban de exponerse, en vez de la expresión notada en el *art. 202,* podemos adoptar las siguientes locuciones:

209. «Para saber el importe de cierto número de varas de cualquier género, á tal precio» -

«hay que multiplicar el precio por un número igual al de las varas,»

ó bien,

«multiplicar un número de pesos igual al de las varas, por el número correspondiente al precio».

Nota.- Damos el nombre de *precio* al valor de una vara, *y* el de *importe* á toda la mercadería comprada ó vendida.

§ 2

(Relativo á la división)

210, En cuanto á la falta que algunos cometen respecto á la división, es preciso sentar ante todo el principio de que:—

Una cantidad no puede *dividirse ó descomponerse* en *partes alícuotas, sino tomándose* por *término* de *comparación* otra *cantidad* de la *misma especie.*

En efecto, la operación de dividir consiste en comparar el dividendo con el divisor y ver cuántas veces está contenido éste en aquél, ó lo que es lo mismo, descomponer el dividendo en porciones que sean iguales cada una de ellas, al divisor. Ahora bien; para hacerse esa comparación, es indispensable que ambas cantidades sean de la misma especie, pues sería un absurdo comparar, por ejemplo, cierta cantidad de pesos con cierta cantidad de varas de *casimir.*

Eso sentado, vamos á la práctica,

PRIMER EJEMPLO

211. Se trata, verbigracia, de *saber cuántas varas de casimir se puede comprar con 15 pesos, siendo 3 pesos el precio de una vara.*

Es evidente que aquí los 15 pesos deben ser el dividendo y que los 3 pesos han de funcionar como divisor; de suerte es que, comparado el divisor (3 pesos) con el dividendo (15 pesos, se ve que está contenido *5 veces*, ó, lo que es lo mismo, que del dividendo 15 pueden hacerse 5 porciones, cada una de ellas igual al divisor 3 pesos.

De ahí resulta claramente que, siendo pesos ambos términos de comparación, no se puede decir que los pesos se han dividido por las varas, sino que—

el costo del casimir ha sido dividido por el número que representa el precio (sin que las varas hayan entrado en el cálculo).

211 *bis.* Para acabar de ilustrar el punto de que se trata, hagamos en el precedente ejemplo una pequeña variación, á saber:

Se han distribuido 15 pesos entre algunos individuos, habiendo recibido cada uno de ellos 3 *pesos; se pregunta: ¿cuántos fueron ellos?*

Respuesta.- Siendo 3 pesos la porción ó parte correspondiente á uno solo de ellos, se sigue que, cuantas porciones de á 3 pesos contenga el dividendo 15, *otros tantos* han debido ser *los individuos.* En efecto:

$$\frac{15}{3} = 5 \text{ (individuos).}$$

Y es digno de notarse que en el presente caso *los individuos* ó partícipes para nada han entrado en el cálculo, como sucedió en el caso anterior con *las varas.*

SEGUNDO EJEMPLO

212. *Quince pesos ha sido el costo de cinco varas de casimir, y se quiere saber cuál ha sido el precio de una vara.*

Aquí la cuestión es más complicada que la del caso anterior; porque, siendo 15 pesos el dividendo, el divisor alude á las 5 *varas* de casimir, que no pueden compararse con 15 *pesos.*

Voy á allanar la dificultad.

Así como en el *art.* 192 el costado *b c* figuró como multiplicando, no en calidad de veces (pues, que éstas se hallaban cubiertas materialmente), sino como *pesos,* así también, para efectuar la división que nos ocupa, tomo ahora el valor material de dicho costado *b c* (5 *pesos)* y lo comparo con el dividendo (15 *pesos).*

Al efectuar la operación, digo: «5 *pesos están comprendidos* TRES VECES *en el dividendo»;* por consiguiente, no habiendo entrado las varas de casimir en la operación, mal podría decirse que los *pesos* han sido divididos por *las varas.*

213. En vista de las consideraciones que acaban de exponerse, podemos adoptar las siguientes locuciones:

(En el primer ejemplo): *«Para saber* CUANTAS *varas de un género á tal precio pueden obtenerse con tantos pesos*, *hay que dividir el importe por un número* (de pesos) *igual al del precio».*

(En el segundo ejemplo): *«Para saber el* PRECIO *de tantas varas de género que han costado tantos pesos, hay que dividir el importe por un número* (de pesos) *igual al de las varas».*

§ 3

(Relativo al cociente)

J.- Hay en la división algo que no he podido comprender hasta hoy, y es: que, al dividir una cantidad, por ejemplo 15 pesos por 5, se dice: *«Pongo* 3 *al cociente,»* y ahí termina la división. Mas, yo me digo: «si sólo se han tomado 3 pesos, ¿cómo puede afirmarse que nada queda en el dividendo?»

P.- El punto que has tocado, J., es otro atolladero en que caen generalmente los aprendices, formando un concepto erróneo de la operación de dividir.

Dijimos antes de ahora que la *División* tiene su lenguaje especial, que sólo á fuerza de práctica puede ser comprendido. He aquí cómo debe entenderse lo que ella dice y hace, en el ejemplo propuesto.

214. Ya sabemos que el dividendo no es otra cosa que el producto de una multiplicación *(art. 140).* Sabemos también que, cuando en la división se toma por divisor al que fué multiplicador, el cociente ha de corresponder al que fué multiplicando *(art.* 121). Por otra parte, es preciso no olvidar que la función de la *Multiplicación* se concreta á reproducir el multiplicando tantas veces cuantas indica el multiplicador, formando así el Tablero *a b c d (art, 90).*

215. Esto entendido, cuan,.do la División ha puesto 3 al cociente, después de haber dicho «15 *entre* 5, *á* 3», ha querido decir: que, *«de los* 15 *pesos del dividendo, corresponden* 3 *pesos á cada uno de los individuos* (ú objetos) *representados por el divisor* ». Y bien; como en el ejemplo propuesto, los 5 puntos del divisor (bajo la apariencia de pesos) deben representar 5 varas, se sigue que á cada vara le corresponden 3 *pesos,* como se puede ver, á mayor abundamiento, en la figura que acaba de mencionarse.

He ahí cómo debe entenderse el *cociente,* siempre que se trate de *distribuir* una cantidad, por igual, entre varios individuos ú objetos. Otra cosa es cuando el cálculo exige que se tome una, ó algunas solamente, de las porciones iguales en que se ha descompuesto el dividendo. Esto se comprenderá mejor cuando tratemos de las fracciones. Entre tanto, pasemos á considerar otro error de concepto en que incurren algunos contadores.

§ 4

(Relativo á los números arábigos)

216. La invención y admirable combinación de los números arábigo s se han extendido tanto en el mundo civilizado, que ha venido en llamárseles, por excelencia, simplemente *Números;* y el vulgo, que poco se inquieta de averiguar la importancia de las palabras, cree que los números consisten esencialmente en las cifras arábigas y que, sin la presencia de éstas, no puede haber números.

El número, *propiamente* tal (ya lo dijimos, y preciso es no olvidarlo), es *el nombre especial que se da á cada cantidad formada sobre la unidad, según el lugar que ocupa en la escala de la numeración;* siendo de advertir que la unidad misma, aisladamente considerada, tiene su nombre especial, como que es la base de todas las demás cantidades.

217. Dijimos también que un número puede expresarse *de palabra* ó *por escrito,* y ahora agrego: que, independientemente de la palabra y de la escritura, él existe por sí en la naturaleza. En efecto: si en una pradera, por ejemplo, hay *doscientos* árboles, este número existe allí, aun .cuando nadie se haya tomado la pena de contar los árboles. Más, hubimos de limitarnos á los números hablados ó escritos, porque sólo éstos pueden interesar á las operaciones aritméticas.

PROGRAMA PARA LA PROXIMA CONFERENCIA ORDINARIA

Parte 1ª.

Problemas que deben resolverse en la pizarra con números arábigos <17 >, pág. 6, Ap.

1º. Un barretero horada en una mina 2 metros por día, y recibe 3 pesos por metro. ¿Cuántos metros ha horadado, y cuántos pesos ha ganado en 30 días?

2º. Un regimiento se compone de 3 escuadrones, de á 225 soldados cada uno; cada hombre ha recibido 4 docenas de cartuchos. ¿Cuántos cartuchos ha recibido el regimiento?

3º. Se han repartido por igual 1350 pesos entre varias personas; cada persona ha recibido 75 pesos. ¿Cuántas han sido las personas?

4º. ¿Cuántas varas de terciopelo podrán obtenerse con 425 pesos, á razón de 15 pesos la vara?

Parte 2ª.

Reflexiones sobre la distinci6n de los números en *concretos* y *abstractos.*

CONFERENCIA ORDINARIA SOBRE LA 17ª. LECCIÓN

Parte 1ª.

(Aquí la resolución de los problemas propuestos en el programa que precede)

Parte 2a

Números concretos y abstractos

218. Antes de entrar en discusión, debo manifestaros, hijos míos, lo que ha pasado en mi espíritu, impresionado por las máximas de dos filósofos de la antigüedad, de los cuales el uno empezaba por enseñar á sus discípulos *el hábito* de *callar* y el otro, *el* de *dudar* de *sí mismo.* Y bien; poseído de estos dos sentimientos, he callado largo tiempo, y actualmente me encuentro en el periodo de la duda respecto á lo que me parece haber descubierto, tanto más cuanto que este descubrimiento no está conforme con los principios generalmente reconocidos por los maestros en Aritmética. Por esto es que voy á exponerlo en este curso con desconfianza, y no como doctrina, sino apenas como tema de estudio para cuando hubiereis llegado á adquirir bastantes luces y se os presente la oportunidad de consultarlo y discutirlo, á vuestro turno, con profesores de nota.

Como esta cuestión es complicada y más científica que práctica, tengo á. bien remitirla al Apéndice núm. < 18 >, página 7 del Ap.

§ 1

219. Es del caso hacer notar aquí que, si adolecía de vaguedad la definición que dimos en el tratado de la Multiplicación, acerca de lo que se entiende por *multiplicador,* es porque también es vaga, variable, la idea misma representada por esta palabra.

EJEMPLO

220. En el Tablero a b c d (art. 90), cuando hemos considerado como multiplicando el costado a b, el multiplicador ha sido b c, es decir, el número que expresa la cantidad de casimir (*5 varas);* mas, cuando habiendo volcado el Tablero, tomamos por multiplicando el costado b a y por multiplicador el costado a b, tuvimos que decir 3 veces 5, tomando implícitamente el número de los pesos por *veces,* siendo así que en el caso anterior habían hecho el papel de número *concreto.*

Aquí ocurre naturalmente una pregunta:

—¿Qué clase de número es el multiplicador?

221. Como la palabra *vez* representa una cosa puramente ideal, imperceptible, por más que se la reproduzca, el número *tres veces, cuatro veces, cinco veces,* etc., tiene que ser *número abstracto.*

222. Por igual razón debe considerarse también como número abstracto el cociente, que en la operación de dividir, significa, *generalmente hablando, el número de veces* que el dividendo contiene al divisor.

OBSERVACIÓN

223. El significado de *vez,* aunque ideal, es susceptible de aumento, como— *«una vez"* MAS *«dos veces»;*— de disminución, como— «nueve veces" MENOS «cuatro veces»; de ser clasificado en órdenes y jerarquías, como— *unidad* de vez, *decena* de veces, *centena* de veces, *mil* veces, *diez mil* veces, etc.; pudiendo además dividirse y subdividirse la *unidad de vez* en fracciones de vez (como lo veremos á su tiempo), ni más ni menos que los números concretos.

DÉCIMA-OCTAVA LECCIÓN

De las fracciones y números quebrados

Dijimos, en el art. 111, que al resto ó sobrante de una división se da el nombre de *fracción,* que es de lo que vamos á tratar al presente.

Diremos desde luego, con MM. *J.- F. A. Dumouchel* y *I. Dupuis (nouvel édition)* lo que sigue:

224. «Una FRACCIÓN es una ó muchas partes de la unidad dividida en partes iguales.»

225. «Se emplean dos números para representar una fracción, el NUMERADOR y el DENOMINADOR.»

226. *«El denominador indica en cuántas partes iguales se divide la unidad, y el numerador indica cuántas se toman de esas partes iguales.* El *numerador* y el *denominador* se llaman los dos TÉRMINOS DE LA FRACCIÓN.

227. «Se enuncia una fracción enunciando primero el numerador, después el denominador, al cual se le agrega la terminación AVO (á no ser que el denominador sea uno de los primeros nueve números, excepto el 8, pues entonces se dice *mitad, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, noveno.* También suele emplearse la terminación *cimo* cuando el denominador es *diez* ó derivado de este número, verbigracia: un *décimo,* en lugar de un *diez –avo;* dos *undécimos,* en lugar de dos *onceavos;* tres *vigésimos,* en lugar de tres *veinteavos,* etc., etc.).

Así, hallándose dividida la unidad en *ocho* partes iguales, si se toman *tres* de esas partes iguales, se tiene la fracción *tres octavos.»*

228. *«Se escribe una fracción colocando el denominador debajo del numerador y separándolos con una línea horizontal.* Así la fracción *tres octavos* se escribe $\frac{3}{8}$. »

229. *«Una fracción representa también el cociente de su numerador por su divisor.* »

J.- Esto tiene algo de oscuro para mí.

P.- Un ejemplo hará esto más comprensible.

230. *Supongamos que se trata de dividir un pedazo de paño, de largo de* 3 *varas, entre* 8 *personas.*

No siendo posible distribuir, en varas, la cantidad dada (pues que tan sólo 3 personas recibirían su parte, quedando las demás sin nada), hay que dividir el pedazo de paño en 8 retazos iguales para que de este modo, cada persona tome el suyo. —Pero ¿cuánto tiene cada retazo? —Es lo que vamos á ver.

Para ello, consideremos *una* sola vara dividida en 8 partes iguales, es decir 8 *octavas;* pero como las varas son 3, multiplicando 8 por 3 se obtiene 24 *octavas.* Tomando este producto como dividendo y 8 como divisor, y sometiendo el caso á la división ordinaria, resulta:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Como se ve, lo correspondiente á cada persona son 3.- Pero ¿qué significan esos 3?- Puesto que lo que se divide son *octavas,* es claro que el cociente ha de ser también *octavas,* esto es $\frac{3}{8}$, cuyo valor es el mismo que el de la fracción expresada en el *art.* 227. Esto comprueba al mismo tiempo el principio establecido en el *art.* 229; de suerte que podemos establecer la siguiente regla:

231. *Es la misma cosa dividir, por ejemplo,* 3 *por* 8, *que dividir la unidad en* 8 *partes iguales y tomar* 3 *veces una de esas partes; y así en los demás casos.*

232. «NÚMERO FRACCIONARIO *es aquel que consta de un número entero y de una fracción,* tal es el número $4\frac{4}{4}$. ».

233. «Una EXPRESIÓN FRACCIONARIA es *un número que tiene* la *forma* de *una fracción, pero cuyo numerador* es *igual ó superior al denominador;* tales son las expresiones $\frac{8}{8}$ y $\frac{35}{8}$.

La expresión contiene $\frac{35}{8}$ más de un entero (pues que un entero vale $\frac{8}{8}$; ella indica que muchas unidades han sido divididas cada una en 8 partes iguales (lo que da *octavos* de unidad), y que se han tomado 35 de esas partes iguales.»

234. «*Una expresión fraccionaria representa también el cociente* de su *numerador por* su *denominador.* Así $\frac{35}{8}$ representa el cociente de 35 por 8: en efecto, la octava parte de una unidad es evidentemente la fracción $\frac{1}{8}$; luego, la octava parte de 35 unidades, es 35 veces $\frac{1}{8}$ ó $\frac{35}{8}$.»

235. «Se puede siempre transformar un número fraccionario en expresión fraccionaria, y recíprocamente.

236. «REGLA. *Para convertir un número fraccionario* en *expresión fraccionaria,* se *multiplica el número entero por el denominador* de la *fracción,* se *agrega al producto .el numerador, y* se *pone debajo* de la *suma el denominador* de la *fracción.»*

«Así: «$4+\frac{3}{8} = \frac{4x\ 8\ x\ 3}{8} = \frac{35}{8}$ »

«En efecto, una unidad vale evidentemente 8 octavos, y 4 unidades valen 4 veces octavos ó 32 octavos; por consiguiente, 32 octavos y 3 octavos más hacen 35 octavos: luego, $4+\frac{3}{8} = \frac{35}{8}$ (*).

(*) Algunas veces se hace necesario, en el cálculo, dar á un número forma de fracción, como se verá en la práctica.

237. RECÍPROCAMENTE.- *Para convertir una expresión fraccionaria* en *número fraccionario,* se *divide el numerador por el denominador; el cociente expresa los enteros contenidos* en la *expresión fraccionaria;* se *agrega á ese cociente una fracción que tenga por numerador el resto* de la *división y por denominador el divisor.*

Así $\frac{35}{8} = 4\frac{35}{8}$. En efecto, es igual á 35 dividido por 8. Ahora bien; 35 entre 8 da al cociente 4 enteros, más un resto de 3, que se representa por $\frac{3}{8}$.

238. «CONSECUENCIA.- *Se obtiene él* COCIENTE COMPLETO *de la división de dos números enteros, agregando á la parte entera del cociente una fracción que tenga por numerador el* RESTO *de la división, y por denominador el* DIVISOR».

P.- A las nociones elementales que acaban de exponerse, debo agregar: que todas las cuestiones concernientes á fracciones, números fraccionarios y expresiones fraccionarias, se resuelven por las cuatro operaciones principales, que ya conocéis, hijos míos. Más, antes de abordar la materia, conviene que os diga dos palabras sobre una importantísima innovación operada en la Aritmética á fines del siglo pasado.

Como la diversidad de fracciones, proveniente de la variedad de denominadores, hacía largo y penoso el cálculo, les ocurrió á los franceses la feliz idea de simplificarlas sujetando sus denominadores al sistema decimal. He aquí cómo:

FRACCIONES DECIMALES (*)

239. «Se llaman así *aquellas que tienen por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros.* Así $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{4}{1000}$, ... son fracciones decimales».

240. « Los números 10, 100, 1000, etc., se llaman *denominadores decimales».*

241. «Este convenio supone que la unidad se divide en diez partes iguales llamadas DÉCIMOS; cada décimo en diez partes llamadas CENTÉSIMOS; cada centésimo en diez MILÉSIMAS, y así en seguida».

242. «La naturaleza particular de los denominadores de las fracciones decimales permite escribirlas bajo una forma tan sencilla como la de los números enteros. Para ello se ha convenido en colocar una coma á la derecha de la cifra que representa el rango de las unidades simples; en seguida se escribe, en el rango que está á la derecha de esa coma, la cifra que indica cuántos *décimos* hay; en el siguiente rango la cifra de los *centésimos;*. en el rango sub siguiente la cifra de los *milésimos,* etc. Así:

$$7 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} = 7{,}4\ 3$$

243. Si no habiese unidades enterar, sería necesario escribir un cero para ocupar el lugar de ellas, y se tendría:

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} = 0{,}473$$

244. Se deberá poner también ceros en los rangos donde no existan decimales. Así:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{1000} = 0{,}3007$$

245. 7,473 es un *número decimal,* mientras que 0,473 es una *fracción decimal.*

(*) Todos los trozos que siguen, señalados con comillas, son tomados de Mr. J. Adhémar.

246. En todos los casos, no se dará el nombre de *cifras decimales* sino á las que están á la derecha de la coma.

247. Es preciso también no olvidar que esas cifras representan verdaderas fracciones que tienen, como acabamos de decirlo, por denominadores los números 10, 100, 1000… que se hallan sobrentendidos, y que podrán restablecerse toda vez que lo juzgare uno conveniente.

248, Para leer un *número decimal,* se podrá enunciar sucesivamente las diversas partes de que se compone: Así se dirá:

7,473 = 7 unidades, 4 décimos, 7 centésimos y 3 milésimos, Mas, puesto que existe entre las cifras decimales la misma escala de relaciones que entre las cifras de número entero, las *unidades* de un orden decimal cualquiera, pueden siempre ser contadas como *decenas* de unidades del orden inmediatamente inferior; se podrá, consiguientemente, enunciar la parte decimal, de un solo golpe, como se enunciaría un número entero, de suerte que se dirá:

7,473 = 7 unidades, 473 milésimos, Así, después de haber enunciado la parte entera del número, se enunciará la parte decimal, dándole el nombre que conviene á las unidades del último orden,

P.- Apartándome ahora de la explicación de Mr. Adhémar, digo:

249. Que, así como dividimos los números enteros en *jerarquías,* así también dividiremos las fracciones en *sub-jerarquías,* que irán decreciendo en valor á medida que los órdenes ó rangos se alejen del centro común, que es el rango de las unidades simples.

A propósito de los números enteros, dimos el nombre de *simples* á los tres órdenes de la jerarquía primordial, para distinguirlos de los órdenes que forman las jerarquías superiores. En cuanto á los números decimales, daremos á los tres primeros órdenes (partiendo de la unidad simple, ó centro común) la denominación de *radicales,* para distinguirlos de los órdenes inferiores, es decir, de los *milésimos, millonésimos,* etc.

250. Eso entendido, para leer una fracción decimal, hay que hacer dos operaciones: 1ª. dividir, material ó mentalmente, la parte significativa de la fracción, por rayas verticales, y considerarla como si fuera un número entero, esto es, dividirla en secciones de á tres cifra empezando por la derecha; 2ª. dividir toda ella en secciones de á tres cifras también, pero empezando por la izquierda, esto es, por el rango de las unidades simples.

Sea, por ejemplo, la fracción 0,002305.

1ª. Operación

Empezando por la derecha, digo: «*Unidad, decena, centena* SIMPLES" (pongo una raya vertical á la izquierda del 3) y, continuando la operación, digo: «*unidad de* MIL» (y ahí me detengo, porque ya no hay cifra significativa á la izquierda del 2), de ello resulta la expresión siguiente:

0,002’305

2ª Operación

Empezando por el orden de unidades simples, y yendo hacia la derecha, separo las cifras de tres en tres, diciendo: *Unidad, décimo, centésimo* RADICALES (pongo una raya vertical á la derecha del tercer cero, parte inferior, y sigo diciendo): unidad, décimo, centésimo de MILÉSIMOS» (pongo una raya vertical á la derecha del sexto rango, parte inferior, y termino diciendo) «*unidad de* MILLONÉSIMOS».

Resultando de ambas operaciones esta expresión:

0,00,2'30,5

leo diciendo: *"Dos mil trescientos cinco* MILLONÉSIMOS».

NOTA. -Bien se comprende que la primera operación ha puesto en evidencia el *numerador* (ó sea el número de partes que contiene la fracción), y que la segunda operación ha servido para dar á conocer el *denominador* (ósea el total de partes que contiene la unidad).

251. Eso mismo se hará para leer, de una vez, un número decimal cualquiera, v. g., 10,000'305.

Operaciones:

10,'000'30,5

Se leerá diciendo: «*Diez millones trescientos cinco* MILLONÉSIMOS».

[Conviene repetir que una unidad simple vale por 10 *décimos,* por 100 *centésimos,* por *1000 milésimos,* etc.]

Ya veremos, adelante, que esta manera de considerar la parte entera de un número decimal, tiene su aplicación en la práctica.

252. Es digno de notarse el contraste armonioso que existe entre la estructura de los números enteros y la de las fracciones decimales, teniendo éstas y aquéllas por centro ó punto de partida el orden de las unidades *simples,* como se ve en nuestro Armario.

En efecto, á la derecha… no *nuestra derecha,* sino *la derecha del orden de unidades simples* (suponiendo que los órdenes están formados con la cara hacia nosotros), los valores van creciendo de tal suerte, que cada una de las unidades del rango que sigue, vale 10 veces otro tanto que una unidad del rango anterior; al paso que las cifras colocadas á la izquierda de las *unidades simples)* van reduciendo su importancia á la décima parte del valor que tuviera en el rango precedente.

253. Hay que notar, además, que en los números enteros, los órdenes cuarto, quinto y sexto, forman la jerarquía de los MILES, y que en las fracciones decimales (contándose también el punto de partida), forman la subjerarquía de los MILÉSIMOS; que en los números enteros, los órdenes séptimo, octavo y noveno constituyen la jerarquía de los MILLONES; y que en las fracciones decimales, dichos órdenes forman la subjerarquía de los MILLONÉSIMOS, etc.; de suerte que, existiendo entre las cifras decimales la misma gradación que entre los números enteros, bastará recorrer la escala descendente *(unidad, décimo, centésimo,* etc.), hasta la última cifra decimal, para conocer el nombre que ha de darse á toda la fracción, sin necesidad de restablecer el denominador 10, 100, 1000, etc., como se acostumbra enseñar.

254. NOTA.- Según se ha visto, la terminación IMO es el distintivo de las fracciones decimales, á diferencia de las ordinarias, que generalmente terminan en AVO... Mas, dejando estas fracciones para después, vamos á ocuparnos preferentemente en aquéllas, procediendo así de lo fácil á lo difícil; pues que el sistema llamado decimal las ha simplificado de tal modo que, sabiendo uno las cuatro operaciones relativas á los números enteros, muy poco tiene que hacer para manejar las fracciones decimales.

PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

Ejercicios sobre la numeración de los números decimales (*)

Escribir en cifras los números decimales que siguen: Ocho *décimos.*

(*) Los presentes *Ejercicios* de escritura y lectura de números decimales, así como los *Problemas* que á ellos siguen, los hemos tomado de la Aritmética de MM. Dumouchel et Dupuis.

Cuarenta y cinco *centésimos.*
Sesenta y cinco milésimos.
Ochenta y tres *dimilésimos.*
Mil veinticinco *cenmilésimos.*
Dos unidades, ochenta y cinco *centésimos.*
Quince unidades, treinta y cuatro *milésimos.*
Tres unidades, setecientos cincuenta y tres *dimilésimos.* Treinta y cinco mil ochocientos cuarenta y siete *cenmilésimos.*

Sesenta y tres unidades, doscientos cincuenta mil cuatrocientos ocho *millonésimos.*
Trescientos ocho mil cuatrocientos un *cenmilésimos.*
Mil ochocientas treinta' unidades, setenta mil ochenta y cinco *millonésimos.*

Leer y escribir con todas sus letras los siguientes números decimales

0,097	3,512	0,13579	25,001
0,38	17,3435	0,02468	1,0005
8,075	0,0465	64,729	0,00036
0,024	12,305	5,0056	0,001789
0,8642	6,4963	0,0004	30,40506

En la próxima Lección entraremos de lleno en el cálculo de los números y las fracciones decimales.

CUESTIONARIO

¿Qué es *fracción?* (224).- ¿Cómo se representa una fracción? (225).- ¿Qué es lo que indican el denominador y el numerador? (226).- ¿Cómo se enuncia una fracción? (227).- ¿Cómo se escribe una fracción? (2Z8).- Sírvase Vd. demostrar que una fracción representa también el cociente de su numerador por su divisor (230).- ¿Qué regla fluye de esa demostración? (231).- ¿Qué es *número fraccionario?* (232).- ¿Qué es *expresión fraccionaria?* (233).- Demuestre Vd. que una expresión fraccionaria representa también el cociente de su numerador por su denominador (234).- ¿Qué reglas hay para convertir un número fraccionario en expresión fraccionaria y recíprocamente? (236 y 237).- ¿Qué consecuencia fluye de las dos reglas precedentes? (238).- ¿Qué se entiende por *fracciones decimales?* (239).- ¿Cómo se divide y subdivide la unidad en fracciones decimales? (241).- ¿Cómo se escriben las fracciones decimales cuando se hace abstracción de sus denominadores? (242).- Si no hubiese unidades enteras, ¿cómo se expresará esta circunstancia? (243).- ¿En que otros casos más deberá usarse el cero? (244).- ¿Qué diferencia hay entre un *número decimal* y *una fracción decimal?* (245).- ¿A qué cifras se dá estrictamente el nombre de decimales? {246).- ¿Cómo se lee una fracción ó un numero decimal? (250).- Si la cantidad contuviese números enteros, ¿cómo podrá leerse toda ella en *expresión* puramente *decimal?* (251).- ¿A qué fracciones corresponde la determinación *imo* y a cuál la terminación *avo?* (254).

DÉCIMA-NOVENA LECCIÓN

Adición (de fracciones decimales)

255.- Para hacer la adición de números y fracciones decimales, se les escribe los unos debajo de los otros, cuidando de colocar las unidades del' mismo orden en una misma columna vertical; después se opera del mismo modo que con los números enteros, haciendo abstracción de las comas (que deben estar también en una misma columna vertical), y se pone en la suma la correspondiente coma.

EJEMPLO

Adicionar los números 3,54+67,8+0,927+6,89+0,087+0,009.

Cálculo

3,540
67,800
0,927
6,890
0,087
0,009
79,253

Se puede también, para mayor regularidad del cálculo, poner los ceros que faltan, conforme al principio que se establece en el *art.* 263, de esta manera:

3,540
67,800
0,927
6,890
0,087
0,009
79,253

256. NOTA.- La prueba es la misma que la que se emplea para los números enteros *(art.* 44).

Hacer las adiciones siguientes " < I9> pág. 17 bis, Ap.
1ª. 0,35 + 0,435 + 0,97+ 0,854 +0,8 + 0,45189.
2ª. 17,4 +7,36+ 16,368 + 2,49+ 5,92 + 1,3579.
3ª. 56,75 + 0,489 + 27,38 + 7,654 + 0,75368.

PROBLEMAS SOBRE LA ADICIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

< 20 > pág. 17 bis, Ap.

257. El *franco* se designa generalmente por *f,* el *metro* por *m* y el *gramo* por *g.* La décima parte de un franco se llama *décimo,* y la centésima parte de un franco, *céntimo.* La décima parte del metro se llama *decímetro,* su *centésima* parte, *centímetro,* y su milésima parte, *milímetro.* La décima parte del gramo se llama *decigramo,* la centésima parte de un gramo, *centigramo,* y su milésima parte, *miligramo.*

1º. Un comerciante ha comprado 24 m, 75 de género por 56 f,35; después 36 m ,56 por 85 f, 90; después 18 m, 25 por 49 f, 20: vende todo ese género con un beneficio de 45.f, 70. ¿Cuántos metros ha comprado, cuánto ha pagado, y en cuánto ha vendido el todo?

2º. Un propietario manda hacer un pozo con un albañil, á quien da 6 f, 50 por el primer metro; 8 f, 75 por el segundo; 11 f por el tercero, y así en seguida aumentando 2 f,25 á cada metro. ¿Cuánto ha recibido el albañil por todo, si el pozo tiene 6 m de profundidad?

Sustracción (de fracciones decimales)

258. La sustracción de los números decimales se hace también como la de los números enteros: mas, cuando uno de los números dados tiene menos decimales que el otro número, se hace desde luego de modo que el número de decimales sea el mismo, escribiendo al efecto, á la derecha del deficiente, tantos ceros cuantos sean necesarios para igualar las cifras decimales de ambas cantidades.

EJEMPLO

43,732 -21,38574

Cálculo

$$\begin{array}{lr} & 43,73200 \\ & \underline{21,38574} \\ \textit{Diferencia:} & 22,34626 \end{array}$$

259. Se hace la prueba como la de la sustracción de números enteros (art. 63).

PROBLEMAS SOBRE LA SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

<2I> pág. 10, Ap.

1º. Una persona que debía $ 523,40, debe todavía $ 325,75. ¿Cuánto ha pagado?

2º. Un huésped ha gastado en un hotel $ 225,40, y ha dado en pago tres billetes de á 100$. ¿Cuánto deben devolverle?

3º. Una persona ha prestado por primera vez $ 80,50, y una segunda vez, 24,60; se le ha devuelto por primera vez $ 19,45, y una segunda vez $ 30,55. ¿Cuánto se le queda á deber?

Multiplicación de fracciones decimales

260. *Para multiplicar dos números decimales, se operará como si se tratase de números enteros, sin tener en cuenta la coma; después se separarán sobre la derecha del producto tantas cifras decimales cuantas haya en los dos factores.*

EJEMPLO

28,432 X 3,74

Cálculo

$$\begin{array}{r} 28432 \\ \underline{374} \\ 113728 \\ 199024 \\ \underline{85296} \\ 106,33568 \end{array}$$

Demostración

Tenemos en efecto:

$$28,432 \times 3,74 = \frac{28432}{1000} \times \frac{374}{100} = \frac{28482 \times 374}{1000 \times 100} = \frac{10633568}{100000} = 106,33568$$

Se ve que, después de haber formado el producto de los numeradores 28432 X 374 = 10633568, hay que dividir este último número por el producto de los denominadores 1000 X 100, esto es, por 100000, y reducir en seguida la fracción á número decimal, separando al efecto cinco cifras decimales á la derecha del dividendo (art. 178).

Los mismos razonamientos convendrán, cualquiera que sea el número de los factores.

EJEMPLOS

$$3{,}28 \times 2{,}7 \times 5{,}438 = \frac{328 \times 27 \times 5438}{100 \times 10 \times 1000} = 48{,}158928;$$

$$0{,}00 \times 0{,}0007 = \frac{2 \quad \times \qquad 7}{1000 \times 10000} = 0{,}0000014$$

ADVERTENCIAS

261. 1ª. *Cuando el multiplicador es una fracción decimal propiamente dicha* (tal como 0,2 II 0,003, etc.), *el producto es más pequeño que el multiplicando…*

R.- No comprendo, papá, cómo así el producto pueda ser menor que el multiplicando, porque esto parece contrario á la idea de la palabra *multiplicar.*

P.- Es muy natural, hija mía, tu observación, como que en ella tropiezan todos los noveles en Aritmética; porque, impresionados ante todo con el sonido etimológico de la palabra, no se inquietan de la definición. Voy, pues, á desvanecer tu duda.

¿Qué es la *multiplicación?- Es* el hecho de tomar al multiplicando tantas veces cuantas indica el multiplicador. Y bien: si éste indica que se tome una parte solamente del multiplicando, es claro que esa parte llamada *producto,* tiene que ser forzosamente menor que el todo, que es el multiplicando.

Considerando la cuestión bajo otro aspecto, supongamos que el multiplicando sea 5 y el multiplicador 8 *décimos* (0,8). En este caso, como el multiplicador indica que se .tome al multiplicando, no siquiera *una vez* entera, sino tan sólo *ocho décimos de vez* (véase el *arto* 223), hay que razonar como sigue:

262. Para mejor fijar las ideas, concretemos la cuestión. Se trata, por ejemplo, de reproducir 8 *décimos de vez* una cinta que tiene de largo 5 metros. Al efecto, echo mano de la medida llamada *metro,* que hela aquí [ ]; sólo sí que, en lugar de tomar una *vez entera* la unidad, que es toda la extensión del metro, me limito por lo pronto, á tomar de esa unidad una *décima parte de vez* solamente, y aplico á un extremo de la cinta esta fracción de unidad. Tengo, así, un decímetro de cinta = 0,1; consiguientemente, teniendo la cinta 5 metros de largo, y correspondiendo 1 decímetro por cada metro, obtengo 0,5 (art. 231); mas, como el multiplicador exige que se ha de reproducir 8 veces este valor, resulta en definitiva que:

reproduciendo una décima de vez la unidad, da ……………………………………0,1 de cinta

reproduciendo una décima de vez el multiplicando, da……………………………0,5 »

reproduciendo 8 *décimos* de vez el multiplicando, da ……………………………,... $\frac{40}{10}$=4 m »

He ahí cómo, aun en este caso, cuadra bien el nombre de *multiplicación,* aunque el *producto* haya resultado más pequeño que el *multiplicando.*

Allanado así el tropiezo, sigamos con la lección.

263. 2ª. R *El aumento de uno ó más ceros á la derecha de un número decimal, no hace variar el valor de ese número.*

Así 72,48 = 72,48000.

En efecto; dependiendo el valor de cada cifra de su posición relativamente á la coma, mientras esta posición permanezca siendo la misma, el valor de la cifra no cambia. Sólo, sí, que en un principio la fracción decimal contenía 48 partes, mientras que ahora contiene 48000 partes, si bien que cada una de éstas viene á ser sólo un *milésimo* de una parte de aquéllas. Luego, el valor no ha cambiado.

264. No sucede lo mismo con los números enteros, pues hemos visto *(art.* 169) que si, á la derecha de un número, se pone uno, dos ó más ceros, este número expresará un solo valor multiplicado por 10, 100 ó más veces.

265. 3ª. *Si se quieren colocar ceros á la derecha* de un *número entero, sin cambiar su valor, se empezará por fijar, por medio* de *una coma, el rango* de *las unidades simples,* y *se podrá entonces colocar cuantos ceros se quiera.*

Otra importantísima advertencia es que:

266. 4ª. *Para multiplicar un número decimal por diez, ciento, mil, etc., bastará trasladar la coma uno, dos ó más rangos hacia la derecha.*

En efecto, cuando se traslada la coma hacia la derecha, es como si *avanzase* cada cifra un rango hacia los órdenes superiores, para tomar un puesto en el que vale diez veces otro tanto de lo que antes valía; de tal suerte que las unidades se convierten en decenas, los décimos en unidades, los centésimos en décimos, y así las demás cifras.

267. 5ª. *Consiguientemente, si se suprime la coma en un número decimal, este número será multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros cuantas eran las cifras decimales.*

268. 6ª. Si no hubiese á la derecha del número propuesto bastantes cifras para que pueda efectuarse la traslación de la coma, se suplirá colocando ahí un número conveniente de ceros. Así:

3,82 X 100000 = 38200.

269. NOTA.- La prueba de la multiplicación de números decimales se hace lo mismo que la de números enteros. *(art.* 95).

PARA LA PROXIMA CONFERENCIA

Problemas sobre la multiplicación de números decimales

1º. ¿Qué cuestan 8m,60 – de raso -á 7f,80 el metro?

2º. Se compraron 3 piezas de paño, que contienen cada una 25m,32, á razón de 19f,50 el metro, y se las vende por 1914f,20. ¿Cuánto se gana?

3º. Una persona ha comprado 8m,60 de paño á 24f,80 el metro, y 17m,40 de imperial á 1f,95 el metro. Ha dado la persona en pago un billete de 500f. ¿Cuántos deben devolverle?

CUESTIONARIO

¿Cómo se hace la adición de los números y fracciones decimales? (255).- Sírvase usted poner un ejemplo (255).- ¿Cómo se hace la prueba de la adición de números decimales? (256).- ¿Cómo se hace la sustracción de los números decimales? (258)- ¿Cómo se hace la prueba? (259).- ¿Cómo se hace la multiplicación de los números decimales? (260).- Cuando el multiplicador es una fracción decimal, propiamente dicha, ¿qué viene á ser el producto? (261). -Sírvase ilustrar con un ejemplo lo que acaba de decir (262).- ¿Qué variación resulta en el valor de un número decimal, cuando á su derecha se agrega uno ó más ceros? (263).- ¿Sucederá otro tanto con los números enteros? (264).- ¿Cómo se pueden colocar ceros á la derecha de un número entero sin alterar su valor? (265).- ¿Qué se hace para multiplicar un número decimal por diez, ciento, mil, etc.? (266).- ¿Qué resulta de la supresión de la coma en un número decimal? (267).- Si no hubiese bastantes cifras á la derecha de la coma, ¿qué se hará para efectuar la multiplicación? (268).- ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación de números decimales? (269).

VIGÉSIMA LECCIÓN

División de fracciones decimales

El caso más sencillo de la división de un número decimal es el de tenerse como divisor la unidad seguida de uno ó más ceros.

270. RÉGLA.- *Para dividir un número decimal por 10, por 100, etc., basta hacer avanzar la coma hacia los órdenes superiores uno, dos ó más rangos, según sea el número de ceros del divisor.*

EJEMPLO

Dividir………….. 12,4 por 10
Operación……… 1,24

La exactitud de esta operación fluye, como recíproca, de la observación que hicimos en el artículo 266; pues que, importando el *avance* de la coma un retroceso de cada cifra, los décimos se han convertido en *centésimos,* las unidades en *décimos* y las decenas en *unidades;* es decir, que todo el número ha quedado dividido por 10.

271. *Advertencia.-* Cuando en el dividendo no haya suficientes cifras para hacer avanzar la coma, entonces se suplirá la cifra ó cifras que falten, colocando, al efecto, los ceros necesarios á la izquierda del dividendo, lo cual no altera su valor.

EJEMPLO

Dividir…………….. 12,4 por 100
Operación………… 0,124

Vamos ahora á examinar otros dos casos, según que el divisor sea cualquier número entero ó un número decimal (*).

PRIMER CASO

272. REGLA.- *Para dividir un número decimal por cualquier número entero, se opera como si el dividendo fuese un número entero, es decir, haciendo abstracción de la coma, se separa en seguida á la derecha del cociente, por una coma, tantas cifras cuantas decimales contiene el dividendo. Si la división no se hace exactamente, se obtiene el cociente á menos de una unidad del último orden decimal del dividendo* (**).

PRIMER EJEMPLO

Dividir 31,86 por 9

Cálculo:

$$\begin{array}{r|l} 3186 & 9 \\ \cline{2-2} 48 & 3,54 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

NOTA. En el caso de que se está hablando, se puede efectuar la división manteniendo la coma en el dividendo; pero entonces habrá de operarse con sujeción al art. 280.

(*) Las explicaciones que siguen se han tomado, en su mayor parte, de *Mr. Adhémar* y *M. M. Dumouchel et Dupuis.*

(**) La expresión *á menos de una unidad,* quiere decir que el sobrante de la división debe importar menos que una unidad de dicho orden.

Se ha dividido, desde luego, 3186 por 9, lo que ha dado por cociente 354: en seguida se han separado dos decimales á la derecha del resultado, y se ha obtenido el cociente exacto de 31,86 por 9.

273. DEMOSTRACIÓN.- En efecto, dividir 31,86 ó 3186 centésimos (art. 250) por 9, es tomar la 9ª. parte; ahora bien, la 9ª. parte de 3186 centésimos es 354 centésimos, ó sea 3,54.

SEGUNDO EJEMPLO

Dividir 31,93 por 9.

Cálculo:

3193	9
49	3,54
43	
7	

Operando como en el caso anterior, se ha obtenido por cociente 3,54, y por resto 7, que vale menos de un *centésimo.*

274. DEMOSTRRACIÓN.- Como se ve, la 9ª. parte de 31193 por 9, es más grande que 354 centésimos, pero más pequeña que 355 centésimos, es4ecir, que es igual á 354 centésimos (3,54), más un resto, que no alcanza á un centésimo.

SEGUNDO CASO

275. REGLA.- *Para dividir dos números decimales el uno por el otro, se hace de manera que tengan ambos el mismo número de decimales, completando, al efecto, con ceros las que falten al que tenga menos; se opera en seguida como si ellos fuesen enteros; es decir, haciendo abstracción de las comas. Si la división se hace exactamente, se tiene el cociente exacto de los dos números propuestos; si ella no se hace exactamente, se tiene el cociente á menos de una unidad del rango de la última decimal del dividendo.*

EJEMPLO

Dividir 52,2 por 4,35.

Cálculo

5220	435
870	12
0	

No siendo el mismo el número de decimales en el dividendo y el divisor, se ha colocado, desde luego, un cero á la derecha del dividendo, lo que no ha cambiado su valor (art. 263). Se ha dividido en seguida 5220 por 435, y el cociente así obtenido es también el cociente de 52,20 por 4,35.

276. DEMOSTRACIÓN.- En efecto, dividir 52,20 por 4,35 es buscar cuántas veces el número 52,20 contiene al número 4,35 ó, lo que es lo mismo, cuántas veces 5220 *centésimos* (art. 250) contiene 435 *centésimos.* Entre estos dos números hay la misma relación numérica que entre 5220 unidades y 435 unidades; luego es evidente que el cociente de los centésimos debe ser el mismo que el de las unidades, es decir, 12.

277. Es preciso fijarse en que las 5220 y 435 unidades no son otra cosa que las dos cantidades propuestas al principio, como ejemplo, bajo la forma de números decimales (52,2 por 4,35), y multiplicadas, cada una de ellas, por 100 (*art.* 267).

278. COROLARIO.- Es claro que la precedente demostración puede aplicarse también á las fracciones ordinarias que tengan un denominador común, cualquiera que éste sea.

OTRO EJEMPLO

Dividir 82,4 por 3,436.

Cálculo

82400	3436
13680	23,98…
33720	
27960	
472	

Se ve en este ejemplo que, no conteniendo el dividendo al divisor exactamente, resulta un resto que vale menos que un centésimo del dividendo, y que puede expresarse de este modo $\frac{472}{3436}$ *de centésimo.*

279. ADVERTENCIA.- La coma que se ha reproducido en el cociente, seguida de nuevas cifras decimales, proviene de nuevos ceros colocados á la derecha del resto de la división, á fin de trasformar ese resto en decimales (según ose verá al tratar de las fracciones ordinarias), y que nada tiene de común con las comas y las cifras decimales que .existían en los dos números dados.

280. Se puede contentar uno con retirar la coma, en los .dos términos de la división, tantos rangos solamente cuantos sean necesarios, para que el divisor se convierta en número entero; después se colocará la coma en el cociente, .antes de bajar la cifra de los décimos del dividendo.

EJEMPLO

Dividir 6,2014 por 0,59.

Cálculo

620,14	59
30 1	10,51
064	
05	

281.

Ejercicios

							Cocientes
73,45638	por	2,72	=	7345,638	por	272 =	27,006...
0,00007	por	0,002	=	0,07	por	2 =	0,035
0,002	por	0,00007	=	200	por	7 =	28,5714285

Se ve, por lo que precede, que por medio .de simples traslaciones de la coma, el cálculo decimal se convierte fácilmente en cálculo de números enteros.

282. Cuando el dividendo es un número entero, se ponen tantos ceros á la derecha del dividendo cuantas decimales hay en el divisor, y se efectúa en seguida la división, haciendo abstracción de la coma del divisor, como en el caso de dos números enteros.

283. La prueba de la división de los números decimales es idéntica á la de los números enteros *(art.* 187), es decir que multiplicando el divisor por el cociente, se debe tener por producto el dividendo.

PROBLEMAS SOBRE LA DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

< 23 >, pág. 10, Ap.

1º. Se ha pagado 150 f por 6m,25 de paño. ¿Qué costarán 10 metros del mismo paño?

2º. Se ha pagado á cierto número de obreros 3.110 f ,40 por 24 días de trabajo, á razón de 3 f, 60 por día. ¿Cuántos eran los obreros?

3º. Se cambian 38m,40 de tela, á 4 f, 50 el metro, por 7m,68 de paño. ¿Qué cuesta un metro de paño?

4º. Se ha comprado 3 piezas de paño de igual longitud, á razón de 19 f, 50 el metro; se ha ganado 432 f, 98 vendiéndolas en 1914 f, 20. ¿Cuántos metros tiene cada pieza?

284. PROBLEMA, que servirá de pauta ó modelo para la resolución de los cuatro precedentes problemas:

Diez piezas de *paño, que contienen* 24 *m, 50c cada una, han costado* 4581 *f ,50* c. *¿Cuál es* el *precio* de *un metro?*

P.- Para resolver este problema, hay que hacer dos operaciones:

1ª. Multiplicar el número 24,50 por 10 (*que corresponde á 10 piezas* de *paño), lo* que da un producto de 245 *metros.*

2ª. Dividir el número 4581,50 *(que corresponde al costo)* por 245.

Hecha la división, resulta que el dividendo 4581 f, 50 c, contiene al divisor 18 *veces* y 70 centésimas *partes de vez,* es decir, que el precio de un metro es 18 f, 70c, ó bien, abreviando el cálculo:

$$X= \frac{4581,50}{10 \times 24,50} = \frac{4581,50}{245,0} = \frac{4582,5}{245} = 18^{f},70$$

Verificación

245 metros á 18f, 70 = 4581 f, 50.

PRODUCTOS APROXIMATIVOS Á LA UNIDAD DE UN ORDEN DECIMAL DADO

Ante todo, conviene tener en cuenta los siguientes principios:

285. 1º.- Cuando el multiplicador es un número del orden de unidades simples, los décimos del multiplicando dan por producto *décimos,* los centésimos dan *centésimos,* los milésimos dan *milésimos,* etc.

En efecto: 0,631 X 5, dan 5 *milésimos,* 15 *centésimos,* 30 *décimos* = 3, 155.

286. 2º.- Cuando el multiplicador es del orden de los décimos (0,1), los décimos del multiplicando dan *centésimos,* los centésimos dan *milésimos,* etc., perdiendo el producto de cada cifra del multiplicando un rango.

EJEMPLO: 0,432 X 0,1 = 0,0432.

287. 3º.- Por la misma razón, cuando el multiplicador es un centésimo (0,01), los décimos del multiplicando dán *milésimos,* los centésimos dan *dimilésimos,* etc., perdiendo el producto de cada cifra dos rangos.

EJEMPLO: 0,432 X 0,01 = 0,00432.

Sin ir más lejos, por lo que se ve en los tres ejemplos precedentes, se puede establecer el siguiente:

288. COROLARIO: *La multiplicación de una cifra decimal por otra cifra decimal ha de dar un producto que deberá llevar por nombre el del rango correspondiente á la suma de los órdenes decimales del multiplicando, incluso el del punto de partida* (el de unidades simples) *y de las cifras decimales del multiplicador.*

EJEMPLOS

		Sumas	*Órdenes*	*Denominación*	*Productos*
0,1	por 0,1	2 + 1	3º	centésimos	=0,01
0,3	por 0,01	2 + 2	4º	milésimos	= 0,003
0,02	por 0,04	3 + 3	5º	dimilésimos	= 0,0008
0,009	por 0,008	4 + 3	7º	millonésimos	=, 0,000072.

Eso establecido, fluye de ahí la siguiente 289.

289. REGLA.- *Cuando se multiplican, el uno por el otro, dos números decimales que tienen muchas cifras, y no se tiene necesidad sino de un valor aproximativo del producto, se puede abreviar la operación de la manera siguiente:*

Supongamos que se pida el producto de

7,486258... por 2,392546...

á menos de *un décimo* de unidad.

Se efectuará la multiplicación de modo que la cifra de la derecha de cada producto parcial represente unidades que vengan á ser centésimos del orden que se indique. Así, en el ejemplo propuesto, la centésima parte de un décimo corresponde á un *milésimo* de la unidad simple. Pero se ha de empezar la operación poniendo en primer lugar el producto parcial de la cifra de más importancia del multiplicador (de la *unidad* 2 en el caso supuesto), y sucesivamente el de cada una de las demás cifras de menos valor, yendo de izquierda á derecha, lo que, evidentemente, en nada puede alterar el producto general.

EJEMPLOS

Multiplicación ordinaria	*Multiplicación inversa (*)*
321	321
<u>642</u>	<u>642</u>
642	1926
1284	1284
<u>1926</u>	<u>642</u>
206082=…………………………..	206082

(*) Esto es: empezando por formar el producto parcial de la cifra más fuerte del multiplicador (de las 6 centenas en el presente caso), y así en seguida, como se ve en el ejemplo de la derecha.

Ahora bien, volviendo á la precedente suposición, se tiene:

7,486258 X 2,392546.

Operación

$$
(*)\left\{\begin{array}{lll}
7{,}486 & \times\ 2 & =14{,}972 \\
7{,}48 & \times\ 0{,}3 & =2{,}244 \\
 & & \\
7{,}4 & \times\ 0{,}09 & =0{,}666 \\
7, & \times\ 0{,}002 & =\underline{0{,}014} \\
 & & \quad 17{,}896
\end{array}\right.
$$

290. En el primer producto parcial, el error que proviene de la parte descuidada en el multiplicando será 0,000250… x 2, y por consiguiente menos que 0,001 x 2, = 0,002…

M.- No comprendo de dónde ha venido el valor 0,001.

P.- En verdad que esto merece una explicación, y hela aquí: El valor real de toda la parte descuidada (0,000258…) no alcanza á *un milésimo,* esto es claro; mas he querido dar de barato (como familiarmente se dice) que ese valor llega á *un milésimo,* para concluir de ahí que, aun así, no perjudicaría á nuestro propósito, que consiste en que la cifra de la derecha de cada producto parcial represente *milésimos.*

Eso entendido, sigamos adelante.

Se tendrá, pues, reuniendo los errores:

1ª. producto,	error	menos	que	0,001	x 2,	= 0,002
2ª.	“	“	“	0,01	x 0,3	= 0,003
3ª.	“	“	“	0,1	x 0,09	= 0,009
4ª.	“	“	“	1	x 0,002	= 0,002

Además el error proveniente de la parte descuidada en el multiplicador es 7,486258 x 0,000546; por consiguiente, menos que……8, x 0,001 = <u>0,008</u> (**)

0,024

Así el error total importará menos que ….. 0,024 y, con mayor razón, menos que 0,1.

Se ve, por el ejemplo precedente, que sería preciso que la operación contuviese un gran número de productos parciales para que el error fuese de un décimo de unidad; en cuyo caso bastaría calcular todos los productos hasta los *dimilésimos,* es decir, tres rangos más abajo del que se haya fijado.

291. ADVERTENCIA.- En la práctica, cuando la primera cifra de las decimales excedentes es 5 (y con mayor razón siendo mayor que 5), se acostumbra aumentar *una* unidad á la cifra precedente; y, si es menor que 5, se desechan por completo todas las cifras excedentes, en razón de que el valor de todas estas cifras no alcanzan á la mitad de una unidad del orden prefijado.

EJEMPLOS

1º. 3,77655…. = 3,777
2º. 3,77649…. = 3,776

(*) Aquí, yen casos análogos, pueden aplicarse convenientemente los principios y el Corolario establecidos en los *artículos* 285 á 288 inclusive.

(*) La ventaja de hacer esta suposición exagerada, esto es, de aumentar al 7 un entero, como equivalente *exagerado* de la fracción 0,486258, y de considerar la parte descuidada del multiplicador (546 millonésimos) como equivalente de 1 milésimo, *también exagerado,* consiste en que, de este modo, no hay que hacer más que una sencilla multiplicación que da un solo producto, en vez de una multiplicación, que habría tenido tres productos de siete cifradas cada uno.

292. NOTA- *MM. Dumouchel et Dupuis,* dando á la precedente multiplicación el nombre de *método abreviado,* disponen el cálculo de la manera siguiente:

EJEMPLO

Calcular á menos de 0,001, el producto de 3,1415926 *por 14,1421358.*

Se escriben en orden inverso las cifras del multiplicador debajo del multiplicando, pero de manera que la cifra de las *unidades simples* quede bajo la cifra de los *cenmilésimos* del multiplicando (*).

Después, se escriben los productos parciales los unos debajo de los otros, de manera que las primeras cifras de la derecha estén en una columna vertical, y se hace la suma de ellos. Se suprimen las dos cifras de la derecha (*en razón de que la proposición indica que* las decimales del producto sólo deben ir hasta los *milésimos)*, y se aumenta con una unidad la última cifra conservada, á causa de que la parte excedente (75 *cenmilésimos),* vale más de la mitad de un milésímo *(art.* 291),

Operación

3,1415.926…
...853.1241,41

3141592	X	1 =	3141592
314159	X	4 =	1256636
31415	X	1 =	.. 31415
3141	X	4 =	.. 12564
314	X	2 =	…. 628
31	X	1 =	….. 31
3	X	3 =	……. 9

Suma……………… 44,42875
Producto………….. 44,429 á *menos de* 0,001

OBSERVACIÓN

293. Este último método tiene la gran ventaja de que, una vez colocada la cifra de las *unidades simples* del multiplicando debajo de la cifra que, en el multiplicando, expresa el orden de *cenmilésimos* (en el presente caso), la operación se hace muy sencilla; pues las cifras que sucesivamente han de descuidarse en la formación de los productos parciales, se presentan por sí solas á la vista, atenta la circunstancia particular de que cada cifra del multiplicador tiene, encima, la cifra que ha de servir de costado: derecho del respectivo multiplicando parcial, quedando *fuera de combate,* por decirlo así, las cifras que se hallen á la derecha de ese costado. Así, por ejemplo: para la formación del primer producto parcial, el multiplicador es el 1 del multiplicador (que vale *una decena);* y, como encima del 1 se encuentra el 2 del multiplicando, este 2 tiene que ser el costado derecho, quedando excluído el 6, por la sencilla razón de que 6 *dimillonésimos,* multiplicados por una decena, no alcanzan á formar *cenmilésimos,* que es el límite de los productos parciales, en la presente cuestión. Asimismo, siendo 9 el costado derecho del segundo multiplicando parcial, que tiene por multiplicador 4 *(unidades simples)* del multiplicador, quedan de hecho eliminadas las dos últimas cifras del multiplicando, obteniéndose de este modo el segundo producto parcial en cenmilésimos; y así sucesivamente, hasta que se hayan agotado las cifras del multiplicando y quedado, por consiguiente, desechadas las cifras 5 y 8 del extremo izquierdo del multiplicador.

Para terminar este asunto, debo decir: que omito reproducir aquí la *demostración* de los señores Dumouchel y Dupuis, tocante á la apreciación de los errores cometidos en la *multiplicación abreviada,* porque considero más sencilla y comprensible la demostración de Mr. Adhémar, que ya hemos visto *(art. 290).*

(*) No se Olvide que *cenmilésimos,* multiplicados por *unidades simples,* dan *cenmilésimos (art.* 285)

EJERCICIOS SOBRE LOS PRODUCTOS APROXIMATIVOS < 24 > página 11 del Ap.

1º. *Encontrar á menos de una unidad simple el producto de:*

5,254321 por 12,360748

2º. *Encontrar á menos de 0,1 el producto de:*

64,32108 por 4,657249

3º. *Encontrar á menos de 0,01 el producto de:*

25,874 por 48,6532

COCIENTES APROXIMATIVO Á LA UNIDAD DE UN ORDEN DECIMAL DADO

294. *REGLA.- Para obtener el cociente de dos números decimales* (ó de un número entero por un decimal), á *menos de una unidad de un orden decimal dado, se determina desde luego el número de cifras decimales que ha de tener el cociente deseado, En seguida se completan con ceros, si fuese menester, las cifras decimales que falten en el dividendo ó el divisor; se hace la división ordinaria hasta obtener en el cociente dos cifras decimales de más que las indicadas en la proposición, y el resultado que se obtenga satisfará la exigencia.*

EJEMPLO

Calcular á menos de un milésimo el cociente de 96: 25,42, [Error permitido, á *menos de 0,001.]*

Cálculo

96: 25,42 = 9600: 2542 = 3,77655…

Como en el cociente que precede las dos decimales excedentes valen más de la mitad de un milésimo, se puede reforzar el 6 con una unidad, y asegurarse que el cociente es 3,777 á *menos de 1 milésimo,* (Véase el *art.,* 291),

CUESTIONARIO

¿Qué regla se observará al dividir un número decimal por diez, por ciento, etc,? (270).- ¿Qué se hace cuando el dividendo no contiene suficientes cifras para hacer avanzar la coma? (27l).- ¿Cómo se procede para dividir un número decimal por cualquier número entero? (272).- ¿Qué deberá hacerse para dividir dos números decimales el uno por el otro? *(275).-* ¿De dónde proviene la coma que se ha reproducido en el cociente del precedente ejemplo? (279).- Cuando, al efectuar una división de números decimales, se transporta la coma tantos rangos solamente cuantos sean necesarios para que el divisor se convierta en número entero, ¿qué regla debe observarse? (280).- Cuando el dividendo es un número entero y el divisor un número decimal, ¿cómo debe hacerse la división? (282).- ¿Cómo se hace la prueba de la división de los números decimales? (283).-Tratándose de los productos aproximativos á la unidad de un orden decimal dado, ¿qué principios deben tenerse presentes? (285 al 287 inc.).- ¿Qué nombre debe darse al producto de una cifra decimal, por otra cifra decimal? (288).- Cuando no se tiene necesidad sino de un valor aproximativo del producto de dos números decimales que tienen muchas cifras, ¿cómo se abreviará la operación? (289).- Cuando la primera de las cifras excedentes ó descuidadas es 5 ó mayor que 5, ¿qué valor se le da en la práctica? (291).- Dé Vd. á conocer el llamado *método abreviado* para obtener el producto á menos de un orden decimal dado (292).- ¿Cuáles son las ventajas de ese método? (298).- ¿Cómo se obtiene el cociente de dos números decimales, á menos de una unidad dada? (294).

VIGÉSIMA-PRIMERA LECCIÓN

Fracciones ordinarias

295. Se llaman así todas aquellas que tienen por denominador cualquier número que no sea la unidad seguida de uno ó más ceros, verbigracia:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5}\ etc.$$

Véanse los Ejercicios expresados en seguida de la presente Lección.

Según aparece, la fracción presenta á la imaginación una idea compleja, por cuanto su valor depende de la importancia de cada uno de sus dos términos: el numerador y el denominador.

296. Por lo tanto, es importante conocer qué cambios podrán operarse en la fracción, cuando se hiciere variar el uno ó el otro de sus términos, ó los dos á la vez.

Mas, antes de abordar la cuestión, conviene, hijos míos, imbuíros en ciertas nociones preliminares que, además de su utilidad respecto al manejo de los números enteros, tienen su aplicación especial para allanar las dificultades que presenta el escabroso terreno de las fracciones ordinarias.

DE ÁLGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ([1])

297. Las cuatro combinaciones de números á que hemos dado los nombres de *adición, sustracción, multiplicación* y *división,* forman la base de toda especie de cálculos, y no sería demasiado el ejercicio que se hiciese para efectuarlas con prontitud y seguridad; mas no basta saber manejar hábilmente las cifras; preciso es poder determinar, ante todo, cuáles son las operaciones que deben ejecutarse para resolver la cuestión de que se trata; y se comprende que ello no puede hacerse sino á favor de un razonamiento fundado sobre el conocimiento de ciertas propiedades de los números y de los resultados que puedan obtenerse combinándolos. Vamos a examinar esas propiedades:

Sean los dos números 12 y 3. Ya dijimos que las cuatro principales combinaciones, que pueden hacerse con dos números, son: —

Suma………………..12 +3 = 15.
Sustracción…………12 - 3 = 9.
Multiplicación………12 X 3 = 36.
División……………..$\frac{12}{3}$ = 24.

298. Importa recordar que se da el nombre de *factores* á los dos números de la multiplicación. En una división, el divisor y el cociente, son los factores del dividendo.

299. Aunque en la multiplicación y en la división hayamos dado el nombre de *términos* á los dos números sobre los cuales se opera, se acostumbra generalmente dar este nombre á las cantidades que se hallan afectadas de los signos + ó —, y también al numerador y denominador de toda fracción ó expresión fraccionaria, En cuanto á la multiplicación, cuando ella se presenta en una sola línea con el signo respectivo, se considera, de ordinario, como que el multiplicando y el multiplicador no forman sino un solo término, cualquiera que sea el número de factores que lo compongan. Lo propio hay que decir de la división.

----

(1) La mayor parte del presente Capítulo es tomado de Mr. Adhemár.

Así:... 12 + 3 es compuesto de dos términos,
12 + 3 + 5 tiene tres términos,
12 - 3 tiene dos términos,
12 x 3 forma un término,
12 x 3 x 5 no forma sino un sólo término,

300. La naturaleza de las combinaciones conduce algunas veces á emplear como factor una cantidad compuesta de muchos términos; en tal caso se la encierra entre paréntesis, y el producto en que esa cantidad entra como factor, es considerado él mismo como que no forma sino un solo término. Así: —

(12 + 3) forma un término,
(2 + 3) (4 + 5 + 2) no forma sino un término.

301: Es esencial interpretar convenientemente los paréntesis. Se concibe que en el último ejemplo es preciso multiplicar (12 + 3) por (4 + 5 + 2), ó 15 por 11, lo que da 165; mientras que, si se hubiese escrito 12 + 3; X 2, esto significaría 12 + 12 + 5 + 2, es decir 31, por cuanto que el signo de multiplicación no afectaría sino á]os dos números entre los cuales se halla colocado.

Del mismo modo, en 2 : 3 hay un término,

en (12 + 8) : (3 + 2) hay un .solo término.

302. El conjunto de dos cantidades separadas la una de la otra por el signo *igual,* se llama una *ecuación.* Así:

3+5+7=-18-3

forman una ecuación.

303. Se llama *primer miembro* de una ecuación todo lo que se lee ó enuncia antes de la expresión de igualdad, y *segundo miembro,* todo lo que se enuncia ó lee después. Así, 3+5+7 forman el primer miembro, 18 - 3 son el segundo miembro.

3 es el primer término, 5 el segundo término, y 7 el tercer término del primer miembro; 18 -3 son el primero y segundo términos del segundo miembro.

304. Admitimos, desde luego, como *axioma,* es decir, como verdad que no tiene necesidad de demostración, que cuando dos cantidades son iguales entre sí, su igualdad no se altera si se hace sobre cada una de ellas una misma operación. Así:

Cuando se agrega á cada uno de los dos miembros de tina ecuación, ó se sustrae de ellos un mismo número; cuando se multiplica ó se divide cada uno de estos dos miembros por un mismo número, no se altera la ecuación.

305. Se llaman *múltiples* de un número los diversos productos de ese número por 1, 2,3, 4, etc. Así los múltiples de 7 son 7, 14,21, 28, etc.

306. Se llama *divisor* de un número todo aquel que lo divide exactamente. Así los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6,9, 18.

307. Es importante distinguir los divisores de un número, de los que son sus múltiples. Así, respecto al número 12,

los divisores son 1,2,3,4,6, 12;
los múltiples son 12, 24, 36, 48, etc.

308. Se ve; pues, que un número no tiene sino algunos divisores, pero que tiene una infinidad de múltiples.

COMPOSICIÓN DE FACTORES

309. Ya sabemos cómo se forma un producto de dos: factores. Si se quisiese componer el producto 2X3X 5X7, se multiplicaría, desde luego, 2 X 3 = 6. Este número, multiplicado por 5, daría 30, que siendo multiplicado por 7 haría 210.

310. Cuando se compone un producto, el valor del resultado es independiente del orden en que se efectúa: la multiplicación (art. 94).

Así:

3X4=4X3.

El principio que acaba de establecerse, es igualmente: aplicable al caso de que los factores sean más de dos.

EJEMPLO

2x3x5x7=5x2x7x3.

En efecto,

2x3= 6; 6 x 5 = 30; 30 x 7=210
5x2= 10; 10 x 7 = 70; 70 x 3=210

De ahí la siguiente

311. REGLA: Se puede invertir el orden de los factores de un producto, de suerte que, donde quiera que tengamos 2 X 3, podemos poner 3 X 2; 10 mismo que 5 X 7 podrá ser reemplazado por 7 X 5. Según eso:

2 X 3 X 5 X 7 = 210.

Cambiando el lugar de los factores del medio, esto es, poniendo 5 X 3 en vez de 3 X 5, resulta:

2 X 5 X 3 X 7 = 210.

Cambiando ahora el lugar del primer factor con el del segundo, se tiene:

5X 2 X3 X7 = 210.

En fin, cambiando en esta última expresión el lugar del último factor con el del penúltimo, se tiene:

5 X 2 X 7 X 3 = 210.

Luego, 2 X 3 X 5 X 7 = 5 X 2 X 7 X 3.

§

312. Cuando se deba multiplicar, el uno por el otro, números terminados por ceros, bastará multiplicar las partes significativas de esos números, y colocar á la derecha del producto los ceros que estaban á la derecha de los factores, como se deduce de la *observación* hecha en el artículo 178. En efecto:

73000 X 400 = 73 X 1000 X 4 X 100 = 73 X 4 X 1. 000 X 100 = 29200000

CUESTIONARIO

¿A qué se da el nombre de fracciones ordinaria? (295).- ¿A qué se da el nombre de factores? (298).- ¿A qué cantidades se da el nombre de términos? (299).- Cuando hay entre paréntesis algunas cantidades, ¿cómo se las considera? (300).- ¿Cómo deben interpretarse los paréntesis? (301).- El conjunto de dos cantidades separadas la una de la otra por el signo *igual,* ¿cómo se llama? (302).- ¿Cómo se denominan la primera y segunda partes de una ecuación? (303).- Cuando dos cantidades son iguales entre si, ¿se alterará su valor, si se hace sobre cada una de ellas una misma operación? (304).- ¿A qué cantidad se da el nombre de múltiple de un número? (305).- ¿A qué cantidad se da el nombre de divisor de un número? (306).- ¿Qué hay que notar sobre los divisores y los múltiples de un número dado? (307 y 308).- ¿Cómo se procede para componer el producto de dos ó más factores? (309) Sírvase Vd. establecer alguna regla respecto al orden en que deben colocarse los diversos factores de una multiplicación para formar el producto (311).- ¿Cómo se multiplican, el uno por el otro, números terminados por ceros? (312).

EJERCICIOS

(para la próxima Conferencia)

Escribir en *cifras las fracciones:*

tres *cuartos*	dos *décimos*
dos *quintos*	once *duodécimos*
una *mitad*	diez y siete *veinticinco-avos*
cuatro *octavos*	veintiún *sexagésimo-avos*
un noven0	cincuenta y dos *centavos*

Leer y escribir con todas sus letras las fracciones:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{15},\ \frac{4}{100},\ \frac{23}{365},\ \frac{125}{4008}\ .$$

VIGÉSIMA-SEGUNDA LECCIÓN.

Descomposición de los números en factores y su divisibilidad

313: Acabamos de ver cómo se compone un producto, y no es menos importante ejercitarse en descomponerlo en sus factores.

Sea, por ejemplo, el número 12; se le puede poner bajo la forma 2 X6, ó 3X4, ó bien todavía, 2 X 2 X 3, Y aun 1 X 12; porque es preciso no olvidar que 12 es igual á la unidad tomada 12 veces.

Si se quisiera hacer pasar al número 13 por las mismas transformaciones, no se encontraría sino 1 X 13.

Así: 12 = 1 X 12 = 2 X 6 = 3 X 4 = 2 X 2 X 3,
mientras que ….. 13 = 1 X 13.

314. Un número que, como 13, no contiene otros factores que él mismo y la unidad, se llama *número simple ó número primario.*

315. Todo número que en su composición contiene otros factores que la unidad, se llama *número compuesto.*

316. Todos los números contienen la unidad como factor; pero se contenta uno con sobrentenderlo; no es de uso considerar la expresión 1 X 13 como una descomposición en factores.

317. *Todo número que no es primario puede descomponerse en factores primarios.* En efecto:

360 = 20 x 18;

reemplazando 20 por 4 X 5, y 18 por 3 X 6, se tiene:

360 = 4 X 5 X 3 X 6;

360 = 2 x 2 x 5 x 3 x 2 x 3.

en fin, reemplazando 4 por 2 X 2, y 6 por 2 X 3, se tiene:

Se ve que, por descomposiciones sucesivas, se acabará siempre obteniendo factores que serán descomponibles.

Se ha encontrado como factores de 360 tres factores 2, dos factores 3 y un factor 5; se habría llegado al mismo resultado, sise hubiese seguido cualquier otro orden en la descomposición, En efecto, se habría podido decir:

360= 24 x 15 = 4 X6 X 3 x 5 = 2X 2 X 2 X 3 X 3 X 5; lo que da los mismos factores.

318. Más, aunque el orden de la descomposición sea indiferente, en cuanto al resultado, es más conveniente poner desde luego en evidencia los factores más pequeños, es decir, de 2 á 9.

360 = 2 X 180 = 2 X 2 X 90 = 2 X 2 X 2 X 45
= 2 X 2 X 2 X 3 X 15 = 2 X 2 X 2 X 3 X 3 X 5

Para hacer la descomposición, se dispondrá el cálculo de la manera siguiente:

360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5
180
90
45
15

Al ejecutar la operación, se dirá:

360 es manifiestamente divisible por 2; anoto este primer factor en seguida de aquel número y, tomando de él la mitad, obtengo por cociente 180, que lo escribo debajo de 360. Tomo después, como dividendo parcial, 180 y, viendo que también es divisible por 2, coloco otro factor 2 á la 1, derecha del primero y, dividiendo por este nuevo factor el dividendo parcial, obtengo 90 por cociente, que lo escribo debajo de 180. Viendo que 90 es todavía divisible por 2, coloco otro factor 2 á la derecha de los dos primeros y, tomando la mitad de 90, que vale 45, escribo este último debajo de 90. Siendo evidente la posibilidad de dividirse 45 por 3, coloco este factor á la derecha de los anteriores y, tomando la tercera parte de 45, obtengo 15, que lo escribo debajo de aquél. Finalmente, como 15 es todavía divisible por 3, y, por consiguiente, descomponible en dos factores primarios 3 y 5, coloco éstos á la derecha de los cuatro anteriores, con lo que se halla terminada la operación.

319. NOTA.- Algunos hacen la descomposición de factores del siguiente modo:

360 : 2
180 : 2
90 : 2
45 : 3
15 : 3
5=5

320. Como se ve, operando de este modo, los factores primarios quedan todos sobre una línea vertical obteniéndose así, entre otras ventajas, las siguientes:

1ª. Que cada dividendo tiene al lado su respectivo divisor.

2ª. Que cada cantidad de la primera columna viene á ser el producto del factor que está á su derecha (que en un principio fué divisor) y del factor que se halla debajo de ella (que en un principio fué cociente).

Nótese, además, que cada una de dichas cantidades puede ser considerada como producto del factor que se halla á su lado, multiplicado por los demás factores que están debajo de él.

321. Cuando los números sean poco considerables, ó que uno adquiera el hábito de calcular, bastará escribir los factores primarios conforme vayan presentándose.

Mas, para que esta descomposición se convierta en un medio de facilitar y abreviar el cálculo, es preciso que no haya hesitación; de suerte que no se debe escribir un número como factor y efectuar la división por ese número, sino después de haber reconocido que esta división se hará exactamente, y que el número que se escribe como factor, es un divisor exacto de aquel que se descompone.

322. Vamos á dar algunos medios de facilitar la descomposición de los números en factores.

Sea el número 60=36+24.
Si se divide todo por 12, se tendrá:

$$\frac{60}{12} = \frac{36}{12} + \frac{24}{12} = \frac{36}{12} + \frac{24}{12} = 3 + 2 = 5$$

323. De donde resulta que es lo mismo dividir un número *ó* dividir cada una de las partes que lo componen, y tomar la suma de los cocientes parciales, como después lo patentizaremos *(art.* 374).

324. Se ve, por lo que precede, que, si muchos números son exactamente divisibles por cierto número dado, este último número dividirá la suma de ellos. Así el número 7, dividiendo exactamente 28, 35 y 42, dividirá 105.

En efecto:

$$\frac{28}{7} + \frac{35}{7} + \frac{42}{7} + \frac{28 + 35 + 42}{7} = 4 + 5 + 6 = 15$$

$$\frac{28 + 35 + 42}{7} = \frac{105}{7} = \ldots\ldots = 4 + 5 + 6 = 15$$

325. Si un número se compone de dos partes, y acierto número dado divide una de ellas sin dividir la otra, no dividirá la suma.

Sea:………………61 = 36 + 25;

dividiendo todo por 4, por ejemplo, se tendrá:

$$\frac{61}{4} = \frac{36 + 25}{4} = \frac{36}{4} + \frac{25}{4} = \quad 9 + (6 + \tfrac{1}{4}) = 15 + \tfrac{1}{4}.$$

326. Un producto de dos factores es exactamente divisible por cada uno de ellos. Así, 35 ó 5 X ¿es divisible por 5 y por 7. Dividir 35 por 5, es buscar un número que, multiplicado por 5, haría 35, y es evidente que ese numero es 7.

327. El producto de un número cualquiera de factores es siempre divisible, no solamente por cada uno de estos factores, mas también por los diversos productos que pueden formarse, multiplicando estos factores los unos por los otros, de todas las maneras posibles. Así, el número —

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \times 3 \times 5 \\ &= 2 \times 15 \\ &= 3 \times 10 \\ &= 5 \times 6 \end{aligned}$$

Luego, 30 es divisible por 2, 3, 5; por 2 X 3= 6; por 2 X 5= 10; por 3X5=15; y, en fin, por 2X3X5=30; pues que cada uno de estos números puede ser considerado como factor de 30.

El número lo, siendo igual á 2 X 5, es divisible por 2;

luego,

328. *Todo número compuesto de centenas es divisible por 2*.

De consiguiente:

$$510=50$$

es divisible por 2, pues que contiene este factor.

329. *Todo número terminado por una cifra par, es divisible por* 2. Sea:

$$45736 = 45730+ 6;$$

Siendo compuesta la primera parte de *decenas,* es divisible por 2, y lo sería todavía aun cuando tuviese más ó menos decenas. Se ve, pues, que la posibilidad de la división por dos, depende únicamente de la cifra de las unidades.

El número 100, siendo igual á 4 X 25, es divisible por 4;
luego,

330. *Todo número compuesto* de *centenas es divisible por* 4.

Sea:

$$28300 = 282 \times 100 = 283 \times 4 = 25$$

que contiene el factor 4.

331. *Toda ves que la cifra* de *las unidades* de un *número, más* 2 *veces la* de *las decenas, formen un múltiple* de *4, se podrá dividir este número por* 4.

Para demostrar esta propiedad nos fijaremos, desde

luego, en que ……. $\begin{cases} 10 = 2 \times 4 + 2 \\ 200 = 25 \times 4 \end{cases}$

Sea ahora el número 54376; se tiene:

$$54376 = \left\{\begin{array}{r} 6 \\ 70 \\ 54300 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 6 \\ 7 \times 10 \\ 543 \times 100 \end{array}\right\} = \begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{\textit{1.ª parte}} & \multicolumn{1}{c}{\textit{2.ª parte}} \\ \hline & + 6 \\ 7 \times 2 \times 4 & + 7 \times 2 \\ 543 \times 25 \times 4 & \\ \hline \end{array}$$

Bajo esta última forma el número se encuentra descompuesto en dos partes. La primera es evidentemente divisible por 4, pues que cada uno de los términos que la componen, contiene el factor 4; la posibilidad de la división por 4 depende únicamente de la segunda parte, que no es otra que la cifra de las unidades, más dos veces la de las decenas; y como se tiene 6 + 2 X 7 = 20, de que se puede tomar el *cuarto,* se concluye que el número 54376 es divisible por 4.

NOTA.- Fundado en la precedente demostración, se ha simplificado el procedimiento, en la práctica; estableciendo la siguiente:

332. REGLA.- *Es divisible por* 4 *todo número cuyas dos últimas cifras sean ceros ó divisibles por* 4.

333. El número 1000 es divisible por 8, porque se tiene:

$$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 8 \times 125,$$

que contiene el factor 8; consiguientemente,

334. *Todo número compuesto de* MIL *ó terminado por tres ceros, es divisible por* 8. En efecto:

$$746000 = 746 \times 1000 = 746 \times 8 \times 125$$

335, *Un número cualquiera es divisible por* 8 *cuando la cifra de sus unidades, más dos veces la de las decenas, más cuatro veces la de las centenas, forman un múltiple de* 8. Así el número 437256 es divisible por 8, pues que

$$6 + 2 \times 5 + 4 \times 2 = 24,$$

se puede dividir exactamente por 8. He aquí la razón de esta propiedad:

$$\begin{aligned} 10 &= 8 + 2, \\ 100 &= 12 \times 8 + 4, \\ 1000 &= 125 \times 8; \end{aligned}$$

Según esto:

$$437256 = \left\{ \begin{array}{r} 6 \\ 50 \\ 200 \\ 437000 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rr} 6 & \\ 5 \times & 10 \\ 2 \times & 100 \\ 437 \times & 1000 \end{array} \right\} = \begin{array}{|r|l|} \hline \text{1.ª parte} & \text{2.ª parte} \\ \hline & +6 \\ 5 \times \quad 8 & +5 \times 2 \\ 2 \times 12 \times 8 & +2 \times 4 \\ 437 \times 125 \times 8 & \\ \hline \end{array}$$

Según esta *última* forma, la primera parte es divisible por 8, una vez que cada uno de los términos de que ella se compone, contiene el factor 8; la posibilidad de la división por 8 depende, exclusivamente, de la segunda parte, que no es otra cosa que la cifra de las unidades más dos veces la cifra de las decenas, más cuatro veces la cifra de las centenas.

Nota.- En la práctica, merced á la precedente demostración, se ha simplificado el procedimiento en los términos siguientes:

336. REGLA.- *Es divisible por 8 todo número terminado por tres ceros ó cuyas tres últimas cifras sean divisibles por* 8.

337. *Todo número terminado por* un *cero ó* un 5, *es un múltiple* de 5.

En efecto; si él termina por un 0, será compuesto únicamente de decenas, y podrá ser dividido por 5, ya que una decena es siempre divisible por 5; y si él termina por un 5, como por ejemplo, 7835, se tendrá:

$$7835 = 7830 + 5$$

Siendo divisible por 5 cada una de las partes, se puede tomar el *quinto* de su suma.

338. *Todo número terminado por dos ceros, ó cuyas dos últimas cifras sean* 25 *ó* un *múltiple* de 25, *es divisible por* 25. Así:

24700 = 247 X *100* = 247 X 4 X 25, es divisible por 25; porque contiene el factor 25,

$$24775 = 24700 + 75,$$

es también divisible por 25, porque, siendo divisible por este número cada un de sus partes, lo es igualmente la suma.

CUESTIONARIO

¿Como se llama un número que, *como* 13, no contiene otros factores, que el mismo y la unidad? (314).- Y ¿cómo se llaman aquellos que en su composición contienen otros factores que la unidad? (315).- Al descomponer un núm. factores, ¿cuáles de éstos deben considerarse preferentemente? (318).- Dé Vd., conocer algunos medios para facilitar la descomposición de los números en factores (322 á 326 inclusive).- Sírvase Vd. establecer alguna regla acerca de la divisibilidad del producto de un número compuesto de diversos factores (327).- ¿Qué números son divisibles por dos? (328 y 329).- ¿Qué números son divisibles por cuatro? (330 a 332 inclusive).- ¿Qué números son divisibles por ocho? 336 inclusive).- ¿Qué números son divisibles por cinco? (337).- ¿Qué números son divisibles por veinticinco? (338).

VIGÉSIMA-TERCERA LECCIÓN

339. Cuando haciendo la suma de las cifras de un número se obtiene un múltiple de 9, se puede concluir que el número mismo es divisible por 9. Así 37854 es divisible, 9, porque se tiene 4 +5 + 8 + 7 + 3 = 27, que es un múltiple de 9.

Para la demostración de esta propiedad, se observará desde luego que —

10 =………….. 9+1,
100 = 99 + 1 + = 11 X 9 + 1,
1000 = 999 + 1 + = 111 X 9 + 1,
10000 = 9999 + 1 + = 1111 X 9 + 1;

Por consiguiente, —

$$37854=\left\{\begin{array}{r}4\\50\\800\\7000\\30000\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{lr}\ldots 4 & \\ \ldots 5\ \mathrm{x} & 10\\ \ldots 8\ \mathrm{x} & 100\\ \ldots 7\ \mathrm{x} & 1000\\ \ldots 3\ \mathrm{x} & 10000\end{array}\right\}=\boxed{\begin{array}{lrr|r}\ldots & & & +4\\ 5\ \mathrm{x} & & 9 & +5\\ 8\ \mathrm{x} & 11 & 9 & +8\\ 7\ \mathrm{x} & 111 & 9 & +7\\ 3\ \mathrm{x} & 1111 & 9 & +3\end{array}}$$

Siendo la penúltima columna de la derecha esencialmente divisible por 9, pues que cada uno de los términos que la componen contiene al factor 9, es evidente que la posibilidad de la división por 9 depende de la última columna, que no es otra cosa que la suma de las cifras del numero propuesto.

340. Como el número 9 = 3 X 3, todo número divisible por 9 será también divisible por 3; de suerte que el mismo razonamiento convendría para el número 3. Así —

341. *Un número es divisible por* 3 *toda vez que la suma de sus cifras es un múltiple de* 3.

El número 84252 es un múltiple de 3, porque la suma de sus cifras, 8 + 4 + 2 + 5 + 2 = 21, es un múltiple de 3; mas, este mismo número 84252 no es divisible por 9, porque no contiene sino uno de los dos factores de 9 = 3 X 3, como que 21 (suma de sus cifras) no es divisible por 9.

342. *Para reconocer si un número es divisible por 11, se hará la suma de sus cifras de rango impar, después se hará la suma de las cifras de rango par; y si la diferencia de las dos sumas es cero ó un múltiple de 11, se concluirá que el número mismo es divisible por 11,*

Sea el número 78958; se tiene

$$\begin{array}{r} 8 + 9 + 7 = 24 \\ 5 + 8 = 13. \end{array}$$

Siendo 11 la diferencia, se concluye que el número propuesto es divisible por 11, En efecto:

$$\begin{array}{rl} 10 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 11 - 1, \\ 100 = & 99 + 1 = 9 \text{ X } 11 + 1, \\ 1000 = & 1001 - 1 = 91 \text{ X } 11 - 1, \\ 10000 = & 9999 + 1 = 909 \text{ X } 11 + 1, \end{array}$$

Según eso,

$$78950 = \left\{\begin{array}{r} 8 \\ 50 \\ 900 \\ 8000 \\ 70000 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{lr} & 8 \\ 5\text{X} & 10 \\ 9\text{X} & 100 \\ 8\text{X} & 1000 \\ 7\text{X} & 10000 \end{array}\right\} = \boxed{\begin{array}{r|r} & +8 \\ 5\text{X } 11 & -5 \\ 9\text{ X } 9\text{X } 11 & +9 \\ 8\text{ X } 91\text{X } 11 & -8 \\ 7\text{X}909\text{X } 11 & +7 \end{array}}$$

Conteniendo cada uno de los términos que componen la penúltima columna el factor 11, se ve que la posibilidad de la división por 11, no depende sino de la última; mas esta columna es igual á la suma de las cifras de rango impar, menos las cifras de rango par; lo cual demuestra el principio.

297564 no es divisible por 11, porque (4+5+9)- (6+7 +2) = 3, no es múltiple de 11.

343. Podríase reconocer todavía, sin efectuar la división, si un número es divisible por 7, 13, 17, etc.; mas, como los medios que se empleasen para ello, serían más largos que el ensayo de la división ordinaria, no se llenaría el objeto que aquí nos proponemos, que es el de simplificar los cálculos en lo posible. Pero, como puede acontecer que se quiera saber si un número es primario ó descomponible, podrá uno proceder de la manera siguiente:

344. *Se ensayaré la división de ese número por todos los números primarios inferiores, comenzando por los más débiles y continuando sucesivamente, según su orden de grandor, hasta que se llegue á una división exacta, ó en la que la parte entera del cociente sea más débil que el divisor. En el primer caso el número será descomponible; en el segundo caso se podrá, sin ir más lejos, concluir que el número propuesto es primario.* En efecto, si él fuese descomponible en dos factores desiguales, es evidente (según el orden que acabamos de prescribir para las operaciones) que la división por el más pequeño de esos dos factores, habría sido reconocida posible antes que se ensayase la división por el más grande; y si el número debía descomponerse en dos factores iguales, se habría encontrado un cociente igual

al divisor. Así, la posibilidad de la descomposición, si ella existe, será siempre reconocida antes de ensayar una división en la que el divisor sería más grande que el cociente.

M.- No he podido comprender bien la explicación que acaba de hacerse.

345. P.- Es que el asunto mismo es de suyo intrincado. Voy, sin embargó, á ver de aclarar la explicación, por medio de dos ejemplos:

Sea el número 529.

Intento desde luego la división por 2, que es el más débil de los divisores ó factores, y veo que no puede ser, porque el dividendo es número impar. Ensayo en seguida la división por 3, y veo que tampoco puede ser. Sigo ensayando por 5, 7, 11, sin obtener una división exacta. Entonces ensayo sucesivamente por 13, 17,19 y 23… No he querido hacerlo por 4, 6, 8 y demás números pares, porque éstos son números compuestos, y porque, siendo el dividendo número impar, no puede contener el factor 2. Tampoco he querido ensayar por 9,15 y 21, porque, no siendo divisible el número dado por 3, menos puede serlo por ninguno de aquéllos que son múltiples de 3.

Contrayéndome entonces á la división por 23, llego á este resultado:

$$\begin{array}{r|l} 529 & \underline{23} \\ 69 & 23 \\ 0 & \end{array}$$

el cual manifiesta que el número dado puede descomponerse en dos factores iguales y en ningún otro más, como lo patentizamos en el ejemplo que sigue:

Sea ahora el número 367.

Procediendo del mismo modo que en el ejemplo anterior, esto es, ensayando la división por los divisores más débiles, llego hasta el 23, que me da este resultado:

$$\begin{array}{r|l} 367 & \underline{23} \\ 137 & 15 \\ 22 & \end{array}$$

y ahí me detengo, por la siguiente consideración:

He ensayado sucesivamente la división por todos los divisores débiles, desde 2 hasta 23, sin encontrar uno solo que divida exactamente el número dado. Por otra parte, en la última división me encuentro con que el dividendo no es divisible por 23 y, lo que es peor, que el cociente ha llegado á ser más peque fío que el divisor. Si siguiese yo ensayando la división por divisores más grandes que 23, sucedería que el cociente sería más y más pequeño cada vez. Y ¿qué es el cociente? Es el factor que he estado buscando; pero ese factor, á existir, no podría ser más pequeño que 23, pues en la hipótesis de que pudiera ser más pequeño, ya lo habría encontrado en alguna de las divisiones que he ensayado tomando sucesivamente, por divisores, desde el número 2 hasta el 23.

Siendo inútil seguir ensayando la división por divisores superiores á 23, concluyo asegurando que el número 367 no es descomponible, y que pertenece á los números llamados primarios.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMARIOS, QUE PUEDE SERVIR DE MODELO PARA TODOS LOS CASOS

346. Sea el número 145860; se tiene:

145860 :	2
72930 :	2
36465 :	3
12155 :	5
2431 :	11
221 :	13
17 =	17

El número 145860, siendo terminado por un cero, contiene el factor 2, y se tiene 2 X 72930, que se escribirá como arriba se ve: 72930 contiene todavía el factor 2 y vale 2 X 36465. Agregando las cifras 5 + 6 + 4 + 6 + 3, se tiene 24, que es múltiple de 3; se concluye que 36465 = 3 X 12155. Este último factor, siendo terminado por un 5, es divisible por 5 y vale 5 X 2431. Haciendo la suma de las cifras de rango impar y la de rango par, se tiene (1 + 4) = (2 + 3). Resulta de ahí que el número 2431 es divisible por 11 y vale 11 X 221. En fin, ensayando la división de 221 por los números primarios superiores á 11, se encuentra que puede dividirse por 13, y se tiene 221 = 13 X 17. <26> pág. 12 del Ap.

347. Cuando no se propone sino abreviar los cálculos, debe uno limitarse á poner en evidencia los factores 2, 3, 5 y 11, y desechar la descomposición por los otros factores.

348. Es, aplicando los principios que acaban de ser demostrados, que se ha formado el siguiente cuadro:

1
2
3
4 = 2 X 2
5
6 = 2 X 3
7
8 = 2 X 2 X 2
9 = 3 X 3
10 = 2 X 5
11
12 = 2 X 2 X 3
13
14 = 2 X 7
15 = 3 X 5
16 = 2 X 2 X 2 X 2
17
18 = 2 X 3 X 3
19
20 = 2 X 2 X 5
21 = 3 X 7
22 = 2 X 11
23
24 = 2 X 2 X 2 X 3
25 = 5 X 5
26 = 2 X 13
27 = 3 X 3X 3
28 = 2 X 2 X 7
29
30 = 2 X 3 X 5
31
32 = 2 X 2 X 2 X2 X 2
33 = 3 X 11
34 = 2 X 17
35 = 5 X 7
36 =2 X 2 X 3 X 3
37
38 = 2 X 19
39 = 3 X 13
40 = 2 X 2X 2 X 5
41
42 = 2 X 3 X 7
43
44 = 2 X 2 X 11
45 = 3 X 3 X 5
46 = 2 X 23
47
48 = 2 X 2 X 2 X 2 X 3
49 = 7 X 7
50 = 2 X 5 X 5
51 = 3 X 17
52 = 2 X 2 X 13
53
54 = 2 X 3 X 3 X 3
55 = 5 X 11
56 = 2 X 2 X 2 X 7
57 = 3 X 19
58 = 2 X 29
59
60 = 2 X 2 X 3 X 5
61
62 = 2 X 31
63 = 3 X 3 X 7
64 = 2 X 2 X 2 X 2 X 2 X2
65 = 5 X 13
66 = 2 X 3 X11
67
68 = 2 X 2 X 17
69 = 3 X 23
70 = 2 X 5 X 7

71
72 = 2 X 2 X 2 X 3 X 3
73
74 = 2 X 37
75 = 3 X 5 X 5
76 = 2 X 2 X 19
77 = 7 X 11
78 = 2 X 3 X 13
86 = 2 X 43
87 = 3 X 29
88 = 2 X 2 X 2 X 11
89
90 = 2 X 3 X 3 X 5
91 = 7 X 13
92 = 2 X 2 X 23
93 = 3 X 31

79	94 = 2 X 47
80 = 2 X 2 X 2 X 2 X 5	95 = 5 X 19
81 = 3 X 3 X 3 X 3	96 = 2 X 2 X 2 X 2 X 2 X 3
82 = 2 X 41	97
83	98 = 2 X 7 X 7
84 = 2 X 2 X 3 X 7	99 = 3 X 3 X 11
85 = 5 X 17	100 = 2 X 2 X 5 X 5 etc.

Yo recomendaría al lector *(dice Mr. Adhemar)* el continuar este trabajo hasta 200 *ó* 300, y aun recomenzarlo muchas veces, hasta poder escribir sin hesitación los factores simples de todo número dado, sobre todo los factores 2,3, 5 y 11.

CONFERENCIA SOBRE LA LECCIÓN PRECEDENTE

P.- Se abre la Conferencia, hijos míos. Exponed vuestras dudas.

M.- Desearíamos saber por qué, en la demostración hecha para reconocer si un número es divisible por 11 *(art.342), sólo* se han tenido en cuenta las decenas, centenas, etc., y ha quedado desatendido el orden de las unidades simples., como si éstas nada tuvieran que ver con 11, que es el factor obligado en la demostración.

P.- Me complace el reparo y voy á aprovechar de él para ilustraros sobre fin punto que no es tan insignificante.

349. Habiéndose observado que en todos los rangos *impares,* descomponiéndolos en dos factores, uno de los cuales es el factor 11, resulta una unidad sobrante, y que, al contrario, en los rangos *pares* falta una unidad para formar un factor 11, se ha tenido á bien marcar las unidades sobrantes y deficientes en la última columna, con su respectivo signo, á fin de establecer la regla.

Pero, diréis: ¿de qué factor 11 es sobrante la cifra de las unidades simples? —Yo respondo: que, en verdad, eso quedó medio envuelto en tinieblas que voy á disipar.

El *cero* puede ser múltiple, y consiguientemente factor, no digamos de 10, de 11, sino también de todo otro número como que decimos á cada paso: « cero veces dos es *cero,* cero por nueve es *cero* », etc., etc. Algo más: el *cero* puede: figurar también en calidad de cociente, que es, como lo sabéis, uno de los factores de la división.

Según eso, contrayéndonos á la escala establecida en el artículo 342, el factor 11 podrá ponerse en evidencia (tratándose de las unidades simples) al principio de la escala, de este modo: 1 + 0 = 1 + (0 X 11). Así, la *unidad simple* viene á ser como la cima de la escala, que hasta hoy permanecía truncada.

1 =………………………		0 x 11+ 1
10 =…………………….		11- 1
100 =….	99 + 1 =	9 x 11+1
1000 =	1001 – 1 =	91x 11- 1
10000 =	9999 + 1 =	909 x 11+1
100000 =	100001 - 1 =	9091 x 11 -1

Mas, así como no es de uso considerar la *unidad* como descomposición en factores, por ejemplo, en la expresión 1 X 3 (art. 314), sucede lo propio en la expresión 0 X 11... Cuando nos remontemos á la alta región del Álgebra, veremos que el 0 ejerce allí importantísimas funciones; entre tanto, las nociones que en su respecto habéis ya adquirido, bastan por lo que toca á la Aritmética.

R. Me ocurre la siguiente duda: Si al descomponer 1000, por ejemplo, en dos factores, se me, olvidase cuál es el factor que debe ser multiplicado por 11, ¿cómo haré para obtenerlo á tiempo de la demostración?

350. P. De un modo muy sencillo, hija mía: Conocidos el dividendo (que no es otra cosa que el *producto* de la multiplicación) y el divisor (que es uno de los factores componentes del producto), para poder encontrar el otro factor, basta efectuar la división del dividendo por el factor conocido; bien entendido que el cociente será el factor buscado (art. 102).

En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 1000 & \underline{11\quad} \\ 001 & 90 \\ 10 & \end{array}$$

R. Pero papá, en la *escala* (art. 342 y 349) se ve 91 X 11 -1 en lugar de que aquí el cociente es 90 con un sobrante de 10 unidades.

P. Tu observación es muy justa, hija mía; pero vas á ver que ella quedará disipada por medio de un pequeño artificio, que es para vosotros enteramente nuevo.

351. Recordad que, en la *sustracción abreviada* (art. 56), cuando la cifra del restador es mayor que la cifra respectiva del restando, *por* ejemplo:

34 *restando*
<u>18</u> restador

fué preciso decir: *«De 4 quito 8, no puede ser* ". Tomando prestada una decena, tengo 14 unidades, y digo; *«De 14 quito 8, quedan; que los pongo, y llevo una»;* y vosotros sabéis, hijos míos, por qué y para qué se dice *llevo una»*.

Pues bien; una cosa análoga puede hacerse en la división. En el presente caso, hecha ella, resulta un sobrante ó resto de 10, siendo así que, según se ve en *la escala)* en todo rango par (como lo es 1000), debe aparecer como *déficit* 1. La cuestión se reduce á hacer de modo que ese sobrante 10 se transforme en factor 11.

Al efecto: doy al dividendo, en calidad de préstamo y con cargo de abono, una unidad simple, con la que se convierte el dividendo en 1001. Ahora, dividiendo esta cantidad por 11, obtengo:

$$\begin{array}{r|l} 1001 & \underline{11\quad} \\ 11 & 91 \\ 0 & \end{array}$$

Para verificar la operación multiplico el divisor por el cociente, lo que me da como producto 1001, igual al dividendo; mas, recordando que se dió al dividendo una unidad prestada, la descuento en esta forma: 1000 = 91 X 11 -1.

Siendo esta demostración aplicable á todos los demás rangos *pares,* ¿qué otra duda os ocurre?

J. No comprendo para qué se ha hecho la escala de puras unidades, es decir, *una* unidad simple, de *una* decena, una centena, etc., siendo así que el número dado fué 78958.

352. P.- Ha sido, hijo mío, para facilitar la demostración, y para que ella sirva como de pauta para aplicarla á cualquier número dado. Al efecto, se ha tomado el número 111.111, y se le ha descompuesto en *unidad* simple, *unidad* de decena, etc., como se ve en la escala. La razón para haberse elegido este número es que él se presta para simplificar la demostración, pues sucede que cada rango impar da *una sola* unidad sobrante, al paso que cada rango par da *una sola* unidad de menos. Ahora bien; aplicando esta escala á cualquier número dado, todo el raciocinio que hay que hacer se reduce á decir: *«si por una unidad simple debe salir á la margen derecha* + 1**,** *por dos unidades simples tiene que salir* + 2, *por tres unidades simples saldrá* + 3…, *por nueve unidades simples saldrá* + 9»; y asimismo en cada uno de los demás rangos impares.

Pasando ahora á los rangos pares, el raciocinio que habrá de hacerse será el mismo, con la sola diferencia del signo *menos* en vez del signo *más.*

R.- Y si la suma de las unidades con signo *menos* fuese mayor que la suma de las unidades con signo *más,* ¿qué se hará?

353. P.- En tal caso, se tomará la suma mayor como *restando,* y la suma menor como *restador;* y si la diferencia fuese *cero,* ó un múltiple de 11**,** el número propuesto será divisible por 11.

EJEMPLOS

1º. 28371 no es divisible por 11.
2º. 936584 es divisible por 11.

En efecto:

Suma de los rangos impares 4 + 5 + 3= 12
Suma de los rangos pares…..8 + 6 + 9 = 23 (1)
Diferencia…… 11

Concluyo de ahí que el número últimamente propuesto es divisible por 11.

CUESTIONARIO

¿Por qué medio se puede conocer la divisibilidad de un número por nueve? (339).- ¿Qué números son divisibles por tres? (341).- ¿Cómo se reconocerá si un número .es divisible por once? (342).- ¿Cómo se procede para saber si un número es primario ó descomponible? (344).- Sírvase Vd. poner un ejemplo para la descomposición de un número en factores primarios (346).

VIGÉSIMA-CUARTA LECCIÓN

Composición de los múltiples

354. Una de las aplicaciones más útiles de la *descomposición en factores primarios* (346), consiste en considerar un número que goce de la propiedad de ser divisible por tal otro número dado, cualquiera que éste sea.

355. Se concibe, según lo dicho en el artículo 327, que para obtener un número divisible exactamente por otro, basta hacer entrar este último, como factor, en la composición de aquel que se busca. Así, los números 3 X 5, 3 X 6, 3 X 8, son otros tantos múltiples de 3.

Asimismo, si se quisiese un número que fuese al mismo tiempo múltiple de 8 y de 12, se podría tomar 8 X 12 = 96, ó todo otro número que contenga los factores 8 y 12.

356. Más, en el cálculo, si muchos números gozan de una misma propiedad, es importante escoger el más pequeño de entre ellos. Ahora bien: 72 y 48, y aun 24, son también divisibles por 8 y por 12: sería pues ventajoso hallar un medio de obtener directamente el más simple de todos esos números. Para lo cual se operará como sigue:

Se descompondrá 8 y 12 en sus factores primarios, lo que dará:

8= 2 X 2 X 2
12= 2 X 2 X 3.

Y bien: para que el número buscado sea múltiple de 8 basta que él contenga los factores de 8, es decir, que él sea igual á 2 X 2 X 2; pero se ve también que, si lo multiplico por 3, él adquirirá el único factor que le faltaba para ser múltiple de 12, sin haber perdido por eso la

----
(1) Ver el art. 160 ter

propiedad de ser múltiple de 8, pues que los factores de este último número permanecen en su composición. Así, se tendrá el número

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

24 es múltiple de 8 y 12, que es igual á 3 X 8, ó 2 X 12; y es el más pequeño múltiple de los números propuestos, habiendo hecho entrar en su composición nada más que los factores absolutamente necesarios para hacerle gozar de esta propiedad.

357. Si se quisiese el más pequeño múltiple de los números 8, 12, 15, 18, 20 y 27, se escribiría:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \times 2 \times 2 \\ 12 &= 2 \times 2 \times 3 \\ 15 &= 3 \times 5 \\ 18 &= 2 \times 3 \times 3 \\ 20 &= 2 \times 2 \times 5 \\ 27 &= 3 \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

Siendo el número 2 X 2 X 2, múltiple de 8, bastará multiplicarlo por 3 para hacerlo múltiple de 12, y se tendrá. 2 X 2 X 2 X 3. Multiplicando por 5 se tendrá….. 2 X 2 X 2 X 3 X 5, que será múltiple de 15. La introducción de un segundo factor 3, hará que el número que componemos sea múltiple de 18. No habrá nada que poner para que sea múltiple de 20, porque él contiene ya los factores de 20; mas, para hacerlo múltiple de 27, será preciso hacer entrar en su composición un tercer factor 3, y se tendrá:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 3 = 1080,$$

que es el más pequeño múltiple de los números propuestos.

358. En general, *para componer un número múltiple de otros muchos y que sea el más pequeño posible, es preciso descomponer los números dados en sus factores primarios; después se compondrá un número que contenga, como factores, los factores primarios de cada uno de los números propuestos.*

EJEMPLOS

El más pequeño múltiple de los números 1,2,3,4.,
5, 6, 7, 8, 9, 10, es…………………………………..………… *2520*
El de los números 8, 25, 21, es ………………………….. 4200
El de los números 12, 15, 20, 30, 36, 48, 60, 72, es…… *720*

359. Después de haber compuesto el más pequeño *múltiple* pedido, no es menos importante el ejercitarse en descomponerlo en factores de á dos, colocando en una columna vertical todos los números propuestos.

Tomemos á propósito los mismos números del ejemplo que últimamente nos ha servido:

$$\text{Fig. F.} \quad \left\{ \begin{aligned} 720 &= 12 \times 60 \\ 720 &= 15 \times 48 \\ 720 &= 20 \times 36 \\ 720 &= 30 \times 24 \\ 720 &= 36 \times 20 \\ 720 &= 48 \times 15 \\ 720 &= 60 \times 12 \\ 720 &= 72 \times 10 \end{aligned} \right.$$

Puede hacerse esta descomposición por la división ordinaria, pero

J.- ¿Qué objeto tiene la descomposición del más pequeño múltiple en factores de á dos?

P.- Eso habremos de verlo más tarde, especialmente cuando se trate de la adición de muchas fracciones que en diversos denominadores. Volviendo, empero, á mi propósito, debo decir que:

360. En vez de hacer esa descomposición por medio de la división ordinaria, lo cual habría sido cansado, la he hecho operando como en el *articulo* 357, esto es, descomponiendo previamente en factores primarios, todos los números propuestos en la presente cuestión.

Para mejor fijar las ideas, supongamos que en la figura F, que acaba de formarse, sólo existen las dos primeras columnas y que está por buscarse la tercera columna, la cual no es otra cosa que la expresión de los *cocientes* de división de 720 por cada uno de los números propuestos, y que en la figurase hallan verticalmente colocados.

Bien; operando, lo repito, como en el *art.* 357, he obtenido como más pequeño múltiple—

720 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.

En seguida, empezando por el número 12 (ver la Fig. *F)* me dicho: «¿Cuál es el cociente de 720 dividido por 12?»; mas, en vez de hacer la división ordinaria, he suprimido mentalmente los factores primarios de 12, que son 2 X 2 X 3, y los restantes factores de 720, que son 2 x 2 X 3 X 5, me han dado por cociente 60, que he colocado á la derecha 12.

Pasando al segundo número de los propuestos, en vez de dividir 720 por 15, he suprimido mentalmente los factores primarios de 15, que son 3 X5, y los restantes factores de 720, que son 2 X 2X 2 X 2X 3, me han dado por cociente 48, que he colocado al lado de 15; y he procedido así sucesivamente, hasta haber obtenido el cociente de 720 por 72, que es 10, y que he puesto á la derecha de 72.

361. Eso entendido, á fin de que podáis columbrar desde luego la utilidad de descomponer el más pequeño múltiple en factores de á dos, como se ve en la Fig. *F;* supongamos que sea necesario saber, consecutivamente, por qué número debe multiplicarse cada uno de los que se hallan en la segunda columna (que, de paso sea dicho, pueden representar otros tantos divisores de fracciones ordinarias). Entonces, á la simple vista de la Fig. *F,* se tendrá á la mano el número deseado.

362. En general, cuando se quiera dividir un número descompuesto en factores primarios, se suprimirán mentalmente los factores del divisor, y el producto de los factores restantes compondrá el cociente. En efecto, según la definición de la división, el dividendo es igual al producto de los factores del divisor por los factores del cociente; luego, si se suprimen los factores del divisor, es evidente que quedarán los factores del cociente.

COMPOSICIÓN DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Hemos dicho que un número era divisible exactamente, no solamente por cada uno de sus factores primarios, sino también por todos los productos que podrían formarse multiplicando esos factores, los unos por los otros, de todas las maneras posibles.

363. Según eso, si se quisiese componer los divisores de 72, *por* ejemplo, se dispondría el cálculo como sigue: —

72 x 2 x 2 x 2 x3 x 3
1
2, 4, 8
3, 9,

div.s I 1 I 2, 4, 8 I 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

Es decir que, después de haber descompuesto 72 en factores primarios, se escribirá desde luego el factor 1 (1 X 72 = 72); después se escribirá, en una segunda línea, los productos que pueden formarse combinando entre sí los factores 2 del número 72. La tercera línea contendrá los productos con los dos factores 3.

Hecho eso, para componer los divisores de 72, se escribirá en primer lugar el divisor 1 (que da 72 : 1 = 72). A la derecha del divisor 1 se escribirán los divisores provenientes de la multiplicación del factor 1, de arriba, por cada uno de los factores de la segunda línea (esto es 2, 4, 8). Al lado de éstos se colocarán los divisores provenientes de la multiplicación del factor 3, de arriba, por cada uno de los factores de la primera y segunda línea (ó, lo que es más cómodo, por los divisores ya escritos, que son 1, 2, 4, 8), lo que da como nuevos divisores 3, 6, 12, 24. Por fin, á continuación de estos últimos, se pondrán los divisores provenientes de la multiplicación del factor 9 por cada uno de los factores de la primera y segunda líneas de arriba, ó, lo que viene á ser lo mismo, por los primeros cuatro divisores; con lo cual habrá terminado la operación, obteniéndose así todos los divisores del número 72.

OTRO EJEMPLO:

Componer todos los divisores de 360.

Se tiene:

360 = 2 X 2 X 2 X3 X 3 X 5
1
2, 4, 8
3, 9
5.

Divisores I 1 I 2, 4, 8 I 3 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72;
5, 10, 20, 40 15 30 60 120 45 90 180 360.

Es fácil ver que, por este medio, se tendrán todos los productos que pueden formarse con tres factores 2, dos factores 3 y un factor 5.

R.- Y ¿para qué/es buena la *composición de los divisores?*

P.- Para proporcionarse la ventaja, entre otras muchas, de hacer una división en el menor tiempo posible; pues para los matemáticos el tiempo es precioso como el oro, y hacen toda diligencia para economizarlo.

364. Supongamos que haya de dividirse:

360 | 45

Descomponiendo en sus factores primarios el dividendo y el divisor, en vez de hacer la división, suprimo en el dividendo los factores del divisor; y el resto de factores me da el cociente.
Así:

Dividendo. 2 X 2 X 2 X 3 X 3 X5= 360
Divisor…... 3 X 3 X 5= 45
Cociente… 2 x 2 x 2 = 8

Cuando los factores del divisor no están contenidos entre los del dividendo, suprimiendo en uno y otro los factores comunes á ambos, se obtiene por lo menos la ventaja de simplificar la división, como lo veréis después.

CUESTIONARIO

¿En qué consiste la aplicación más útil de la descomposición en factores primarios? (354).- ¿Cuál es la condición indispensable para que un número sea exactamente divisible por otro? (355).- ¿Qué número conviene tomar, en el cálculo, múltiple? (356).- Ponga Vd. un ejemplo al respecto (id.).- ¿Qué regla se observa componer el más pequeño múltiple de varios números? (358).-¿En qué otra" conviene ejercitarse después de haber obtenido el más pequeño múltiple? (859 y 260).- ¿Cómo se procede al dividir un número descompuesto en factores primarios? (362).-

¿Cómo se dispondrá el cálculo para componer los divisores de un número dado? (863).- ¿Cómo se abrevia la división por medio de la descomposición en factores primarios? (364).

VIGÉSIMA-QUINTA LECCIÓN

Números primarios entre sí. Máximo común divisor

365. Se dice que dos números son *primarios* entre sí, cuando no tienen factor común.

366. Si dos números tienen factores comunes, estos factores dividen á ambos, y su producto forma lo que se llama el *máximo común divisor.*

367. Cuando dos números se hallan descompuestos en sus factores primarios, es fácil reconocer cuáles son los factores comunes y, por consiguiente, formar el máximo común divisor, multiplicando los factores comunes; mas, como la descomposición en factores primarios es algunas veces bastante penosa, vamos á dar un otro medio de encontrar el máximo común divisor de dos números.

Sean los dos números 7856 y 2421.

El número buscado, debiendo dividir estos dos números, no puede ser más grande que 2421: ensayemos si no sería tal vez este número mismo el apetecido; en cuyo caso él debería dividir 7856.

7856	2421
593	3

No teniendo lugar la división, concluyo que 2421 no es el número buscado; pero es sabido que, en toda división, si se multiplica el divisor por el cociente y se agrega el resto, se tendrá el dividendo:

$$7856 = 2421 \times 3 + 593$$

Si se conociese el máximo común divisor buscado y se dividiesen por ese número todos los términos de la ecuación, no se a1teranan las relaciones que ella expresa; mas, debiendo el número buscado gozar de la propiedad de dividir exactamente 7856 y 2421, dividirá también el tercer término de la ecuación.

Según lo que acaba de exponerse, el divisor común, dividiendo 593, no puede ser más grande que este número, y si 593 fuese el número deseado, él debería dividir 2421. Vamos á ensayar esta nueva división:

2421	593
49	4

No habiéndose efectuado exactamente esta división, 593 no es el número buscado; pero este número no puede ser más grande que 49, pues que él debe dividirlo. Será preciso tentar la división de 593 por 49 y, siguiendo el mismo raciocinio, operar hasta obtener una división exacta.

Disposición del cálculo

7856	2421	593	49	5	4	1
593	3	4	12	9	1	4
	49	103	4	1	0	
		5				

Siendo 1 el divisor exacto, concluyo que los números 7856 y 2421, son primarios entre si; es decir, que no tienen otro factor común que la unidad.

OTRO EJEMPLO

NOTA.- Actualmente se acostumbra, en esta y otras análogas operaciones, colocar el cociente encima del respectivo divisor, por comodidad. Sea, por ejemplo, 924: 210.

	4	2	2
924	210	84	42
84	42	0	

Aquí el divisor común entre 924 y 210, es 42.

Hagamos ahora un análisis de las operaciones que se han practicado, empezando por la última operación, que es la que nos ha dado *(cuarta casilla)* el divisor que buscábamos.

42 divide exactamente al dividendo 84.

Pasando á la anterior operación *(tercera casilla)* ella presenta 84 bajo un doble punto de vista; es decir, como dividendo de 42 y, á su vez, como divisor de 210 *(segunda casilla),* dando 2 por cociente.

Contrayéndonos ahora á la división de 210 por 84, ella nos presenta 2 por cociente y 42 como resto; de suerte que podemos considerar 210, en su carácter de dividendo, como compuesto de dos partes, á saber: 1ª. parte, 2 X 84 = 168, y 2ª. parte = 42 *(resto de la división).*

368. La primera parte, como múltiple que es de 84 y, por consiguiente, del divisor común 42, es incontestablemente divisible por éste. Nada hay que decir en cuanto á la 2ª. parte, pues que en la casilla segunda, bajo el aspecto de *resto,* es el mismo que pasó después á ser divisor común.

369. Siendo cada una de esas partes divisible por el divisor común, habrá de serlo también la suma de ellas, como consecuencia necesaria. La siguiente demostración hará esto aun más palpable:

1ª. parte, 2 X 84 = 4 *veces* 42 (divisor común) = 168 (número mayor),
2ª. parte, + 42 = + 1 vez 42 (“ “) = 42 (número menor)
5 *veces* 42 (“ “) = 210 (suma)

Razonando del mismo modo, por lo que hace al dividendo general *(Primera casilla),* se obtiene el siguiente resultado:

924=840+84

Primera parte, 10 X 84 = 20 *veces* 42 (divisor común) = 840 *(número mayor)*
Segunda parte, + 2 X 42 = 2 *veces* 42 (“ “) = 84 .*(resto)*
22 veces 42 (“ “) = 924 *(suma)*

370. Frecuentemente se puede abreviar la operación que tiene por objeto encontrar el máximo común divisor entre dos números. Al electo, se recordará que, no siendo el divisor común otra cosa que el producto de los factores comunes, resulta de ahí que todo factor de uno de los números propuestos que no sea factor del otro, no hará parte ciertamente del divisor común, y que, por consiguiente, puede desentenderse de él sin temor de alterar este divisor.

Eso entendido, para abreviar la operación, suponiendo que los números dados sean 612108 *(dividendo)* y 62460 (*divisor),* se procederá del modo que paso á explicar.

Se extraerá desde luego, de cada uno de los términos, el factor ó factores comunes, *fáciles de reconocerse,* según las reglas que hemos establecido anteriormente, empezando á ensayar el factor 11, en seguida el factor 10, el factor 9, *etc.,* descendiendo.

371. Como en el presente ejemplo los dos números son evidentemente divisibles por los factores 9 y 4, haciendo la multiplicación de éstos, se tomará por primer factor común 36, y se le anotará á la derecha de cada uno de los términos, de este modo:

dividendo……….. 612108 = 36 X
divisor ………….. 62460 = 36 X

Haciéndose ahora la división de cada término por el factor 36, se obtiene el siguiente resultado:

612108 = 36 X 17003
62460 = 36 X 1735

En este estado, se ve claramente que 8, 6, 5, 4, 3, 2, no pueden ser factores comunes entre 17003 y 1735. En este concepto, para saber si entre ellos queda oculto algún factor común, se hace indispensable recurrir al método establecido en el art. 367. Hecha la operación, resulta como divisor común el número 347, que, colocado al lado del factor común 36, anteriormente descubierto, da por resultado final:

36 X 347 = 12492,

que es el *máximo común* divisor entre los números 612108 y *62460.*

372. Si se quisiese tener el máximo común divisor entre tres ó más números, se buscará desde luego el máximo común divisor, con relación á dos de los números dados; en seguida se buscará el máximo común divisor, entre otro de dichos números y el máximo común divisor de los dos números tomados al principio, y así sucesivamente.

El cálculo se haría más prontamente comenzando por los números más pequeños.
Sea, por ejemplo:

3744, 624, 4896, 816.

Su máximo común divisor es 2 X 2 X 2 X 2 X 3 = 48.

373. Las operaciones que acaban de practicarse para encontrar el *máximo común divisor* y las que se efectuaron para .componer los *múltiples* y *divisores* de un número, autorizan para establecer las siguientes:

374. REGLAS

Para encontrar el máximo común divisor entre dos números, es preciso dividir el más grande por el más pequeño; éste último por el resto de la división; en seguida el primer resto por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente, hasta que se llegue á un resto nulo: el último divisor que se haya empleado será el máximo común divisor.

Cuando un número divide exactamente otro número, él divide todos los múltiples de éste (art. 368).

Cuando un número divide exactamente dos números, él divide exactamente la suma de éstos (art. 369).

Cuando un número divide exactamente otros dos números, divide también exactamente su diferencia. Para patentizarlo, basta reemplazar el signo + por el signo - en la operación practicada, bajo el artículo que acaba de citarse (art. 369).

Consiguientemente:

Cuando un número divide exactamente una suma, compuesta de dos partes, y la una de sus partes, él divide exactamente la otra parte; pues la segunda es la diferencia entre la suma y la primera parte.

Cuando un número divide exactamente una de las partes de la suma, compuesta de dos partes, y no divide exactamente la otra parte, no divide la suma.

CUESTIONARIO

¿Cuando es que dos números son primarios entre si? (365).- ¿Qué se entiende por máximo común divisor? (366).- ¿Qué medios hay para encontrar el máximo común divisor de dos números? (367).- ¿Cómo se puede abreviar la operación conducente a obtener el máximo común divisor? (370).- ¿Cómo se obtiene el máximo común divisor de tres ó mas números? (372).- ¿Qué reglas fluyen de la operación conducente a encontrar el máximo común divisor de dos ó mas números? (374).

EJERCICIOS

sobre el máximo común divisor

Encontrar el máximo común divisor de los números siguientes:

735 y 240; 4158 y 456; 23456 y 1849.

VIGESIMA-SEXTA LECCIÓN.

Transformación de las fracciones

375. Hay dos transformaciones principales que hacer sufrir á las fracciones:

1ª. Reducir dos ó más fracciones á un común denominador;
2ª. Reducir una fracción á una expresión más simple.

El estudio que hemos hecho de las propiedades de los números, va á servirnos de mucho para operaciones que acaban de enunciarse.

Un ejemplo bastará, hijos míos, para que forméis una idea de la necesidad de efectuar esas transformaciones.

La adición, por ejemplo, tiene por objeto, como lo sabéis, reunir dos ó más cantidades en una sola. En este concepto, supongamos que se trata de saber qué suma forman

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$$

Con las nociones que hasta el presente habéis adquirido, no podríais, hijos míos, resolver la cuestión, y os veríais embarazados desde el primer paso; porque no podríais agregar $\frac{1}{2}$ á $\frac{1}{3}$, ni sabríais qué suma forman estas dos fracciones reunidas. Voy, pues, á enseñaros el modo de allanar la dificultad.

§.....

REDUCCIÓN DE LAS FRACCIONES A UN COMÚN DENOMINADOR

Para resolver la cuestión, tomemos, por ejemplo, la vara española, y fijémonos en sus diversas divisiones y subdivisiones.

376. Sus principales divisiones son:

$\frac{1}{2}$ *(media vara).*

$\frac{1}{3}$ *(un tercio de* vara, ó simplemente *una tercia* [*]).

$\frac{1}{4}$ (un cuarto » » » *una cuarta)*

Las principales subdivisiones podemos reducirlas á:

$$\frac{1}{6'}\ \frac{1}{8'}\ \frac{1}{12'}\ \frac{1}{18'}\ \frac{1}{36}\ \text{y}\ \frac{1}{432'}$$

denominadas respectivamente *sesma, octava, dozavo, diez-y-ocho* AYO, *pulgada* y *línea.*

377. Contrayéndonos ahora á las dos primeras fracciones del ejemplo propuesto, y transformándolas en pulgadas, tendremos:

$$\frac{1}{2}\ \text{vara} = \frac{18}{36}$$

$$\frac{1}{3}\ \text{vara} = \frac{12}{36}$$

de donde resulta que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} = \frac{30}{36}$$ = 30 pulgadas. <27> pág. 12 del Ap.

Del mismo modo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{37}{36}$$ = 1 *vara* y 1 *pulg.*

Según se ve, para poder sumar dos ó más fracciones ordinarias, es preciso ante todo, cambiar cada una de ellas con otra fracción equivalente, pero con la condición de que ambas, ó todas ellas, han de tener un mismo denominador, el cual, por esta razón, se llama *denominador común.*

378. Sucede, empero, que si se ofrece sumar, por ejemplo, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$, sujetándonos á la vara española, no podemos hacerlo, porque ninguna de estas fracciones puede ser transformada exactamente en pulgadas ni en líneas. En efecto:

1 vara = 36 *pulgadas.*
$\frac{1}{5}$ » = *7 pulgadas* + $\frac{1}{5}$ de *pulgada,* fracción que no está señalada en la vara.

1 vara = 432 *líneas.*
$\frac{1}{5}$ » = 86 *líneas* + $\frac{2}{5}$ de *línea,* que tampoco se halla señalada.

379. Sin ir más lejos, se comprende que las subdivisiones de la vara no se prestan sino para la transformación de un número muy reducido de fracciones; y se comprende también que no podría subdividirse la vara, ni ninguna otra medida de longitud, de tal modo que cada clase de fracción correspondiese á un número exacto de esas sub-divisiones, porque la variedad de fracciones es infinita; pero, si no es posible hacer materialmente esa infinidad .de

----
(*) También se llama *un pie.*

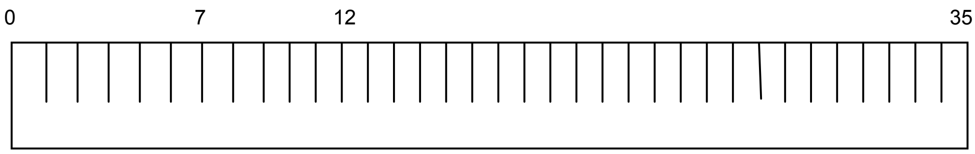
subdivisiones, puede uno muy bien hacerla mentalmente, como mejor convenga, á efecto de transformar todas las fracciones que se propongan, en otras que tengan un d*enominador común.*

J.- Haznos sentir, papá, con una demostración material, lo que acabáis de explicarnos.

P.- Pongamos por caso el propósito de saber qué suma forman las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{7}$, que, como ya lo hemos dicho, no se hallan señaladas en la vara española. A este fin me valgo del siguiente arbitrio:

380. Me figuro una vara de igual longitud que la vara española, pero enteramente lisa, esto es, sin división alguna. Me figuro, además, que divido esa vara imaginaria en 35 partes iguales, á las cuales doy el nombre de *treinta* y *cinco* avos de vara; que en seguida tomo siete de esas divisiones, es decir, de 0 á 7 *(ver* la *figura* que *sigue),* que corresponden exactamente á la *quinta parte* de la vara, porque, en efecto la quinta parte de 35 es 7; que, después, tomo las 5 divisiones que se hallan á la derecha de 7, esto es, de 7 á 12, las cuales corresponden exactamente á una *séptima parte* de vara, siendo la séptima parte de 35, 5.

Ahora es claro, que esas dos cantidades reunidas $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$ forman 12 treinta y cinco avos, que es la *suma buscada.*



381. Para concluir, debo deciros: que, así como he imaginado una vara dividida en 35 partes iguales, puede uno imaginarse que ella está dividida en cualquiera otro número de partes iguales (por grande que sea el número, con tal de que sus divisiones contengan exactamente las fracciones dadas), dando á ese número el nombre de *denominador común.*

R.- Pero, ¿por qué medio podremos encontrar ese número?

P.- Eso es lo que nos proponemos ver; mas, ante todo conviene imbuiros en ciertos conocimientos preliminares, que nos conducirán á establecer las reglas consignadas en todos los tratados de Aritmética.

Nosotros seguiremos, especialmente, á *Mr. Adhémar,* y tomaremos algo de *MM. Dumouchel et Dupuis,* advirtiendo que, según Mr. Adhémar, los principios que hay que establecer al respecto, son los más esenciales de la Aritmética.

Dijimos, en el art. 296, que es importante conocer lo cambios que se operan en una fracción, cuando se hace variar el uno ó el otro de sus términos, *ó* los dos á la vez.

382. Sea, por ejemplo la fracción $\frac{3}{4}$

Si yo multiplico su numerador por 5, tendré por resultadó $\frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$.

Para conocer el efecto producido, basta fijarse en que la fracción propuesta valía 3 veces $\frac{1}{4}$, y que la fracción actual vale 15 veces $\frac{1}{4}$. Y bien: el valor de cada una de las partes de que se componen estas fracciones, ha quedado el mismo, y sólo ha aumentado su número: en lugar de 3 partes se tienen 15, es decir, 5 veces otro tanto. Resulta la fracción multiplicada por 5. Fluye de ahí este principio:

383. *Multiplicando el numerador de una fracción, ó de una expresión fraccionaria, por 2*, 3, 4… *se hace la fracción ó expresión fraccionaria* 2, 3, 4... *veces tan grande como era al principio.*

Consiguientemente (haciendo extensiva la regla, á los números enteros)*, multiplicando el dividendo por 2, 3,* 4… *se hace el cociente 2, 3,* 4, *veces tan grande como el primitivo cociente.*

384. Supongamos, al contrario, que se haya multiplicado el denominador por 5. Entonces se tendría $\frac{3}{4x5}$, es decir, $\frac{3}{20}$.

Se reconoce aquí que el número de partes de que se compone la fracción, ha quedado el mismo, y que sólo ha cambiado el valor de cada una de ellas. En efecto, suponiendo que la vara se halle dividida en 20 partes iguales, tendremos:

1 vara = $\frac{20}{20}$

$\frac{1}{4}$ " = $\frac{5}{20}$

$\frac{3}{4}$ " = $\frac{15}{20}$, que es el valor exacto de la fracción; mas, por efecto de la multiplicación del denominador, ha quedado en $\frac{3}{20}$ de donde se sigue que, cuando se multiplica el denominador de una fracción por 2, 3, 4… , su valor decrece en razón inversa de la importancia de estos multiplicadores.

385. *Multiplicando el denominador de una fracción, ó expresión fraccionaria, por* 2, 3, 4…, su valor viene á reducirse á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ …. del valor primitivo.

386. Por consecuencia (haciendo extensiva la regla á los números enteros): *multiplicando el divisor por* 2, 3, 4... *se reduce el cociente á* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ … , *del valor que tenia anteriormente.*

Ahora bien: combinando los dos principios antedichos, se ve que, *si se multiplica* el numerador por 5, la fracción aumenta de valor en proporción á 5; pero se ve también que ella disminuiría en igual proporción, si se multiplicase su denominador por 5; de suerte que, destruyendo esta segunda operación el efecto de la primera, se puede decir que, en general:

387. *Una fracción, ó expresión fraccionaria, no cambia* de *valor cuando se multiplican sus dos términos por* un *mismo número.*

Otro tanto hay que decir del cociente de dos números enteros, cuando el dividendo y el divisor han sido multiplicados por un mismo número.

Efectos análogos resultan de la división. Así, por ejemplo, sea a fracción $\frac{15}{24}$.

Dividiendo el numerador por 3, tenemos $\frac{1:3}{24} = \frac{5}{24}.$ fracción que sólo vale parte de la fracción dada, pues que, siendo las partes de la misma especie, ella no contiene sino 5, mientras que la primera contenía 15

388. *Dividiendo el numerador* de *una fracción, ó expresión fraccionaria, por* 2, 3, 4…, *cuando ello es posible, quedará esa fracción dividida por* 2, 3, 4...

Si se hubiese dividido el denominador por 3, se habría tenido $\frac{15}{24:3} = \frac{15}{8}$; fracción tres veces tan gran grande como la fracción propuesta; luego,

389. *Dividiendo el denominador* de *una fracción, ó expresión fraccionaria, por* 2, 3, 4..., *cuando es posible, se habrá multiplicado esa fracción ó expresión fraccionaria por* 2, 3, 4…

Por consiguiente, tratándose de números enteros, cuando se divide el divisor por 2, 3, 4... (siendo ello posible) el cociente aumenta de valor en proporción á 2, 3, 4...

390. [NOTA.- Generalmente, se acostumbra decir: «Tal número es 2, 3, 4,... 25... veces *más grande* que tal otro número»; y también «tal número es 2, 3, 4,... 25... veces más *pequeño* que tal otro». Nosotros, por razones que se expondrán en otro lugar, adoptaremos las locuciones siguientes:

Tal número es el DUPLO, *el* TRIPLE, el CUADRUPLO,... 25… VECES MÚLTIPLO *de tal otro;*

Tal numero es UNA $\frac{1}{2}$, UN $\frac{1}{3}$ UN $\frac{1}{4}$,… $\frac{1}{25}$ ... de tal número]

De la combinación de los dos principios que acaban de exponerse, resulta que:

391. *El valor de una fracción, ó expresión fraccionaria, no cambiará dividiendo los dos términos por un mismo número.*

Igual cosa sucederá con el cociente de dos números enteros, cuando el dividendo y el divisor hayan sido divididos por un mismo número.

«Siendo los principios que acaban de establecerse la base de casi todas las operaciones del cálculo, los reuniremos en un solo cuadro».

392

Multiplicando	*el numerador*	*se multiplica*	*la fracción.»*
	el denominador	*se divide*	
Dividiendo	*el numerador*	*se divide*	
	el denominador	*se multiplica*	

(«Yo aconsejaría al lector se fijase bien en que no se trata aquí sino de la multiplicación ó de la división, y que se equivocaría si pensase que una fracción no cambia de valor agregando á los dos términos, ó sustrayendo de ellos un mismo número»).

J.- Y, ¿en qué sentido variaría el valor?

P.- Aunque, á juicio de Mr, Adhémar, no es este el lugar oportuno para tratar ese punto, yo quiero tocarlo de paso, para satisfacer de algún modo, hijos míos, la picazón de vuestra curiosidad.

393. Excepto el caso en que la expresión fraccionaria represente a unidad, como $\frac{2}{2'}$ $\frac{5}{5'}$ $\frac{7}{7}$ …., en que se puede aumentar á cada uno de los términos, *ó* sustraer de ellos un número cualquiera sin alterar el valor, de la fracción, en todos los demás casos variará el valor ya en un sentido ya en otro, según que la fracción sea verdaderamente tal, *ó* una expresión fraccionaria.

CUESTIONARIO

¿Cuáles son las principales transformaciones que pueden operarse sobre las facciones ordinarias? (375).- Dé Vd. a conocer las principales divisiones y subdivisiones de la vara española (376).- Transforme Vd. *Una mitad* y una tercia de vara en pulgadas, y haga Vd. la suma de ellas (377).- ¿Qué sucede con una fracción cuando se multiplica su numerador? (388).- ¿Qué resulta cuando se multiplica el dominador de una fracción? (385).- ¿Y cuando se multiplica sus dos términos por un mismo número? (387).- ¿Qué alteración se opera cuando se divide el numerador de una fracción? (388).- ¿Si se divide su denominador? (389).- ¿Y cuando se divide sus dos términos por un mismo número? (391).- Resuma Vd. lo que acaba de exponer sobre las fracciones (392).

VIGÉSIMA-SÉPTIMA LECCIÓN

394. *Para obtener el denominador común de dos ó más fracciones,* hay que recordar que una fracción no cambia de valor, cuando se multiplican sus dos términos por un mismo número (art. 387), verbi-gracia:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{14}{21}\text{, etc.}$$

Se ve, en efecto, que las tres posteriores variantes no son sino la fracción $\frac{2}{3}$ cuyos dos términos se han multiplicado sucesivamente por 2, por 4, por 7.

395. De ahí se concluye que una fracción cualquiera puede tener una infinidad de expresiones diferentes, sin alterarse su valor.

396. Hay todavía que notar, y esto es muy importante, que los denominadores de todas esas fracciones son múltiples de 3: así debía ser, porque, cualquiera que sea el número por el que se multipliquen los dos términos de la fracción $\frac{2}{3}$ el nuevo denominador contendrá siempre el factor 3.

397. *Toda fracción cuyo denominador sea* 3, *no podrá transformarse sino en otra que tenga por dominador un múltiple de* 3.

398. Recíprocamente: *todo número múltiple de* 3 *podrá servir de denominador á una fracción tal como* $\frac{2}{3}$ *.*

Así, por ejemplo, si se quisiese transformar $\frac{2}{3}$ en una fracción que tuviese por denominador 36, habría que buscarse, desde luego, por qué número debe multiplicarse el factor 3 para obtener 36 como producto; ó, en otros términos: siendo conocido el producto 36 y uno de sus factores, que es 3, buscar el otro factor. Según lo establecido en el artículo 102, el factor que se necesita es 12.

Ahora bien; multiplicando por 12 ambos términos de la fracción $\frac{2}{3}$, tendremos:

$$\frac{2}{3} \text{ X } 12 = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{24}{36}.$$

Por un razonamiento análogo se reconocerá que *todo número múltiple de* 4 *puede servir de denominador á la fracción* $\frac{3}{4}$.

De ahí fluye la siguiente conclusión:

399. *Todo número que goza de la doble propiedad de ser al mismo tiempo múltiple de* 3 *y de* 4, *podrá servir de denominador común á las fracciones* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$*.*

De manera que, si quisiésemos trasformar esas dos fracciones en otras dos que tuviesen 48 por denominador común, es fácil reconocer que sería menester multiplicar los dos términos de la fracción $\frac{2}{3}$ por 16 (que es el tercio de 48), y se tendría:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 16}{3 \times 16} = \frac{32}{48};$$

En seguida, multiplicando los dos términos de la fracción $\frac{3}{4}$ por 12, se obtendría : —

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{36}{48};$$

de suerte que las dos fracciones propuestas, $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{4}$ serían reemplazadas por las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{36}{48}$ forma bajo la que sería muy fácil compararlas.

400. Acabamos de reconocer que el denominador común de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, debía ser múltiple de 3 y de 4; luego: — todo número en cuya composición entren los factores 3 y 4 convendrá para esta transformación.

401. *Regla.*- En general, para que una fracción pueda ser transformada en otra fracción, es indispensable que el denominador de ésta nueva fracción contenga el factor ó factores de la fracción primitiva, reducida á su expresión más simple.

402. Á lo dicho en los dos artículos precedentes debe agregarse que, entre los diversos números que pueden convenir para servir de denominador común, el más pequeño de entre ellos, debe ser siempre el que se emplee preferentemente.

En el ejemplo precedente, puede servirse, como se ha hecho, del número 48; podría tomarse también *36,ó* 60, ó 24; mas es preferible emplear el número 12, porque es el más pequeño de todos los números que gozan de la propiedad de ser exactamente divisibles por 3 y por 4; de manera que se tendrá:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

403. Los mismos razonamientos se aplicarán á un número cualquiera de fracciones.

Sean, por ejemplo, las fracciones:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$$

Se reconocerá, como anteriormente, que todo número múltiple de 3 podrá servir de denominador á la fracción equivalente á $\frac{2}{3}$ que todo múltiple de 4 convendrá á la fracción $\frac{3}{4}$ todo múltiple de 6 á la fracción $\frac{5}{6}$, etc. Luego, en fin, todo número que goce de la propiedad de ser al mismo tiempo múltiple de 3, 4, 6, 8, 12, convendrá como denominador común á las fracciones propuestas.

Siendo el más pequeño múltiple, como acabamos de decirlo, el que se debe emplear preferentemente, se le obtendrá por los medios indicados en el arto 358. Así se tendrá:

$$3=3(*)$$
$$4=2X2$$
$$6=2X3$$
$$8=2X2X2$$
$$12 = 2 X 2 X 3$$

Denominador común: 3 X 2 X 2 X 2 = 24.

Siendo 24 el más pequeño múltiple, se multiplicarán los dos términos de la fracción $\frac{2}{3}$ por la tercera parte de 24, que es 8; los dos términos de $\frac{3}{4}$, por la cuarta parte de 24; los dos términos de $\frac{5}{6}$ por la sexta de 24, y así, en seguida; lo que dará:

(*) Preciso es recordar que el número 3 puede descomponerse en dos factores, esto es, 1 x 3; pero que es de uso en la descomposición en factores no tener en cuenta el factor 1 (art. 316).

$$\frac{3}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \times 2}{12 \times 2} = \frac{22}{24}$$

De suerte que las fracciones $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{12}{12}$, son reemplazadas por las fracciones equivalentes

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}, \frac{22}{24}$$

404. En general, *la reducción de fracciones de un mismo denominador se compone de dos partes, á saber: la busca del denominador común y la transformación.*

405. 1ª. parte: *Para obtener el denominador común, se compondrá* (art. 358) *el más pequeño múltiple de los denominadores de las fracciones propuestas.*

2ª. parte: *Obtenido el denominador común, se le dividirá por el denominador de la fracción que se quiera trasformar, y el cociente será el número por el que deban multiplicarse los dos términos de esa fracción.*

406. ADVERTENCIA.- Antes de *buscar el denominador común* de las fracciones propuestas, débense *reducir las fracciones d su expresión más simple* (por los medios que se indicarán después), por ejemplo:

$$\frac{9}{36}\ ,\ \frac{8}{72} = \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{9}\ .$$

§

407, Hablando de los *números fraccionarios,* dice M. Adhémar: «Algunas personas tienen la costumbre, cuando encuentran en el cálculo un número fraccionario (1), de efectuar inmediatamente la división indicada, á fin de poner en evidencia las unidades enteras contenidas en ese número; así, ellas dirían:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

«Aunque este resultado sea exacto, no debe operarse así, porque la expresión $5 + \frac{2}{3}$ es menos simple y menos cómoda para el cálculo que $\frac{17}{3}$. En general, á menos que no se reconozca, de antemano, que la división ha de hacerse *sin resto,* es menester no apresurarse á efectuar la división, y se debe dejar esta operación para lo último; esto es, hasta el momento en que la aplicación que se propone del cálculo, exija que se conozca cuántos enteros hay contenidos en el resultado.

----

(1) Como M. Adhémar no hace la distinción de *números fraccionarios* y de *expresiones fraccionarias*, sino que comprende a éstas y aquéllos bajo la única denominación de números fraccionarios, se hace necesario advertir que él habla aquí de lo que hemos llamado *expresiones fraccionarias* (art. 233).

CUESTIONARIO

¿Qué debe tenerse presente para obtener el denominador común de dos ó más fracciones? (394).- ¿Qué se deduce de ahí? (395).- ¿Qué condición se requiere para transformar una fracción dada en otra fracción? (401).- ¿Qué número debe elegirse preferentemente para servir de denominador común? (402).- ¿Cómo se procede para obtener el denominador común? (405).

EJERCICIOS

Fracciones dadas: $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}, \frac{7}{30}, \frac{13}{2}, \frac{7}{36}$.

Denominador común: 2 X 2 X 3 X 5 X 2 X 3 = 360.

Fracciones transformadas: $\frac{270}{360}, \frac{300}{369}, \frac{198}{360}, \frac{96}{360}, \frac{84}{360}, \frac{195}{360}, \frac{70}{360}$.

Fracciones dadas: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$

Denominador común: 2 X 3 X 2 x 5 x 7 x 2 x 3 = 2520.

Frac. Transformadas: $\frac{1260}{2520}, \frac{840}{2520}, \frac{630}{2520}, \frac{504}{2520}, \frac{420}{2520}, \frac{360}{2520}, \frac{315}{2520}, \frac{280}{2520}, \frac{252}{2520}$.

Fracciones dadas: $\frac{4}{7}, \frac{5}{11}, \frac{8}{134}$.

Denominador común: 7 x 11 x 13 = 1001.

Fracciones transformadas: $\frac{572}{1001}, \frac{455}{1001}, \frac{616}{1001}$ <28> p. 1 el Ap.

VIGÉSIMA-OCTAVA LECCIÓN

Simplificación de las fracciones

408. *Simplificar una fracción* es expresarla en términos, más sencillos; esto es, reducir á menos su numerador y su denominador, sin alterar el valor de la fracción.

409. Se llama fracción *reducida á su más simple expresión, ó fracción irreducible,* la que no puede ser más simple de lo que es.

410. Para simplificar una fracción, es preciso recordar lo que precedentemente se ha dicho *(art.* 391): que una fracción no cambia de valor, cuando se divide cada uno de sus términos por un mismo número.

Sea la fracción $\frac{15}{18}$. Si se dividen sus dos términos por 3, se tendrá:

$$\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3} = \frac{5}{8};$$

expresión más simple que la primera, pues que los dos términos son números más pequeños y de ahí se deduce que,

411. *Para simplificar la expresión de una fracción, es preciso dividir sus dos términos por un mismo número;* así,

$$\frac{36}{60} = \frac{15}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Todas estas fracciones son expresiones diferentes de una misma cantidad; pero se reconoce que $\frac{3}{5}$ es la más simple de todas. Puédese afirmar en general, que:

412. Se *habrá llegado á obtener* la *expresión más simple* de *una fracción, cuando se hayan suprimido todos los factores comunes á sus dos términos;* ó bien, cuando los dos términos de esta fracción, sean *primarios entre si.*

413. Ante todo, es preciso reconocer la presencia de los factores comunes. Al *efecto,* recordemos que el máximo común divisor de dos números, es el producto de todos los factores comunes; resulta de ello que, si se dividen los dos términos de una fracción por su máximo común divisor, los cocientes que se obtengan para estos dos términos, serán primarios entre sí, y que la fracción será reducida á su más simple expresión; mas, como la busca del máximo común divisor depende de una operación bastante larga, será mejor desembarazar ambos términos de la fracción propuesta, de todos los factores comunes, para lo que hemos dado (art. 370) los medios de reconocer inmediatamente su existencia, salvo el recurso de someter los dos términos obtenidos á la busca del máximo común divisor, si se presume que exista todavía entre ellos algún factor común.

Sea la fracción $\frac{62460}{612108}$. Después de haber dividido los dos términos, sucesivamente, por los dos números 4 y 9 (ó por su producto 36), se obtiene $\frac{1735}{17003}$. Buscando el máximo común divisor entre 1735 y 17003, se encuentra 347. En fin, dividiendo los dos últimos términos por este número, se obtiene $\frac{5}{49}$, como expresión la más simple de la fracción,

Disposición de cálculo

$$\frac{62460}{612108} = \frac{15615}{153027} = \frac{1735}{17003} = \frac{5}{49}.$$

Se puede también disponer los números como sigue:

$$\begin{array}{c} 1735 \\ \cancel{15615} \\ \cancel{62460} \\ \hline \cancel{612108} \\ \cancel{153027} \\ 17003 \end{array} = \frac{5}{49}$$

414. En los más de los casos se puede descuidar la investigación del divisor común; porque sucede, en general, (según Mr. Adhémar) que, sobre cincuenta fracciones en cuyos dos términos *se* hayan suprimido los factores comunes, tales como 2, 3, 5 y 11, no quedarán tal vez dos que sean todavía susceptibles de ser simplificados; de suerte que, aplicando á todas esas fracciones la busca del común divisor, se haría cuarenta y. ocho veces esta operación inútilmente, y el tiempo que se perdería en ello estaría lejos de quedar compensado por la ventaja de reducir dos ó tres fracciones á su expresión más simple.

[NOTA.- *Los que quieran profundizar esta cuestión, pueden consultar la Aritmética de Mr. Adhémar, núm.136].*

Suprimiremos ordinariamente en el cálculo los factores 2, 3, 5 y 11, cuando se encuentren en cada uno de los términos de una fracción, y no someteremos los dos términos así reducidos, á la busca del divisor común, sino cuando la fracción que de ello resultare haya de ser frecuentemente empleada en el cálculo y aplicaciones.

He aquí algunos ejemplos:

$$\frac{1092}{1248} = \frac{91}{104} = \frac{7}{8},$$

$$\frac{199656}{480024} = \frac{2773}{2667} = \frac{47}{113},$$

$$\frac{190080}{5702400} = 30 .$$

415. Cuando los dos términos de una fracción se hallan descompuestos en factores, es preciso despejarlos de todos los factores comunes, antes de efectuar las multiplicaciones indicadas.

Sea, por ejemplo, la fracción

$$\frac{3 \times 7 \times 18 \times 9 \times 5 \times 8 \times 7 \times 11}{4 \times \underset{7}{21} \times 6 \times 12 \times 4 \times 22 \times 24} = \frac{105}{128}$$

Se suprimirá de antemano el factor 3 en el numerador; en seguida se podrá tomar el tercio del factor 21 *ó* de cualquier otro, del divisor, que sea divisible por 3; y el resultado se escribirá debajo, como se ve en el ejemplo propuesto. Por esta operación, los dos términos de la fracción habrán sido divididos por un mismo número, y el valor de esta fracción no habrá cambiado *(art.* 391). El factor 7, común á los dos términos, podrá ser suprimido: se barreará el factor 6 en el denominador, y se reemplazará en el numerador el factor 18 por 3, que se escribirá encima; así en seguida, hasta que se haya hecho desaparecer todos los factores comunes á los dos términos. Multiplicando entre ellos los restantes factores, se tendrá la expresión simplificada de la fracción.

416. No debe olvidarse barrear cada factor que se suprima *ó* divida. Es indiferente el orden en que se hagan las reducciones; sin embargo, vale en lo posible, comenzar por los factores más grandes, por cuanto la supresión de ellos conduce más prontamente á obtener la expresión buscada.

CUESTIONARIO

¿Qué significa *simplificar una fracción?* (408).- ¿Cuándo es que una fracción está reducida á su más simple expresión? (409).- ¿Qué procedimiento se sigue para simplificar una fracción? (410 y 411).- Y ¿cómo se procede para reducir una fracción á su expresión más simple? (412}.- ¿En qué caso debe restablecerse el factor *uno* en el numerador de una fracción reducida á su expresión más simple? (417).

EJERCICIOS

1er caso: $$\frac{6 \times 12 \times 24 \times 10 \times 96 \times 9 \times 10 \times 24}{40 \times 8 \times 15 \times 126 \times 36 \times 15} \text{ -- } \frac{384}{35}$$

2º. caso: $$\frac{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 11 \times 8 \times 9}{4 \times 5 \times 6 \times 15 \times 24 \times 43 \times 4} \text{ -- } \frac{1}{30}.$$

417. En este último caso, los factores del numerador entran también como factores en el denominador, de donde se sigue que, destruyéndolos en los dos términos, parecería que ya no debe quedar nada en el numerador; lo cual sería un error. Debe recordarse *(art.* 316) que todo número contiene el factor 1 en su composición, y que hallándose sobrentendido este factor, se le debe restablecer, toda vez que sea necesario. Así, por ejemplo, mientras haya muchos factores, como 2 X 3 X 5…, se dividirá por 2 suprimiendo el factor 2, por 3 suprimiendo el factor 3, etc. Mas, si el numerador estuviese reducido á una sola cifra, como 7, por ejemplo, no habría derecho para considerarlo como factor, sino como término, y su supresión no equivaldría á la división. En tal caso, sería menester reemplazarlo por 7 X 1; después, suprimiendo el factor 7, quedaría 1 por cociente.

Por otra parte, en la práctica bastará decir: *séptimo de* 7 *es* 1, que se escribirá barreando el 7.

En cuanto al denominador, pudiendo éste ser considerado siempre como divisor, y, por consiguiente, como factor; no puede presentarse la misma dificultad á su respecto.

En efecto, $$\frac{\overset{1}{7}}{\underset{1.}{7}} = \frac{1}{1} = 1.$$

VIGÉSIMA-NOVENA LECCIÓN

Operaciones sobre las fracciones ordinarias

ADICIÓN

Si se ha comprendido bien lo que precede, el cálculo de las fracciones no presentará dificultad alguna.

418. Supongamos que se quieran adicionar fracciones que tengan el mismo denominador: se hará la suma de los numeradores; después se escribirá, debajo, el denominador común.

Así, por ejemplo:

$$\frac{11}{20}+\frac{4}{20}+\frac{7}{20}+\frac{5}{20} = \frac{11+4+7+5}{20}=\frac{27}{20}$$

419. Si las fracciones dadas no tuviesen el mismo denominador, se comenzará por reducirlas, obrando como lo hemos hecho (art. 403); en seguida se las adicionará como en el ejemplo precedente.

Así:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{11}{12}=\frac{16}{24}+\frac{16}{24}+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}+\frac{22}{24}$$

$$=\frac{1+18+20+21+22}{24}=\frac{97}{24}$$

He aquí como se dispondrá el cálculo:

Fracciones dadas ….. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{11}{12}$

Denominador común... 2 x 2 x 2 x 3 = 24

Transformación

$$\left.\begin{array}{r} \mathit{16} \\ \mathit{18} \\ \mathit{20} \\ \mathit{21} \\ \underline{\mathit{22}} \\ \underline{\mathit{97}} \end{array}\right\} \text{24 (denominador común)}$$

Suma = $\frac{97}{24}$

EXPLICACIÓN

Después de haber compuesto el denominador común, se ha hecho la transformación, con arreglo al art. 405, diciendo: *la unidad, dividida en* 24 *partes iguales, vale* $\frac{24}{24}$ *; luego* $\frac{1}{3}$ *de unidad valdrá una tercera parte de la unidad, esto es,* $\frac{8}{24}$ *y, por consiguiente, la primera fracción dada,* $\frac{2}{3}$ *, será igual d* 2 X $\frac{8}{24}$ = $\frac{16}{24}$*: pongo, pues,* 16 *como primer sumando.*

En seguida, se ha dicho: $\frac{1}{4}$ *vale la cuarta parte de la unidad, es decir,* $\frac{6}{24}$ *luego la segunda fracción dada* $\frac{3}{4}$ *valdrá tres veces otro tanto* $\frac{18}{24}$: *pongo* 18 *como segundo sumando;* y así por cada una de las fracciones restantes, sujetándolas todas á un denominador común, que se ha colocado, con una llave, al costado de los sumandos, como se ve en la transformación precedente.

420. OTRO EJEMPLO

Fracciones dadas……….. $\frac{7}{12}.+ \quad \frac{8}{15}+ \quad \frac{3}{20}+ \quad \frac{11}{30} + \quad \frac{31}{360}$

Denominador común……… 2 X 2 X 3 X 5X 2X 3= 360

Transformación

$$\left.\begin{array}{r} 210 \\ 192 \\ 54 \\ 132 \\ \underline{155} \\ 743 \end{array}\right\} = 360$$

$$\text{Suma} \quad = \frac{743}{360}$$

EXPLICACIÓN

Se puede también hacer la transformación, razonando de este otro modo:

Para transformar la primera fracción, multiplico sus dos términos por 30 (art. 405), lo que da $\frac{7 \times 30}{12 \times 30} = \frac{210}{360}$. Dejando á un lado el denominador común 360, obtengo como primer sumando, 210. Por lo que toca á la segunda fracción, multiplico sus dos términos por 24 y, haciendo abstracción del denominador común, tengo como segundo sumando, 192.

421. *Nótese* que, una vez descompuesto en factores el denominador común, se tiene la ventaja de encontrar el número, por el que han de multiplicarse los dos términos de cada tracción) sin más que suprimir en el denominador común los factores componentes del denominador dé la fracción dada, y multiplicar los factores restantes entre sí. Así, siendo 12 el denominador de la primera fracción dada, basta suprimir, en el denominador común, los factores de 12 (que son 2 x 2 X 3), y multiplicar los factores restantes, para encontrar el número 30.

Asimismo, en cuanto á la segunda fracción, siendo 15 su denominador, con suprimir en el denominador común los factores de 15, esto es, 3 x 5, y multiplicar entre sí los factores restantes 2 X 2 X 2 X 3, sé encuentra el número 24.

Por igual razonamiento se ha hecho la trasformación de las demás fracciones dadas.

422. En general, *la adición de las fracciones se compone de tres partes*, á saber:

1ª. *La composición del denominador común;*
2ª. *La trasformación de las fracciones;*
3ª. Su adición.

423. Si hubiese números enteros que hayan de reunirse á las fracciones propuestas, se podrá proceder de dos modos:

1º. Hacer de pronto la suma de los enteros, después la de las fracciones, y reunir por último las dos sumas;

2º. Reducir los enteros al mismo denominador común de las fracciones dadas, y hacer en seguida la suma de todo .como precedentemente.

EJEMPLO

$$7 + \frac{4}{5} + \frac{3}{4} +2+5+ \frac{7}{8} .$$

Denominador común = 40.

Se tiene por los enteros 14 X $\frac{40}{40}$ = 560

Por los $\frac{4}{5}$ ………………………………. = 32

Por los $\frac{3}{4}$ ………………………………. = 30   40

Por los $\frac{7}{8}$ ………………………………. = 35

657

Suma= $\frac{657}{40}$

OBSERVACIÓN

424. En la práctica, cuando los sumandos ó alguno de ellos contengan *enteros* de más de una cifra, se dispondrá el cálculo y se le ejecutará como va á verse: Sean los sumandos ó números dados

$$12+\frac{1}{2}+10\frac{1}{3}+7+2\frac{5}{6}.$$

Operación principal

$12\ \frac{1}{2}$

$10\ \frac{1}{3}$

7

$\underline{20}\ \frac{1}{2}$

Suma= $50\ \frac{2}{3}$

Operación auxiliares (*)

1ª. Componer el más pequeño denominador común:

$$2 \times 3 \times = 6$$

2ª.Transformar las fracciones dadas:

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3}+\frac{1 \times 2}{3 \times 2}+\frac{5}{6}=\frac{10}{6}$$

3ª. Reducir este último resultado á su más simple expresión:

$$10 \,\underline{|\,6\quad}\ \ 1+\frac{4}{6}=\frac{12}{3}$$

EXPLICACIÓN

Una vez asentados los sumandos ó números dados, se ha procedido á efectuar las *operaciones auxiliares.* Reducido el resultado á su más simple expresión, se ha llevado la fracción $\frac{2}{3}$ á la línea de la *suma,* colocándola debajo de las fracciones dadas, y se ha agregado el entero 1 al orden de las unidades simples de los sumandos, etc., hasta haberse obtenido la suma $50\frac{2}{3}$.

SUSTRACCIÓN

Hay que considerar dos casos, según que las fracciones tengan el mismo denominador 6 denominadores diferentes.

425. *Primer caso.*- REGLA.- Para sustraer una fracción de otra, cuando ambas tienen el mismo denominador, se quita del numerador del restando el numerador del restador, y debajo del resultado se escribe el denominador común.

EJEMPLO

Fracciones propuestas: 31 *pulgadas* de vara, menos 8 *pulgadas.*

Operación — $\frac{31}{36} = \frac{8}{36}\ \frac{31-8}{36} = \frac{23}{36}$ = 23 *pulgadas.*

426. *Segundo caso.* REGLA. Para sustraer una fracción de otra, cuando tienen diferente denominador, se comienza por reducirlas á. un denominador común; después se deduce el restador del restando, y se da á la diferencia el denominador común.

Fracciones propuestas: $\frac{8}{9}$ de vara, menos $\frac{7}{12}$ de vara.

Denominador común: 3 X 3 X 2 X 2 = 36.

Operación: $\frac{8x4}{9x4} - \frac{7 \times 3}{12x3} = \frac{32-21}{36} = \frac{11}{36}$ = 11 *pulgadas.*

(*) Estas operaciones se hacen ordinariamente en un papel separado, ó cuando, se trabaja á la pizarra, en un espacio reservado en ella para el objeto, según lo demuestra el presente cuadro.

----

427. Si hubiese números enteros mezclados con fracciones, se hará la sustracción por uno de los dos modos indicados para la adición *(art.* 423); pero, si la fracción del restador fuese más grande que la del restando, será menester hacer la sustracción del segundo modo.

EJEMPLO

De 5 varas y $\frac{2}{3}$ de vara se quiere sustraer 4 varas y $\frac{3}{4}$ de vara.

Restando: = 5 + $\frac{2}{3}$.

Restador: = 4 + $\frac{3}{4}$.

Denominador común: 3 X 2 X 2 = 12.

Cálculo

Por el restando 5 X $\frac{12}{12}$ + $\frac{2 \times 4}{3 \times 4}$ = $\frac{60}{12}$ + $\frac{8}{12}$ =68

Por el restador 4 X $\frac{12}{12}$ + $\frac{3 \times 3}{4 \times 3}$ = $\frac{48 \ x \ 9}{12}$ = $\underline{57}$ 12

11

Resto = $\frac{11}{12}$ = $\frac{33}{36}$ = 33 pulgadas de vara, bien entendido

que $\frac{1}{12}$ vale $\frac{3}{36}$ y, por consiguiente, $\frac{11}{12}$ = $\frac{33}{36}$ = 33 pulgadas.

CUESTIONARIO

¿Cómo se adicionan las fracciones que tienen un mismo denominador? (418).- ¿Y cuando las fracciones dadas no tienen el mismo denominador? (419 y 420).- En general, ¿qué operaciones son necesarias para la adición de las fracciones? (422).- Cuando hay que reunir números enteros á las fracciones propuestas, ¿de qué modo se procede? (423).- ¿Cómo se opera cuando hay que sumar números enteros y fraccionarios? (424).- ¿Cómo se sustrae una fracción de otra, cuando ambas tienen el mismo denominador? {425).- ¿Y cuando las fracciones dadas no tienen el mismo denominador? (426).- ¿Cómo se hace fa sustracción cuando hay números enteros mezclados con fracciones? (427).

EJERCICIOS PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

$+ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} = \frac{17819}{2520.}$

$+ \frac{4}{7} + \frac{15}{11} + \frac{8}{13} = \frac{1643}{1001.}$

$7 + \frac{3}{4} + 5 + 6 + \frac{3}{5} + 8 + \frac{2}{3} = \frac{1681}{60}$.

$\frac{8}{10} - \frac{3}{5} \ || \ \frac{9}{12} - \frac{8}{15} \ || \ \frac{23}{24} - \frac{11}{36} \ || \ \frac{95}{100} - \frac{45}{50}$.

De la suma de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$, sustraer la suma de $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$.

De la suma de las fracciones $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ y, $\frac{11}{13}$ sustraer la suma de $\frac{3}{9}$ y $\frac{13}{30}$.

De la suma de las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{9}$, sustraer la suma de $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{15}$ y $\frac{7}{18}$.

TRIGÉSIMA LECCIÓN (1)

Multiplicación

Hay tres casos que examinar, según que se haya de multiplicar una fracción por un número entero, un número entero por una fracción, ó una fracción por otra fracción.

Primer caso. Multiplicar una fracción por un número entero.

428. REGLA. *Se multiplica el numerador de la fracción por el número entero, y se da al producto por denominador el de la fracción. Se extrae en seguida, si ha lugar, los enteros contenidos en el resultado.*

EJEMPLO

$$\frac{2}{5} \text{ x } 4 = \frac{8}{5} = 1 \text{ x } \frac{3}{5}$$

429. También se hace la multiplicación *dividiendo, cuando ello es posible, el denominador de la fracción por el número entero, y dando al cociente por numerador el de la fracción.*

EJEMPLO

$$\frac{7}{10} \text{ x } 5 = \frac{7}{10 : 5} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

M.-
R.- } Nos ocurre una dificultad.

P.- La salvaremos luego. Debo, entre tanto, establecer los dos casos de multiplicación que aun nos faltan.

Segundo caso. Multiplicar un número entero por una fracción.

430. REGLA.- Se *operará conforme á la misma regla dada para multiplicar una fracción por un número entero.*

EJEMPLO

$$4 \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1 = \frac{3}{5}$$

Tercer caso. Multiplicar una fracción por otra fracción

431. *REGLA.- Se formará el producto de los numeradores, y se escribirá, abajo, el producto de los denominadores.*

EJEMPLO

$$\frac{5}{7} \text{ x } \frac{3}{4} = \frac{5 \text{ x } 3}{7 \text{x } 4} = \frac{16}{28}$$

En efecto, multiplicarla fracción $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$, es tomar 3 veces el cuarto de $\frac{5}{7}$.

Luego, multiplicando el denominador por 4, se obtiene $\frac{5}{7 \text{ x } 4}$, que representa el cuarto de $\frac{5}{7}$; no falta, pues, sino que tomar esta cantidad 3 veces, lo que se hará multiplicando el numerador por 3.

----

(1) En la mayor parte de esta Lección hemos seguido á MM. Dumouchel et Dupuis, y principalmente á M. J. Adhémar.

Resulta de lo que precede que $\frac{15}{23}$ representa las $\frac{3}{4}$ partes de la fracción $\frac{5}{7}$.

Esta manera de ver el resultado de la operación precedente, ha hecho que se le dé el nombre de *fracción de fracción.*

P.- Ahora bien, hijos míos: ¿cuáles son las dificultades *ó* dudas que os han asaltado? Tiene Rosa la palabra.

R.- Puesto que también puede hacerse la multiplicación (1er. caso), dividiendo el denominador de la fracción por el número entero, esta operación debería llamarse *división* y no *multiplicación*.

P.- Y tú, Manuel, ¿qué observación tienes que hacer?

M.- La misma que acaba de hacer Rosa, y después (refiriéndome á los tres casos de la multiplicación de fracciones, que no puedo darme cuenta cabal de todo lo que pasa en esas operaciones.

P.- Muy bien, hijos míos; voy, á satisfacer vuestros reparos con el maestro Mr. Adhémar, que, en su tratado de Aritmética, segunda edición, se explica como sigue:

«MULTIPLICACIÓN» (pág. 80)

432. «Para comprender bien lo que vamos á decir hay que volver á la definición de la multiplicación de los números enteros.»

«Hemos dicho que esta operación tenía por objeto componer un número llamado producto, que contuviese al multiplicando tantas veces cuantas unidades contiene el multiplicador. Así, cuando se dice:

$$12 \times 3 = 36,$$

el producto 36 contiene 3 veces al multiplicando 12, porque el multiplicador 3 contiene 3 veces la unidad.»

«Haciendo extensiva á las fracciones la aplicación de ese principio, se ha razonado como sigue:

Para multiplicar una cantidad por $\frac{1}{3}$, se tomará el tercio del multiplicando, pues que el multiplicador contiene tan sólo una tercera parte de la unidad.»

«Hay una objeción que se presenta ordinariamente al espíritu: puesto que debe tomarse sólo un tercio del multiplicando, parece que se ejecuta una división en lugar de una multiplicación: es la verdad, y, por lo tanto, tiene uno la libertad de considerar la operación bajo este último punto de vista, siendo así que la multiplicación por un tercio y la división por 3, son dos operaciones que dan un idéntico resultado.»

"Sucederá algunas veces, en el estudio de las matemáticas, como en el de toda otra ciencia, que se encontrarán denominaciones poco exactas. Esto proviene de que aquél que encuentra una nueva combinación matemática, imagina, casi siempre, para designar esta combinación, un nombre que le recuerde la cuestión particular que lo ha conducido á ese resultado; y se nota, más tarde, que el nombre dado á esa nueva combinación nada tiene de común con la aplicación que de ella se hace.»

«Así, por ejemplo, la palabra *multiplicación,* que significa tomar varias veces el multiplicando, no recuerda evidentemente á la imaginación sino la multiplicación de los números enteros. Lo mismo, como lo veremos más tarde, la palabra Geometría, que quiere decir *medida de la tierra,* no expresa sino una parte de las aplicaciones de esta ciencia, que hoy tiene por objeto el cálculo de la extensión en general, sea ó no sea ella susceptible de ser materialmente mensurada.»

«Pero, como había inconveniente en cambiar continuamente los nombres adoptados para designar las partes principales de una ciencia, se conservan estos nombres, contentándose uno con dar mayor generalidad á las definiciones, á medida que la ciencia hace nuevos progresos; á menos que se haya llegado á un punto en que la falta de acuerdo entre las palabras y las ideas exija una reforma completa en la nomenclatura: es lo que se ha hecho, en cuanto á la Química, á fines del siglo pasado. »

433. Concluiremos de lo que procede, que no es por el nombre que se hubiese dado á taló cual operación que debemos formar una idea exacta de esa operación, sino por su propia definición, Así, pues, no miraremos la multiplicación como que tiene por objeto reproducir muchas veces al multiplicando, sino más bien de *componer* un número *que contenga* al *multiplicando tantas veces como* el *multiplicador contiene* la *unidad.*

434. P.- Debo recordaros, hijos míos, con motivo de la precedente definición, que el multiplicador, aunque número abstracto (como que expresa la idea *de vez),* es susceptible de aumento y de disminución y, consiguientemente, de ser fraccionado como cualquier número concreto (art. 223).

Así, multiplicar por $\frac{1}{8}$ será tomar la octava parte del multiplicando, porque el multiplicador no contiene sino la octava parte de la unidad; así como multiplicar por $\frac{3}{4}$, será tomar tres veces el cuarto del multiplicando, de suerte que

$$12 \times \frac{3}{4} = 12 \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{12 \times 1}{4} \times 3 = \frac{12 \times 3}{4} = 9.$$

Explicación: Se ha dividido 12 por 4, lo que ha dado el cuarto del multiplicando, y se ha tomado 3 veces este resultado multiplicando el numerador por 3,

Observación: Según se ve, la precedente operación no es realmente ni una multiplicación ni una división, sino una operación compuesta de las dos, y á la que se ha dado el nombre de multiplicación.

435. Todos los precedentes razonamientos pueden aplicarse á un número cualquiera de fracciones, Así.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{18}{35} \times \frac{17}{27} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 18 \times 14}{3 \times 4 \times 6 \times 35 \times 27} = \frac{1}{9}.$$

El producto de las dos primeras fracciones siendo $\frac{2 \times 3}{3 \times 4}$ se le multiplicará por $\frac{5}{6}$, y se tendrá $\frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 6}$. Multiplicado este último resultado por $\frac{18}{35}$ da $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 18}{3 \times 4 \times 6 \times 35}$ o todas las multiplicaciones se hallan indicadas, se efectúa el cálculo, comenzando siempre por desembarazar de los factores comunes á los dos términos de la fracción, y se obtendrá así el producto reducido á su más simple expresión.

REGLAS GENERALES

436. *Si el multiplicador fuese una fracción, el producto será siempre más pequeño que el multiplicando* (art.261).

437. *El producto de dos fracciones propiamente dichas, es siempre menor que cada una de ellas,* porque se puede tomar la una *ó* la otra por multiplicador; y cuando el multiplicador es una fracción, el producto es más pequeño que el multiplicando, según lo establecido en el articulo precedente.

438. *El producto de dos fracciones es el mismo, sea cual fuere el orden en que se coloquen los factores.* En efecto, lo mismo tiene multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$, que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$ porque el producto de los numeradores y el de los denominadores ha de ser el mismo en uno ú otro caso, cualquiera que sea, por otra parte, el número de las fracciones que hayan de multiplicarse.

CUESTIONARIO

¿Cómo se multiplica una fracción por un número entero? (428 y 429).- ¿Cómo se multiplica un número entero por una fracción? (400).- ¿Cómo se multiplica una fracción por otra fracción? (43l).- Si el multiplicador fuese una fracción, ¿cual será el valor del producto respecto al multiplicando? (436).- Cuando el multiplicando y el multiplicador son fracciones, ¿cuál será el valor del producto respecto al de cada uno de los factores? (.437).- ¿Puede invertirse sin inconveniente el orden de los factores? (438).

EJERCICIOS PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

Multiplicar = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{11}{20} \times \frac{15}{22} =$

» = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} \times =$

Tomar (*) la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ ……=

» las $\frac{3}{4}$ de los $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{9} =$

CONFERENCIA SOBRE LA 30ª. LECCIÓN

J.-Terminada la última lección, nos anunciaste, papá, que comprobarías prácticamente la explicación de Mr. Adhémar, tocante á la multiplicación de dos fracciones, por medio de la vara española: es lo que ahora quisiera yo que nos hicieras palpar.

P.- En hora buena.

439. Hé aquí un pedazo de franja de plata, que tiene de largo media vara, y del cual se quiere tomar una sexta parte. Al efecto, someto el caso á la Multiplicación, y ella responde:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Antes de meter tijera á la franja, veamos si la respuesta de la Multiplicación ha satisfecho cumplidamente las condiciones anteriormente expresadas. Para mayor claridad, convirtamos el multiplicando $\frac{1}{2}$ y el producto $\frac{1}{12}$ en pulgadas, sujetándonos á la vara española, que héla aquí[ ]. Por ella vemos que:

		Pulgadas.
el multiplicando $\frac{1}{2}$	vara = …………………………	18
y el producto $\frac{1}{12}$	de vara = ……………………	3

Comparando ahora el largo del multiplicando con el largo del producto, resulta que éste es una sexta parte de aquél, porque, en efecto, sexta parte de 18 es 3.

Por otra parte, comparado el largo de la vara con el del producto, resulta que éste viene á ser un duodécimo de aquélla (que es la *unidad),* por que la duodécima parte de 36 pulgadas son 3 pulgadas; quedando así satisfechas las condiciones requeridas.

Penetrado así de la exactitud de la medición, yo comerciante, tomo el pedazo de franja y, haciendo coincidir uno de sus extremos con el *cero* ó punto de partida de la vara: voy extendiéndolo sobre ésta [ ] hasta llegar á las 3 pulgadas; y entonces, metiendo tijera á la franja, digo al parroquiano: «Está usted servido».

Dada así la explicación insinuada por J., continúa la conferencia, hijos míos, pudiendo tomar la palabra el primero que de entre vosotros la solicite.
………

(*) Esta palabra "tomar" quiere decir *multiplicar por;* así:

Tomar la $\frac{1}{4}$ de 8 es lo mismo que multiplicar 8 por una mitad = $8 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Tomar la $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$ es lo mismo que multiplicar $\frac{1}{5}$ por $\frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. etc.

TRIGESIMA-PRIMERA LECCION

División de las fracciones

Pueden presentarse tres casos, sea que haya de dividirse una fracción por un número entero, un número entero por una fracción, ó una fracción por otra fracción.

440. *Primer caso.* Dividir una fracción por un número entero.

REGLA.- Se multiplica el denominador de la fracción por el número entero, y se da al producto por numerador el de la fracción; ó bien, se divide (cuando ello es posible), *el numerador de la fracción por el número entero, y este resultado se da por denominador el de la fracción.*

Así…………………… $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{5}$

Todo esto está demostrado en los artículos 385 y 389.

441. *Segundo caso.* Dividir un número entero por una fracción.

REGLA.-Se multiplica el número entero por la fracción que hace de divisor, volcada (se vuelca la fracción, tomando el denominador por numerador, y recíprocamente).

Así…………….. $3: \frac{1}{2} = 3 \text{ X } \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{1} = 6$

En efecto, si convertimos los 3 enteros en expresión fraccionaria, dando á esta expresión el mismo denominador de la fracción (art. 236), tendremos:

$$3: \frac{1}{2} = \frac{6}{2} : \frac{1}{2}$$

Ahora se ve que el dividendo $\frac{6}{2}$ contiene al divisor $\frac{1}{2}$ exactamente 6 *veces.*

442. *Tercer caso.* Dividir una fracción por otra fracción.

REGLA.- Se multiplica la fracción que hace de dividendo por la fracción divisora volcada.

Así……………… $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{6}{1} = \frac{6}{2} = 3$

Para fijar mejor la exactitud de tal resultado, demos á ambas fracciones un denominador común, y hagamos la división ordinaria.

Se ve aquí claramente que *el dividendo* $\frac{1}{2}$ contiene 3 veces al divisor $\frac{1}{6}$.

OBSERVACIÓN

443. Así como en todo número entero se halla sobrentendido el factor 1, en todo número entero está embebido el divisor 1, verbigracia: 8 = $\frac{8}{1}$. Esto sentado, la regla que consideramos puede aplicarse al *primer caso.* En efecto, si se trata, por ejemplo, de dividir $\frac{1}{3}$ por 3, se tendrá sucesivamente:

$$\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3} : \frac{3}{1} = \frac{1}{3} \text{ X } \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

444. Siempre que el divisor sea una fracción, el cociente ha de ser más grande que el dividendo, porque el producto del divisor por el cociente debe ser necesariamente igual al dividendo; y téngase en cuenta que, siendo el divisor una fracción, no puede dar un producto igual al dividendo, sino en tanto que el cociente sea más grande que aquél.

445. Sucede, frecuentemente, que las diversas operaciones de que acabamos de hablar, se encuentran reunidas en un mismo cálculo.

Sea, por ejemplo:

$$\left(5+\frac{3}{4}\right) \times \left(7+\frac{5}{6}\right) : \left[3-\frac{7}{9}\right]$$

$$= \frac{23}{4} \times \frac{47}{6} : \frac{20}{9} = \frac{23 \times 47 \times 3}{4 \times 2 \times 20} = \frac{3243}{160}$$

Se comenzará por reducir á una sola fracción cada una de las cantidades encerradas en los paréntesis, efectuando las adiciones y sustracciones del caso; después se operará sobre estas cantidades, siguiendo siempre el orden indicado por los signos, y teniendo el cuidado de *barrear* sucesivamente todos los factores comunes al numerador y al denominador.

EJEMPLOS

446. *Primero*

$$\frac{\left(3+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\right) \times \left(9-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)}{12+\frac{5}{6}-\frac{7}{9}} = \frac{53}{12} \times \frac{134}{15} : \frac{217}{18}$$

$$= \frac{53 \times 134 \times 18}{12 \times 15 \times 217} = \frac{3551}{1085}$$

En general, para efectuar esta suerte de cálculos compuestos, que se encontrarán muchas veces, es preciso recordar todo lo que se ha dicho al principio de la Lección 21ª. *(arts.* 298 *á 300, inclusive),* sobre la significación de las palabras *términos* y *factores,* así como sobre la manera de interpretar los paréntesis.

Sucede algunas veces que una cantidad compuesta de muchos términos se halla encerrada en un paréntesis, y considerada entonces como término de otra cantidad que podrá ella misma ser no más que un término de otra tercera cantidad, y así en seguida. En tal caso, para evitar la confusión en los signos, se emplean paréntesis de diferentes formas.

447. *Segundo*

$$\left\{\left[\left(\ +\frac{2}{5}\right) \times 4+\frac{5}{6}\right] \times 2+\frac{3}{4}\right\} \times 7+\frac{1}{3} = \frac{12459}{60}$$

En el ejemplo que precede, $\left(3+\frac{2}{5}\right) \times 4$ y $\frac{5}{6}$, son los dos términos de una cantidad que, multiplicada por 2, resulta ella misma ser el primer término de otra cantidad, etc.

Para operar, se reducirá desde luego $3+\frac{2}{3}$ á una sola fracción, que se multiplicará por 4. Luego se agregará $\frac{5}{6}$ y, después de haber hecho la reducción, se multiplicará por 2. En seguida, se agregará $\frac{3}{4}$; se reducirá nuevamente, y se multiplicará por 7. En fin, agregando $\frac{1}{3}$ y haciendo una última reducción, se obtendrá el resultado.

He aquí el orden de los cálculos:

$$3+\frac{2}{3} = \frac{17}{\ },$$

$$\frac{17}{5} \times 4 = \frac{68}{5},$$

$$\frac{68}{5}+\frac{5}{6} = \frac{433}{30},$$

$$\frac{433}{30} \times 2 = \frac{433}{15},$$

$$\frac{433}{15}+\frac{3}{4} = \frac{1777}{60},$$

$$\frac{1777}{60} \times 7 = \frac{12439}{60},$$

$$\frac{12439}{60}+\ = \frac{12459}{60}.$$

448. *Tercero*

$$\frac{\dfrac{(3 \times \frac{2}{3}) \times 4}{5} + 2 \times 3 - (4 + \frac{2}{3})}{(7 + \frac{5}{6})} += \frac{774}{235}.$$

Efectuando, desde luego, las operaciones indicadas entre paréntesis, la cantidad propuesta se convierte sucesivamente en

$$\frac{\frac{74}{5} - \frac{14}{3}}{\frac{47}{6}} + 2 = \left(\frac{74}{5} - \frac{14}{3}\right) : \frac{47}{6} + 2 =$$

$$= \frac{152}{15} : \frac{47}{6} + 2 = \frac{304}{235} + 2 = \frac{774}{235}.$$

449. *Cuarto*

$$\left.\frac{3+2}{5+\dfrac{3}{4+\dfrac{1}{2+\frac{5}{6}}}}\right\} = \frac{1411}{421}$$

En este ejercicio, la fracción $\frac{5}{6}$ agregada á 2, forma un número que divide la unidad; lo que da una fracción que, agregada á 4, forma un nuevo número, por el cual debe dividirse el número 3, y así en seguida.

La forma particular de estas expresiones les ha hecho dar el nombre de *fracciones continuas.* Ellas gozan de propiedades notables que haremos conocer más tarde.

He aquí el orden en que deben efectuarse los cálculos:

$$2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$$

$$1 : \frac{17}{6} = \frac{6}{17}$$

$$4 + \frac{6}{17} = \frac{74}{17}$$

$$3 : \frac{74}{17} = \frac{51}{74}$$

$$5 + \frac{51}{74} = \frac{421}{74}$$

$$2 : \frac{421}{74} = \frac{148}{421}$$

$$3 + \frac{148}{421} = \frac{1411}{421}$$

Los ejemplos precedentes y otros del mismo género, que podrá componer uno mismo, serán los mejores ejercicios para adiestrarse en el cálculo *(J. Adhémar).*

CUESTIONARIO

¿Cómo se divide una fracción por un número entero? (440).- ¿Cómo se divide un número entero por una fracción? (441).- ¿Cómo se divide una fracción por otra fracción? (442).- Manifieste Vd., por medio de un ejemplo, lo que se llama fracción continua (449).- Explique Vd, el fenómeno de que, dividiendo una fracción por otra fracción, resulta á veces un número entero (461).- ¿Cómo así, cambiando el signo de división por el de multiplicación y volcando la fracción divisora, resulta hecha la división? (452).

CONFERENCIA SOBRE LA 31ª. LECCIÓN

Primera parte

Exposición de dudas.

Segunda parte

Ejecución de los ejemplos puestos al fin de la precedente Lección.

2ª. CONFERENCIA SOBRE LA 31.a LECCIÓN

1; P. -Se abre la Conferencia.

J. Al dividirse una fracción por otra fracción, da alguna vez como resultado un número entero, por ejemplo, en el caso 3º. (art. 448), en que $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$ da 3 al cociente; y aunque se ha demostrado aritméticamente la exactitud de la operación, me queda cierto vacío en la mente, que no atino á llenar; pues me parece cosa tara que de la división de *una fracción por otra fracción,* resulte un *número entero.*

P.- No me extraña tu embarazo, porque la observación que te ha ocurrido asalta á casi todos los que por primera vez atraviesan el terreno escabroso de los números quebrados. Pero ello no es más que un fantasma, que desaparece, luego que se acerca uno á examinarlo atentamente, como vais á verlo.

450. Acostumbrado uno desde la infancia, á oír decir «dividir *ó* repartir» (confites, peras, etc.), se forma la idea de que el resultado de la división, esto es, la parte que á cada uno toque *ó,* en otros términos, el cociente, debe ser siempre más pequeño que el dividendo; y esto es en verdad lo que pasa, tratándose de números enteros. Más, no sucede lo mismo cuando el divisor es una fracción. Recordad lo que decía el maestro Adhémar, hablando de la multiplicación de las fracciones: *-que «no es por el nombre que se hubiese dado ó tal ó cual operación, que debemos formar una idea exacta* de *esa operación, sino por su definición*». Además, hay otra razón concluyente, y es: que el cociente no expresa una cantidad concreta, sino un número abstracto, cuyo oficio es indicar *cuántas veces* contiene el dividendo al divisor.

Eso entendido, vamos á ver que la definición cuadra bien al caso propuesto.

M.- Pero yo quisiera que nos hicieras palpar la verdad en un caso práctico.

451. P.- Antes de explicar este aparente fenómeno, conviene fijarse en que él sólo puede acontecer, cuando la fracción que hace de dividendo es de mayor valor que la fracción divisora.

Supongamos que se trata de dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$; que el dividendo representa dos tercios de casimir; que el divisor representa una sexta parte del mismo género, y que se quiere saber cuántas veces el dividendo contiene al divisor.

Operación

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4;$$

lo que quiere decir, que el dividendo contiene al divisor 4 *veces* (no 4 varas de género).

Para mejor fijar las ideas, tomemos la vara española, y traduzcamos las dos fracciones propuestas en pulgadas.

1 VARA = 36 PULGADAS

$\frac{2}{3}$ de vara = 24 pulgadas,

$\frac{1}{6}$ » » = 6 pulgadas,

Ahora bien; comparando ambos valores, resulta, evidentemente, que el dividendo 24 *pulgadas* contiene al divisor 6 *pulgadas* exactamente 4 *veces.*

A fin de disipar toda duda, invirtamos la cuestión, tomando $\frac{1}{6}$ como dividendo y $\frac{2}{3}$ como divisor. Entonces tendremos:

$$\frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \text{ X } \frac{3}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

que expresa: que el dividendo contiene tan sólo una cuarta parte del divisor, *ó* sea, una *Cuarta parte de vez.*

Por lo anteriormente expuesto se ve que para formarse idea exacta de la *división,* trátese de números enteros *ó* quebrados, es preciso fijarse, no en el primitivo sentido de la palabra, sino en su definición científica, esto es: que *la división es una operación aritmética, que tiene por objeto dar a conocer cuantas veces contiene el dividendo al divisor;* no debiendo olvidarse que la unidad de *vez* es susceptible de aumento ó de fraccionamiento, ni más ni menos que cualquiera unidad concreta (223).

R.- ¿Cómo es que, poniendo cabizbajo el divisor, y multiplicando los numeradores entre sí, igualmente que los divisores, se llega por este medio á efectuar la división? Explícanos este misterio.

452. P.- Es que ese vuelco del divisor y cambio del signo de división por el de multiplicación, es una especie de prestidigitación en que se han hecho varias operaciones, virtualmente.

Para explicar el misterio, volvamos al ejemplo $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$.

Dando á estas fracciones por denominador común el producto de sus denominadores; que es 18, tenemos:

$$\frac{2 \times 6}{3 \times 6} : \frac{1 \times 3}{6 \times 3}$$

Ahora, haciendo abstracción del denominador común y tratando á los numeradores como si fuesen números enteros (*), resulta:

$$2 \text{ X } 6 : 1 \text{ X } 3 = \frac{2 \times 6}{1 \times 3}$$

Cambiando el orden de los factores del denominador (lo que en nada altera el valor de la fracción), llegaremos por fin á obtener la fórmula apetecida. En efecto:

$$\frac{2 \times 6}{1 \times 3} \quad \frac{2 \times 6}{3 \times 1} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{6}{1}$$

He ahí, hijos míos, las varias transformaciones que se han operado *tácita* ó *virtualmente,* por el solo hecho de volcar el divisor; y he ahí también explicado el prodigio de haberse convertido instantáneamente una *división* en una *multiplicación.*

(*) En otro lugar (artículos 276 al 278) quedó demostrado que los numeradores de dos ó más fracciones que tienen un común denominador, pueden ser tratados como si fuesen números enteros.

J.- ¿Por qué razón, al transformar el dividendo $\frac{2}{3}$ y el I1 divisor $\frac{1}{6}$, se ha tomado tomo denominador común el número 18, siendo así que pudo haberse preferido el número 6, que es el más pequeño múltiple de los denominadores de dichas fracciones?

453. P.- Si hubiésemos tomado el número 6 como denominador común la fracción $\frac{2}{3}$ se habría convertido en $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ quedando el divisor $\frac{1}{6}$ bajo su misma forma, y no se habría conseguido nuestro objeto, que es el de hacer que el número 6 figure como numerador. Tampoco se habría logrado este objeto, si se hubiese tomado por denominador común el número 12 (múltiple de 3 y de 6).

Tomando, como denominador común el número 18, que es el producto de los denominadores de las dos fracciones propuestas, sucede que al trasformar el dividendo $\frac{2}{3}$ hay que multiplicar ambos términos por 6, resultando de ahí que dicho número 6 viene á figurar desde luego como numerador, para convertirse después (última transformación) en factor $\frac{6}{1}$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

454. PROBLEMA, que servirá de pauta para la resolución de otros que se propondrán para la próxima Conferencia.

El obrero A *hace cierto trabajo en 20 días; otro obrero* B *hace el mismo trabajo en* 16 *días, y se desea saber en cuantos días harían la obra los dos reunidos.*

Operación

Ante todo, hay que darse cuenta de *la relación* que existe entre la actividad ó fuerza productora de los dos obreros, y expresar numéricamente esa relación *ó,* en otros términos, expresar cuántas veces la fuerza de B (que es la mayor) contiene la fuerza de A.

Para mejor fijar las ideas, supongamos que el trabajo en cuestión, consiste en un socavón que tiene 20 varas de largo.

En tal concepto, puesto que A haría la obra en 20 días, en un solo día hará una vigésima parte de ella, esto es, 1 *vara,* que va á servirnos de unidad de medida ó término de comparación.

Veamos, por otra parte, cuánto deberá hacer B en un día.

Como este obrero es capaz de hacer las 28 varas del socavón en 16 días, es claro que en un día hará la décima-sexta parte de la obra, es decir, $\frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ por día; di modo que el esfuerzo común de A y B podrá hacer 2 y $\frac{1}{4}$ varas por día.

Esto establecido, y conociendo ya dos de los elementos que entran en el problema, á saber: el producto, (ó dividen do) 20, y uno de los factores, que es $2\frac{1}{4}$ vamos á encontrar el factor incógnito, que es el número de días que habrán de emplear A y B para hacer el socavón.

Como la solución de este problema es del resorte de la división (art. 441), vamos á resolverlo por medio de ella del modo siguiente:

$$20 : 2\frac{1}{4} = 20 : \frac{9}{4} = 20 \times \frac{4}{9} = \frac{20 \times 4}{9} = \frac{80}{9} = 8 + \frac{8}{9}$$

que es el número de días que ambos obreros emplearían trabajando juntos.

Comprobación

Para comprobar la exactitud del anterior resultado, razono de esta manera:

Puesto que A, trabajando él solo, haría la obra en
20 días, se sigue que, en 8 días y $\frac{8}{9}$ de día, ha
hecho 8 varas y $\frac{8}{9}$ de vara ……………………………… 8 v + $\frac{8}{9}$
Tocante á B, en consideración á que su fuerza
productora es, respecto á la de A, como 5 es á
4 = $\frac{5}{4}$, es decir, superior á la de éste en $\frac{1}{4}$, resulta
que ha hecho:
en 8 días, 8 X $\frac{1}{4}$ = ……………………………………..10
en $\frac{8}{9}$ de día $\frac{1}{4}$ X 1 $\frac{1}{4}$ = $\frac{8}{9}$ X $\frac{5}{4}$ = $\frac{10}{9}$ = 1 + $\frac{1}{9}$………. 1 + $\frac{1}{9}$

SUMA………………….20v

TRIGÉSIMA-SEGUNDA LECCIÓN

Más explicaciones sobre problemas de fracciones

455. Para quien se haya penetrado de los *Ejercicios* que se han copiado de Mr. Adhémar (págs. de 4 á 8), los problemas concernientes á la adición y sustracción de fracciones no ofrecen gran dificultad; por tanto, sólo nos ocuparemos en las que atañen á la multiplicación y la división.

Antes de afrontarlas, conviene que yo os dé las siguientes

NOCIONES PRELIMINARES

Respecto á la multiplicación:

456. Son tres los elementos que constituyen esa operación: *multiplicando, multiplicador* y *producto;* y son también tres los problemas que pueden formarse tocante á dicha operación; á saber:

1º. *Dados el multiplicando y el multiplicador, encontrar el producto;*
2º. *Dados el producto y el multiplicando, encontrar el multiplicador;*
3º. *Dados el producto y el multiplicador, encontrar el multiplicando.*

457. *Respecto la división:*

Los problemas á que ella puede dar lugar son:

1º. Dados el dividendo y el divisor, encontrar el cociente;
2º. Dados el dividendo y el cociente, encontrar el divisor;
3º. Dados el divisor y el cociente, encontrar el dividendo.

OBSERVACIÓN

458. Como se ve, parece que fueran seis los problemas concernientes á la multiplicación y la división; pero esto es sólo en la apariencia, pues si bien se examina, se reducen ellos á tres. En efecto, comparando los tres primeros con los tres segundos, resulta que los elementos ó cantidades que entran en cada problema, son los mismos en ambas operaciones, aunque con distintos nombres, como lo manifiestan las dos figuras siguientes:

multiplicando 13 ~~~~~~~dividendo 91 | 13 *divisor.*
Multiplicador 7 =~~~~~~~~~~~~~~~~~ | 7 *cociente,*
producto 91

Por consiguiente, los seis problemas enunciados pueden reducirse á estas tres clases:

Primera clase: dados el *multiplicando* (ó *divisor)* y el *multiplicador* (ó *cociente),* encontrar el *producto* (ó *dividendo);*

Segunda clase: dados el *producto* (ó *dividendo)* y el *multiplicando* (ó *divisor),* encontrar el *multiplicador* (ó *cociente);*

Tercera clase: dados el *producto* (ó *dividendo)* y el *multiplicador* (ó *cociente),* encontrar el *multiplicando* (ó *divisor).*

459. Como ya lo dijimos, tratando de los números enteros (art. 117), la multiplicación sólo resuelve la primera clase de los problemas que acaban de indicarse; las otras dos clases son del resorte de la división, como luego lo veremos; conviene, entre tanto, haceros saber que esos tres géneros de problemas pueden reducirse á sólo dos casos, de la manera siguiente:

Primer caso: dados el *multiplicando* y el *multiplicador* (ó *divisor* y *cociente),* encontrar *e1producto (dividendo);*

Segundo caso: dados el *producto* (ó *dividendo)* y *uno de los factores,* encontrar *el otro factor.*

460. Ya se entiende que los mismos factores de la multiplicación *(multiplicando* y *multiplicador)* son también los factores de la división, con los nombres de *divisor* y *cociente.*

Sentadas las anteriores bases, vamos á abordar la *cue*stión.

PROBLEMAS

461. *Problema* a.- ¿Qué viene á ser la $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$?

Para resolverlo hay que ver, ante todo, á qué *caso* de os dos antedichos corresponde este problema, y ejecutar en seguida la operación correspondiente. Y bien; *tomar* la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, aunque ello importa una división, se llama multiplicación (véase la *nota* del art. 438); por consiguiente, las dos cantidades dadas vienen á ser el multiplicando y el multiplicador, y la cantidad que se busca, es decir, la incógnita, será el producto. Por tanto, el problema debe resolverse con arreglo al *primer caso.* En efecto:

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ que es el *producto* que se buscaba.

Comprobación

Sea el multiplicando, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ vara de paño.

Transformando esta fracción en pulgadas de vara, tenemos $\frac{1}{2}$ vara = 18 pulgadas.

Mas, como el multiplicador $\frac{1}{3}$ exige que se ha de tomar una tercera parte del multiplicando, resulta que el producto ha de quedar en $\frac{1}{6}$ de vara = 6 pulgadas.

Ahora bien, ¿qué son 6 pulgadas? —Justamente $\frac{1}{3}$ del multiplicando 18 pulgadas, ó, lo que es lo mismo, $\frac{1}{3}$ de la *unidad* que, en el ejemplo propuesto, es la v*ara.*

462. *Problema b.-* Un labrador ha dejado en su testamento el valor de 832 pesos para que se distribuya de este modo: $\frac{1}{2}$ para una escuela de niños, y la otra $\frac{1}{2}$ para la educación de un huérfano, con la condición de que se le pasará $\frac{1}{8}$ de la $\frac{1}{2}$ en cada año. Se pregunta: ¿cuál será su haber anual?

(NOTA.- El presente problema podría resolverse por medio de dos divisiones sucesivas, la primera por 2 y la segunda por 8; pero, procediéndose de este modo, la cuestión se haría de números enteros, y yo quiero considerarla bajo el aspecto de números fraccionarios, traduciendo así, al pie de la letra, las palabras del testador).

Aquí *la incógnita, ó* cantidad que debe buscarse, es un *producto,* atenta la índole de la multiplicación de fracciones, y las cantidades dadas son los dos factores de la multiplicación; de suerte que el problema está comprendido en el *caso* 1.°, y puede traducirse de este modo:

$$832 \text{ X } \frac{1}{2} \text{ X } \frac{1}{8}$$

J.- Pero aquí hay *tres* factores, siendo así que en la operación de multiplicar sólo hay *multiplicando* y *multiplicador.*

P.- Esta es una pequeña dificultad, que va á desaparecer fácilmente.

Vosotros sabéis que, cuando muchos factores concurren á formar un producto, puede uno refundir dos ó más factores en uno solo, tomando, por ejemplo, un factor 9 en vez de 3 X 3;8 en lugar de 2 X 2 X 2; etc.

Y bien; en el problema propuesto, podemos considerar como multiplicando los dos primeros, y como multiplicador el tercero; ó viceversa, el primero como multiplicando y el segundo y tercero como multiplicador, sin que esto altere en nada el producto. Así: la expresión $(832 \text{ X } \frac{1}{2}) \text{ X } \frac{1}{8}$, quiere decir que del multiplicando $(832 \text{ X } \frac{1}{2})$ se ha de tomar una octava parte solamente; al paso que la expresión $382 \text{ X } (\frac{1}{2} \text{ X } \frac{1}{8})$, significa que del multiplicando 832 se ha de tomar la octava parte de una mitad del multiplicando. Esto entendido, vamos á resolver el problema por medio de la *multiplicación.*

$$832 \text{ x} \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{8} = 416 \text{ X } \frac{1}{8} = \frac{416}{8} = 52 \textit{ pesos,}$$

que es el producto buscado, ó sea, la parte correspondiente al haber anual del huérfano.

Comprobación

Haber total del huérfano ……………= 52 X 8 = 416
Haber de la escuela………………………… = 416
Legado ó manda del labrador……... =Suma…. 832

463. *Problema* c.- ¿Cuál es el número cuyas $\frac{2}{3}$ partes hacen $\frac{1}{2}$?

La enunciación indica que la *incógnita* ha provenido de una multiplicación, en la que $\frac{2}{3}$ ha sido el *producto,* y $\frac{3}{4}$ uno de los *factores* de la multiplicación. Luego, este problema está comprendido en el *caso 2º.,* y es del resorte de la división. Así:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{ x } \frac{4}{3} = \frac{8}{9'} \quad \textit{cociente numero que se buscaba.}$$

Para comprobar la operación, transformemos
en *pulgadas* el cociente ó número encontrado
$\frac{8}{9}$ = ………………………………………… 32 *pulgadas*

Transformemos igualmente el dividendo $\frac{2}{3}$ =. 24 *pulgadas*

Y bien; ¿qué son 24 pulgadas? -justamente las $\frac{3}{4}$ partes de 32 *pulgadas;* ó bien, los $\frac{2}{3}$ de la *unidad,* que es 1 *vara.*

464. *Problema d.*- ¿Cuál es el número cuya tercera, y quinta parte valen 32?

Como de la enunciación del problema se colige que el número 32 ha debido ser el *producto* de la multiplicación del número incógnito por *el factor* dado ($\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$) , veo que el problema se halla comprendido en el *caso 2.°;* por consiguiente, planteo la cuestión diciendo: «*¿Cuál es el número que multiplicado por* ($\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$), *dió como producto* 32?», y la resuelvo, por medio de la división, de este modo:

$$32 : (\quad + \quad) = 32 \frac{1}{3} : (\quad \frac{1}{5} + \quad) \quad \frac{1 \times 5}{3 \times 5} \quad \frac{1 \times 3}{5 \times 3}$$

$$= 32 : \frac{8}{15} = 32 \times \frac{15}{8} = \frac{480}{8} = 60$$

que es el otro factor, es decir, el número que se buscaba.

Comprobación

Factor encontrado………….. 60

$\frac{1}{3}$ de 60…………………….. 20

$\frac{1}{5}$ de 60………………………12

Suma………. 32

CUESTIONARIO

¿Cuales son los elementos que constituyen la multiplicación de fracciones, y á qué problemas dan lugar? (456).- ¿A qué problemas da lugar la división de fracciones? (457).- ¿A cuantos problemas pueden reducirse los seis enunciados? (458).- ¿Qué método puede seguirse para plantear una cuestión aritmética, en problemas análogos á los presentes? (467 y 468).- Sírvase usted demostrar que la división de un número por una fracción importa una multiplicación (471).

CONFERENCIA SOBRE LA 32ª. LECCIÓN

P. Se abre la conferencia.

M. A propósito de la resolución de problemas me ocurre esta duda: Puesto que son tres los elementos que entran en la multiplicación (*multiplicando, multiplicador y producto*), y éstos son los mismos que entran también en la división correlativa (*dividendo, divisor y cociente*), ¿de qué términos ó lenguaje nos valdremos al afrontar un problema: del de la multiplicación ó del de la división?

465. P. Seria indiferente dar á esas tres cantidades los nombres que emplea la multiplicación ó la división; pero, siendo la multiplicación más simpática y accesible que la división, preferiremos emplear, ordinariamente, el lenguaje de aquélla.

R. Y ¿cómo empezaremos á razonar, y qué método seguiremos en el razonamiento, para poder plantear una cuestión aritméticamente? Dadnos algunas reglas.

466. Ante todo, es de advertir que en los problemas de que actualmente tratamos, no hay más que una *incógnita* (que así se llama la cantidad no conocida), y que las otras dos cantidades deben ser conocidas ó fáciles de reconocerse, sin cuyo requisito no podría resolverse el problema. Esto sentado.

467. Luego que se tenga en vista el problema, debe uno fijarse en la incógnita, y ver si ella es un *factor* ó un *producto*.

Si ella representa un *producto*, la resolución del problema será de la incumbencia de la multiplicación (art. 117), y no habrá más que multiplicar entre si las otras dos cantidades, que deben ser siempre conocidas ó susceptibles de ser reconocidas, reduciéndolas al efecto á su más simple expresión.

Mas, si la incógnita fuese un *factor,* debe uno persuadirse, desde luego, que el problema pertenece á la división (art.459); de modo que, para resolverlo, deberá averiguarse cuál de las dos cantidades conocidas tiene la apariencia de ser *producto*, y dividir este producto por el factor conocido; bien entendido que el cociente dará el otro factor, es decir, el valor de la incógnita (art. 459).

En los problemas sobre fracciones, hay que guardarse bien de incurrir en una falta, á que se halla uno expuesto por el hábito de operar sobre números enteros. Tratándose de éstos, la cantidad más grande de las enunciadas en un problema es el *producto (ó dividendo)*, mientras que tratándose de fracciones, nunca puede ser producto la cantidad mayor, por la sencilla razón de que, aun cuando el multiplicando haya sido un número entero, si el multiplicador fue una fracción propiamente dicha (ó viceversa), el producto habrá de ser, por fuerza, menor que el número entero.

468. Por lo tocante á los problemas propios de la división, y que son los que más frecuentemente ocurren, el producto se presenta en algunos casos bajo la apariencia .de resto ó pico de otra cantidad mayor.

EJEMPLO

De la compañía de un batallón se ha destacado $\frac{1}{5}$ *para una exploración;* $\frac{1}{3}$ *de ella, para el servicio de patrulla, y ha quedado en el cuartel un resto de 56 hombres*. Se pregunta: ¿de cuántos hombres consta la compañía?

Expresando por x el valor de la incógnita, podemos formular la siguiente ecuación:

$$x = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) x = 56$$

Reduciendo ahora los dos términos de la fracción á un común denominador y á su más simple expresión, resulta, sucesivamente:

$$x — \left(\frac{3 \times 5}{15}\right) x = 56$$

$$x — \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) x = 56$$

Antes de ir más lejos, conviene restablecer en el valor de x el factor 1, que se halla sobrentendido en todo número (art. 316), de este modo:

$$1 \text{ X } x - \frac{8}{15} \text{ X } x = 56$$

Ahora, como x afecta á los dos términos del primer miembro, podemos encerrar, dentro de un paréntesis, los dos números *coeficientes* ([1]) de x, poniendo fuera del paréntesis el factor común x, esto es:

$$\left(1 = \frac{8}{15}\right) x = 56$$

$$\frac{7}{15} x = 56$$

En esté estado se ve claramente que 56 es el *producto* de los dos factores $\frac{7}{15}$ X x, que es lo que nos proponíamos demostrar.

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $\frac{7}{15}$, se obtiene:

$$x = 56 : \frac{7}{15} = 56 \text{ X } \frac{15}{7} = \frac{840}{7} = 120$$ (valor del factor incógnito).

----

(1) Se llama coeficiente á *cualquiera cantidad conocida que procede á otra inmediatamente, y la multiplica*.

Hay otro medio, tal vez más sencillo que el anterior: él consiste en el siguiente razonamiento:

469. Tomando el mismo problema que acaba de resolverse, la incógnita es una cantidad que puede expresarse por 1c, puesto que el destacamento y la patrulla se han considerado como fracciones de la *unidad*, que es la compañía. En este concepto, preciso es darse cuenta de lo que falta á las dos enunciadas fracciones, para completar la unidad.

Esas fracciones son $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$. Reducidas éstas á un común denominador y á su expresión más simple, se tiene:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{3+5}{15} = \frac{8}{15} \quad (\textit{de la compañía})$$

Y bien, ¿qué le falta á $\frac{8}{15}$ para hacer 1c?

Si representamos 1c por $\frac{15}{15}$, y hacemos la diferencia entre esta expresión fraccionaria y $\frac{8}{15}$ resulta:

$$\frac{15}{15} - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \quad (\text{de la compañía})$$

Mas, como el problema nos da el valor real de la fracción $\frac{7}{15}$ de la *compañía* (expresando que han quedado en el cuartel 56 hombres), podemos ya, como dice el refrán, *encontrar el ovillo por el hilo*.

En efecto:

$$\frac{7}{15} \text{ de } 1 \text{ c} = 56 \ (\textit{hombres})$$

$$\frac{7}{15} \times 1\text{c} = 56 \text{ h.}$$

CONCLUSIÓN:

470. Dividiendo 56 (que, bajo la apariencia de *resto*, es un producto, como lo patentiza la precedente ecuación), por el factor recién descubierto, $\frac{7}{15}$, se obtendrá el otro factor, que es el que representa el total de *hombres* de la compañía. Así:

$$1\text{c} = 56 \text{ h} : \frac{7}{15} = 56 \times \frac{15}{7} = \frac{840}{7} = 120 \text{ h}$$

Quedando así comprobado que en los problemas sobre fracciones se presenta muchas veces, con apariencias de *resto*, lo que fué *producto*, paso, hijos míos, á daros á conocer otro fenómeno que se encuentra en el género de problemas que nos ocupan, y sobre el cual no hemos parado mientes en ninguna de las lecciones anteriores. Ello consiste en que, así como la multiplicación de un número cualquiera por una fracción, importa una división, así también:

La división de un número por una fracción, viene á ser en realidad una multiplicación. En efecto:

Suponiendo que se trate de dividir 6 por $\frac{2}{3}$

471. Para efectuar la división, se traspone el divisor cambiando el signo de división por el de multiplicación, y sin más queda aquélla efectuada.

Así, dividir 6 por $\frac{2}{3}$ es multiplicar 6 por $\frac{3}{2}$

En suma: fundados en las consideraciones apuntadas con motivo del precedente problema, podemos establecer, como regla aplicable á un gran número de problemas análogos al presente, este procedimiento:

472. *Tomar como dividendo el número entero enunciado en el problema, y canto divisor la fracción ó fracciones dadas también en el problema.*

Tales son, .hijos míos, los datos que por ahora puedo daros para allanar, en alguna manera, el escabroso terreno que estáis atravesando. Con este auxilio, vamos á resolver de pronto los tres primeros problemas, de los que en seguida se proponen. Los demás los resolveréis *ad líbitum*, esto es, cuando á cada cual le plazca, cuidando de mostrarme el resultado, á fin de aprobarlo yo ó corregirlo.

[*Aquí resolverá el preceptor los tres primeros problemas que siguen, con arreglo al Apéndice.*]

PROBLEMAS POR RESOLVER <30> pág. 14, Apénd.

(NOTA. Los que siguen han sido tomados *des M. M. Dumouchel et Dupuis*, siendo de advertir que, aunque muy interesantes todos ellos, hemos omitido un gran número por haberlos considerado propios más bien que de este lugar, del método conocido con el nombre de *reducción á la unidad* y de la llamada *regla de tres*, operaciones que estudiaremos más tarde).

1º. ¿Cuál es el número del que una mitad, el tercio y el cuarto, valen 104?

2º. Un obrero que tiene de ejecutar cierto trabajo, ha hecho en el primer día $\frac{1}{3}$ de la obra y $\frac{1}{4}$ en el segundo día. ¿Qué le queda aún por hacer?

3º. La diferencia entre la mitad y el quinto de un número vale 6. ¿Qué número es ese?

4º. ¿Cuál es el número cuya mitad, tercio y cuarto-menos un quinto, da 265?

5º. Cinco octavos de metro, de cierto tejido, han costado 16 francos. ¿Cuánto cuesta el metro?

6º. Se quiere dividir 5600 fs entre dos personas, de modo, que la primera, tenga $\frac{1}{3}$ de más que la segunda.

7º. El coronel de un regimiento ha perdido en una batalla $\frac{1}{20}$ de sus hombres, ha tenido .$\frac{1}{12}$ de heridos, y le quedan 2080 hombres. ¿De cuántos constaba el regimiento?

8º. Un jugador pierde en una primera partida $\frac{1}{5}$ de su dinero, después $\frac{1}{3}$ del resto; se retira del juego con 8fs, ¿Cuánto tenía al ponerse á jugar?

9º. Los $\frac{3}{4}$ de una pieza de paño han costado 450 fs. ¿Qué importan $\frac{2}{3}$ de la misma pieza?

10º. Una frutera ha comprado naranjas á razón de 9 por 2 francos; vendiéndolas á 4 francos la docena, ha ganado 6 francos. ¿Cuántas eran las naranjas?

11º. Un deudor entrega á su acreedor $\frac{1}{4}$ de lo que le debe, después $\frac{1}{10}$ del resto, y le debe todavía 540 fs. ¿Cuánto importaba la deuda?

12º Un barril, lleno de vino, pesa 440 libras más $\frac{1}{4}$ de libra, y se sabe que el peso del barril, vacío, es $\frac{1}{3}$ del pesó, total. ¿Cuál es el peso del vino?

13º. ¿Por qué número debe multiplicarse 30 para disminuirlo de $\frac{1}{3}$?

14º. ¿Por qué número debe dividirse 30 para aumentarlo en $\frac{2}{3}$?

TRIGÉSIMA-TERCERA LECCIÓN

Transformación de una fracción ordinaria en otra fracción decimal equivalente

Supongamos que se trata de convertir la fracción $\frac{3}{4}$ de nuestra moneda, llamada *peso de á 8 reales*, en otra fracción equivalente, pero en forma decimal.

473. Sabemos (art. 108) que la barra horizontal que separa los dos términos de la fracción $\frac{3}{4}$, expresa que es necesario dividir 3 por 4; faltándonos fijar en decimales el cociente de esta división, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 0,75 \\ 20 & \end{array}$$

EXPLICACIÓN. Dividiendo 3 por 4, se ha puesto 0 al cociente, lo que quiere decir que las unidades del dividendo no pueden ser distribuidas en unidades; pero, como sabíamos que una unidad puede dividirse mentalmente en tantas partes iguales cuantas uno quiera, según la cuestión (art. 381), hemos dividido las 3 unidades en 10 partes iguales, lo que nos ha dado 30 *décimos*, según se ve en la segunda línea horizontal de la división que precede. Dividiendo 30 décimos por 4, tenemos 7 *décimos*, que los colocamos en el cociente, poniendo una coma á la derecha del 0, y expresando así que estos 7 son *décimos* de unidad. Han quedado 2 de resto en el dividendo, que, no pudiendo ser repartidos entre 4, los hemos convertido en *centésimos*, poniendo un cero á su derecha. Divididos estos 20 centésimos por 4, nos han dado 5 centésimos, sin quedar resto alguno.

Así, la fracción $\frac{3}{4}$ = 0,75.

Se puede reconocer fácilmente que esta transformación es análoga á la que hicimos (art. 386).

En efecto,

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{3}{4}.$$

Así, la tracción decimal 0,75 no es otra cosa sino la fracción $\frac{3}{4}$, cuyos dos términos se hubiesen multiplicado por 25.

J. Según la transformación que acaba de operarse, los 75 centavos hacen $\frac{3}{4}$, es decir, 6 reales; pero, en las tiendas de comercio, por 75 centavos le cargan á uno $7\frac{1}{2}$ reales. ¿Cómo se explica esto?

474. P. Es que los centavos de la presente transformación son centavos de *peso*, y los del comercio son centavos de sol; siendo de notar que el *peso* vale solamente 8 reales y el *sol* 10 reales. Ahora bien; desde que cada una de estas dos unidades (el peso y el S.) se halla dividida en cien partes iguales, llamadas *centavos*, es claro que los centavos *de peso* han de valer menos que los centavos de S. Así, 100 centavos de peso = 80 centavos de S. Por igual razón 50 centavos de peso = 40 centavos de S., etc. Comprenderéis mejor lo que acabo de decir cuando tratemos de las operaciones llamadas *reducción á la unidad y proporción*. Entre tanto, basta que os fijéis por ahora en que, cuando se transforma una fracción ordinaria en fracción decimal, la especie ó naturaleza de la unidad no cambia, sino únicamente la forma de la fracción: de modo que $\frac{3}{4}$ de *peso* (dividido éste en 4 partes iguales) vienen á ser lo mismo que 75 centavos de *peso* (suponiendo que esté dividido éste en cien partes iguales); ó, en otros términos: que $\frac{3}{4}$ (fracción ordinaria) y 0,75 (fracción decimal) son la misma cosa, representando cada una de ellas las $\frac{3}{4}$ partes del *peso*, que es en el presente caso la unidad común.

Reanudando ahora el hilo de la lección que quedó interrumpido por la observación de José,

475. Sea $\frac{5}{8}$ la fracción ordinaria que se quiere transformar en una fracción decimal equivalente. Razonando y .operando como en el precedente ejemplo, se tendrá:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ \cline{2-2} 5{,}0 & 0{,}625 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

De suerte que, si se trata de $\frac{5}{8}$ de vara, por ejemplo, se habrá transformado esta fracción ordinaria en

$$0{,}625\ (\textit{de vara}) = \frac{625}{1000} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125}$$

476. Se operará del mismo modo si el numerador es más grande que el denominador. Así:

$$\frac{23}{16} = 1{,}4375$$

477. Sucederá frecuentemente que la fracción propuesta no pueda transformarse exactamente en decimales, verbi-gracia: la fracción $\frac{2}{3}$,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \cline{2-2} 2{,}0 & 0,\ 666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Operando como en los ejemplos precedentes, se han tenido 20 décimos por dividendo, 6 décimos por cociente y 2 décimos por resto, ó 20 centésimos; después, 6 centésimos por segunda cifra del cociente y 2 centésimos por resto, ó 20 milésimos, y así en seguida, indefinidamente; de suerte que

$$\frac{2}{3} = 0{,}666...$$

NOTA. -Se ponen puntos suspensivos para indicar que el cociente se compone de un número que se reproduce una infinidad de veces.

478. Se podía prever que ello tenía que ser así, porque hemos visto (art. 397) que una fracción que tiene 3 por denominador, no puede ser transformada sino en otra cuyo denominador sea múltiple de 3. Ella no podría convertirse en fracción decimal, pues que ninguno de los denominadores de ésta (10, 100, 1000, etc.) contiene el factor 3.

No era lo mismo respecto á la fracción $\frac{3}{4}$, que ha podido ser transformada en centésimos, porque 100 es múltiple de 4. Por la misma razón, siendo 1000 múltiple de 8, la fracción $\frac{5}{8}$ ha podido ser transformada en milésimos.

479. En general, *para que una fracción pueda ser transformada exactamente en decimales, es preciso que su denominador no sea compuesto sino de factores 2 ó 5, que son los únicos que entran en la composición de los denominadores decimales.* Esto se entiende respecto á las fracciones que han sido reducidas á su más simple expresión. Así, la fracción ordinaria $\frac{51}{60}$ puede transformarse en decimal; porque, desembarazando sus dos términos del factor 3, queda en $\frac{17}{20}$ cuyo denominador no contiene sino los factores 2 y 5.

480. Cuando la fracción no puede transformarse exactamente en decimales, llega un momento en que se hace ella periódica, es decir, que se reproducen en el cociente las mismas cifras sucesivamente y en el mismo orden. Así:

0,6666...
0,434343...

son fracciones periódicas. En la primera de estas dos fracciones el período es 6; en el segundo el período es 43. En general, se llama *periodo* el conjunto de las cifras que se reproducen periódicamente en el cociente.

481. Algunas veces los períodos no empiezan inmediatamente después de la coma, como se ve en la siguiente fracción:

0,472383838

Se comprende fácilmente que, tarde ó temprano, la fracción indefinida debe hacerse periódica; porque, suponiendo que se haya obtenido por resto todos los números inferiores al divisor, el resto siguiente no podrá ser sino alguno de los ya obtenidos; de suerte que el dividendo se encontrará de nuevo en el estado en que ya se encontró, lo que dará al cociente las mismas cifras y en el mismo orden.

Puede decirse que los períodos empezarán, *á más tardar*, después que se haya obtenido en el cociente tantas cifras, menos una, cuantas unidades haya en el divisor. Así, por ejemplo, si se divide por 7, el período no puede tener más de seis cifras, porque después de haber obtenido como restos los seis números inferiores al divisor, la séptima cifra no puede ser sino una de las ya obtenidas; lo que vuelve á poner la operación en el mismo estado en que se hallaba en ese momento.

En resumen:

482. *Se llanta* FRACCIÓN DECIMAL DEFINIDA *á una fracción decimal que consta de un número limitado de cifras*, tales; como las fracciones 0,75 y 0,625, que ya hemos considerado.

483. Fracción decimal periódica *es una fracción decimal compuesta de un número ilimitado de cifras, y de las que alguna ó algunas se reproducen sucesivamente en el mismo orden é indefinidamente*.

484. *Las fracciones periódicas son de dos clases: las de la primera clase toman el nombre de* PERIÓDICA-PURA Ó PERIÓDICA-SIMPLE, *y las de la segunda el de* PERIÓDICA-MIXTA. *Cuando el periodo comienza Inmediatamente después de la coma, como en 0,666…, la fracción es periódica-pura; cuando el periodo no comienza inmediatamente después de la coma, como en 0,72383838…, la fracción es periódica-mixta*.

485. Además: que la fracción sea ó no capaz de ser expresada exactamente en decimales, la transformación se hará siempre de la misma manera, es decir, que en general *se divide el numerador por el denominador, y, colocando un cero á la derecha de cada resto, se continúa la división hasta que se haya llegado á un cociente exacto, ó bastante aproximado al objeto que uno se propone*.

NOTA.- Algunos acostumbran preparar el cálculo, colocando desde luego uno, dos ó más ceros á la derecha del dividendo, según que se quiera tener una, dos, tres ó más decimales. Así, por ejemplo, en el caso ya considerado $\frac{23}{16}$ si se proponen hacer la transformación á menos de un milésimo, empiezan por colocar tres ceros á la derecha del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 23000 & \underline{16} \\ 7 & \;1,\ \text{etc.} \\ & \\ & \text{etc.} \end{array}$$

486. Si uno se para en la cifra de los centésimos descuidando el resto, se dice que el cociente es á menos de un centésimo de exactitud. En efecto: siendo el resto más pequeño que el divisor, dividiéndolo por este número, no se podría tener sino uno ó más milésimos, que formarían solamente una fracción de centésimo. En general, *el error que se comete descuidando el resto de la división, es siempre una fracción de unidad del orden de la última cifra obtenida en el cociente*.

Cuando la fracción que se ha transformado en decimales deba emplearse frecuentemente en las operaciones posteriores, se calcula su expresión con un número bastante grande de cifras decimales, reservándose uno el derecho de desechar una parte de esas cifras cuando la aplicación que se quiere hacer de la fracción no exija una exactitud tan grande. Sea, por ejemplo,

$$\frac{5}{7} = 0{,}7142857142\ldots$$

El valor de esta fracción

á menos de un décimo	= 0,7
“ de un centésimo	= 0,71
“ de un milésimo	= 0,714
“ de un dimilésimo	= 0,7142.
	etc.

487. Cuando la primera de las cifras que se descuidan es más grande que 5 ó igual á 5 seguida de otras cifras decimales, se aumenta una unidad á la última de las cifras conservadas.

Así, en la expresión de la fracción

$$0{,}7428356,$$

si quisiese uno limitarse á tres cifras decimales, se escribiría 0,743.

Es evidente que esto vendría á ser lo mismo que agregar á la fracción arriba dada, 0,0001644, cantidad más pequeña que 0,0005 ó la mitad de un milésimo, mientras que, si se escribiese solamente 0,742, se descuidaría 0,0008356, que es más grande que un medio-milésimo.

Se dice entonces que se ha expresado la fracción á menos de una semi-unidad del último orden decimal.

Por la misma razón, en la transformación de una fracción en decimales, se hará bien en aumentar una unidad á la cifra en que se haya uno detenido en el cociente, toda vez que el resto sea mayor que la mitad del divisor; porque este resto, dividido por el divisor, representa una fracción mayor que una semi-unidad del último orden del cociente,

§

TRANSFORMACIÓN DE UNA FRACCIÓN DECIMAL EN OTRA FRACCIÓN ORDINARIA EQUIVALENTE

Hay tres casos, según que la fracción decimal propuesta sea definida, periódica-simple ó periódica-mixta.

488. *Primer caso*. Sea 0,6203 la fracción propuesta.

Es evidente, en este caso, que bastará quitar la coma y restablecer el denominador, que, como se dijo (art. 247), *debe ser siempre la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales haya en la fracción propuesta.*

(NOTA.- Es preciso no olvidar que se da el nombre de cifras decimales solamente á aquellas que están colocadas á la derecha de la coma).

Así,

$$0{,}7408 = \frac{7408}{10000} = \frac{463}{625};$$

$$0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125};$$

$$3{,}47 = 3 + \frac{47}{100} = \frac{347}{100}.$$

489. *Segundo caso*. Si la fracción propuesta es periódica simple, *se toma por numerador el periodo, y por denominador un número formado de tantos 9, cuantas cifras hay en el periodo*.

La precedente regla se funda en las siguientes observaciones:

1ª. Observación: toda fracción decimal periódica-simple ha provenido de una fracción ordinaria que ha tenido por denominador 9 ú otro número susceptible de transformarse en 9,99, 999…, sin alterar el valor de la fracción.

Así, por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{3}{11} = \frac{1 \times 9}{11 \times 9} = \frac{27}{99}$$

$$\frac{5}{111} = \frac{5 \times 9}{111 \times 9} = \frac{45}{999}$$

$$\frac{70}{90} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{7}{9}$$

etc.

2ª. Observación: en una fracción periódica-simple, la cifra ó cifras del periodo vienen á ser las mismas que las del numerador de la correspondiente fracción ordinaria (expresada, se entiende, con un denominador novenario.) [*]

Así,

$$0{,}676767\ldots = \frac{67}{99}$$

3ª. Observación: á cualquier periodo de una fracción periódica-simple se le puede dar el carácter determinado ó definido, con sólo agregar al cociente el valor del resto que ha quedado en el rango precedente, siendo de notar que este hecho anula toda la serie de periodos que siguen al primero. Sea, por ejemplo:

$$0{,}1111\ldots$$

Si yo quiero parar en el primer período, y tener un cociente exacto, escribiré:

$$0{,}1 + \frac{1}{9} \text{ de décimo,}$$

(*) Nos permitimos dar ese calificativo á los denominadores indicados en la *1ª. Observación*.

En efecto, restableciendo el denominador sobrentendido, que afecta á la primera cifra decimal (que aquí forma el primer período), se tiene:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{90} = \frac{1 \times 9 + 1}{90} = \frac{9+1}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Ello tenía que ser así; porque la fracción decimal (0,1 + $\frac{1}{9}$), no ha sido otra cosa que el cociente completo de la división de 1 (*numerador*) por 9 (*denominador*) de la fracción ordinaria .$\frac{1}{9}$., como se ve aquí:

$$\left\{\begin{array}{ll|l} \text{unidad} & 1 & 9 \\ \cline{3-3} \text{décimo} & 10 & 0{,}1+\frac{1}{9} \text{ de décimo.} \\ \text{resto} & 1 & \end{array}\right.$$

Del mismo modo 0,080808… = $\frac{8}{99}$.

En efecto:

$$\begin{array}{lr|l} \text{unidades….} & 8 & 99 \\ \cline{3-3} \text{décimos…..} & 80 & 0{,}08 + \left(\frac{8}{99} \text{ de } \frac{1}{100} \right) = \frac{8}{100} + \frac{8}{9900} = \frac{8 \times 99 + 8}{9900} \\ \text{centésimos..} & 80 & \\ & 8 & = \frac{792+8}{9900} = \frac{800}{9900} = \frac{8}{99} \end{array}$$

Se ve por los precedentes ejemplos, que la fracción del cociente equivale á toda la serie de períodos (que, á no haber sido interrumpidos, habríanse propagado á la derecha del primero hasta el infinito), y que han quedado anulados por sólo el hecho de haberse agregado á la parte entera del cociente el *resto*, ó sea la fracción generadora de dicha serie de períodos.

Se ve por ellos, que el primer período mismo ha tenido un idéntico origen, esto es, que ha provenido de una fracción semejante al *resto* del cociente, pero de orden superior.

Por último, dichos ejemplos (que son aplicables á toda clase de períodos simples), muestran claramente que la cifra ó cifras decimales de una fracción *periódica-simple*, forman exactamente el numerador de la equivalente fracción ordinaria, y que ésta ha de tener por denominador tantos 9 cuantas sean las cifras componentes del período.

Queda así confirmada la regla establecida para el *segundo caso*; sin embargo, la apoyaré, á mayor abundamiento, con la autoridad del maestro Adhémar, que se expresa como sigue:

«Representemos la fracción 0,676767… por x. (Es de uso
«en el lenguaje matemático; emplear una letra, sobre todo
«una de las últimas letras del alfabeto, para representar
«las cantidades que se buscan). Y bien: multiplicando por
«100 la fracción dada, según el principio establecido para
«multiplicar por 10, por 100, por 1000 un número
«decimal (art. 266),
«tendremos ………………….100 x = 67,676767…
«de donde……………………. $\underline{1 \text{ x} = \ 0{,}676767 \ldots}$

« sustrayendo de la primera,
ecuación la segunda, se tiene 99 x = 67
« Dividiendo ambos miembros por 99, resultará:

$$\text{x=: } \frac{67}{99} \text{ ».}$$

Tercer caso.- Para transformar en fracción ordinaria una fracción decimal periódica mixta,

490. *Basta tomar por numerador las cifras no periódicas; darles por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas sean dichas cifras; agregar á la fracción, así obtenida el valor del periodo*, EN EXPRESIÓN NOVENARIA (art. 489, segunda observación), *y efectuar la adición; pues ésta dará á la vez el numerador y el denominador de la correspondiente fracción ordinaria*. Así:

$$0{,}478535353\ldots = \frac{478}{1000} + \frac{53}{99} \quad X \quad \frac{1}{1000} = \frac{47375}{99000}$$

DEMOSTRACIÓN

Admitiendo los principios establecidos en los tres artículos precedentes, la demostración de la regla establecida para el tercer caso se hace muy sencilla. En efecto, dada la fracción periódica-mixta 0,478535353…, si restablecemos los denominadores sobrentendidos bajo las tres cifras de la izquierda, y reemplazamos el período por su valor equivalente, tendremos:

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{53}{99} \text{ de } + \frac{1}{1000} = \frac{478}{1000} + \frac{53}{99000} = \frac{478}{1000} + \frac{53}{99000}$$

$$= \frac{478 \times 99 + 53}{99000} = \frac{47375}{990000}$$

Como medio de verificación, y para mejor ilustrar la materia, voy á daros, hijos míos, la traducción de la regla establecida al respecto por Mr. Adhémar, y de su procedimiento:

490 *bis.- «Si la fracción es periódica-mixta, en general,*
» transpórtese sucesivamente la coma á derecha é izquier-
» da del primer periodo, y la diferencia entre las partes
» enteras de los números decimales que de ello resultaren,
» expresará el numerador.
» En cuanto al denominador, él se compondrá de tantos
» 9 cuantas cifras haya en el periodo, seguidos de tantos ce-
» ros cuantas cifras no periódicas haya después de la coma.
» Sea la fracción decimal periódica mixta:

0,478535353

» Representando todavía esta fracción por x y multipli-
» cándola por 100000,

» tendremos………….. $100000\,x$ (1) = 47853,5353…
$1000\,x$ (2) = 478,5353...
»Sustrayendo, se tiene $99000\,x = 47375$,
» En fin………………………… $x = \dfrac{47375}{99000}$.»

M.- Y ¿qué objeto tiene la transformación de fracciones ordinarias en fracciones decimales y viceversa?

----
(1) Se ha multiplicado x por 100000, á fin dé que la coma del segundo miembro de la ecuación avance hasta quedar á la derecha del primer periodo.
(2) Se la ha multiplicado por 1000 solamente, á fin de que la coma quede á la izquierda de dicho periodo

491. P.- Como las fracciones decimales ofrecen la gran ventaja de podérselas manejar como si fueran números enteros, conviene en muchos casos convertir en decimales las fracciones ordinarias, especialmente en las operaciones de sumar y restar, pues se ahorra el trabajo de buscar el más pequeño denominador común, y de dar ese denominador á cada una de las fracciones ordinarias; operación penosa las más veces. También ofrecen las fracciones decimales la gran comodidad de que, cuando el multiplicador ó el divisor es la unidad seguida de uno ó más ceros, la multiplicación ó la división se efectúan en un abrir y cerrar de ojos, con sólo trasladar la coma hacia la derecha ó la izquierda, ganando ó perdiendo tantos rangos cuantos sean los ceros del multiplicador ó divisor. Además, cuando el numerador y el denominador de una fracción común (reducida á su más simple expresión) contiene muchas cifras, no es fácil hacerse cargo, de pronto, qué parte de la unidad forma esa fracción; mientras que, convertida en fracción decimal, puede uno apreciar fácilmente su valor en décimos, centésimos ó milésimos, que es lo bastante, por lo regular, para las operaciones de comercio, de banco y de otros negocios por el estilo.

Mas las fracciones ordinarias tienen, además, sus ventajas, y entre ellas, la de fijar de una manera precisa y exacta el valor de las partes que la componen, siendo así que la correspondiente fracción decimal expresa, en los más de los casos, sólo el valor aproximativo. Así, la fracción ordinaria $\frac{5}{9}$, por ejemplo, expresa exactamente el valor de ella, mientras que su equivalente en decimales 0,555… no da sino un valor aproximativo, quedando descuidadas una infinidad de cifras decimales. Ahora bien; si esa fracción decimal tuviese que ser multiplicada sucesivamente por muchos factores, el error cometido iría multiplicándose también sucesivamente, de suerte que el producto final sería menor, con mucho, que el producto real; así es que en las operaciones delicadas de las ciencias y de las artes, se emplean de preferencia las fracciones ordinarias. En fin, aún en los negocios comunes, es la práctica la que enseña cuándo es preferible el uno ó el otro de los dos sistemas.

CUESTIONARIO

Sirvas e usted transformarla fracción $\frac{3}{4}$ de nuestra moneda llamada peso de á 8 reales, en otra fracción equivalente, pero en forma decimal (473).- ¿Cómo se explica que los 75 centavos obtenidos en la operación anterior hagan $\frac{3}{4}$, es decir, 6 reales, y que en las tiendas de comercio, por 75 centavos, le carguen á uno $7\frac{3}{4}$ reales? (474).- ¿De qué modo se opera para transformar una fracción ordinaria en otra fracción decimal equivalente, cuando el numerador es más grande que el denominador? (476).- Ponga usted un ejemplo, en el que la fracción propuesta no pueda transformarse exactamente en decimales (477).- ¿Cómo se indica que el cociente se compone de un número que se reproduce una infinidad de veces? (477).- ¿Por qué motivo la fracción $\frac{2}{3}$ no puede ser transformada exactamente en fracción decimal, y por qué no sucede lo mismo respecto á $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$?(478 .- ¿Qué condición es precisa, es general, para que una fracción pueda ser transformada exactamente en otra fracción decimal (479).- ¿Qué sucede cuando una fracción no puede transformarse exactamente en otra fracción decimal? (480).- ¿Qué se entiende por fracción decimal definida? (482).- ¿Qué se entiende por fracción decimal periódica? (483).- ¿En cuántas clases se dividen las fracciones decimales periódicas? (484).- ¿Cómo se opera, en general, para obtener un cociente exacto ó bastante aproximado al objeto que se propone? (485).- ¿Cuándo es que se dice que el cociente es á menos de un décimo, de un centésimo, etc. ? (486).- ¿Cuándo es que se ha expresado la fracción á menos de una semi-unidad del último orden decimal? (487).- ¿Cómo se transforma una fracción decimal definida, en otra fracción ordinaria equivalente? (483).- ¿Cómo se transforma una fracción decimal periódica simple en otra fracción ordinaria equivalente, y qué observaciones hayal respecto? (489).- ¿Cómo se transforma una fracción decimal periódica-mixta en otra fracción ordinaria equivalente? (490).- ¿Qué objeto tiene la transformación de fracciones ordinarias en fracciones decimales y viceversa? (491).

EJERCICIOS <31> pág, 19, Ap.

I 0,666…………. =
II 0,434343…….. =
III 0,010101…….. =
IV 0,38777………. =
V 0,952323……… =
VI 0,478043043…. =

TRIGÉSIMA-CUARTA LECCIÓN

En las lecciones posteriores trataremos de las medidas, pesos y monedas españolas, dando entre tanto la preferencia, á las del llamado *sistema métrico*: ¡admirable invento de la famosa revolución francesa, y que habrá de universalizarse más tarde ó más temprano!

Medidas

492. Hasta aquí hemos considerado la unidad como abstracta en general, excepto algunos casos en que, para facilitar las explicaciones, la hemos concretado á una medida determinada y conocida. Aquella manera de considerar la unidad bastaba para establecer las teorías del cálculo, que forman el asunto de las anteriores lecciones; mas, cuando se quiere pasar á la aplicación, es preciso adoptar por unidad una medida determinada, á la cual puedan compararse todas las demás cantidades de la misma especie.

Supongamos que, habiéndose escogido por unidad de longitud una regla, que llamaremos A, se quiere medir con ella la longitud de otra cantidad más pequeña. Es incontestable que no se podrá expresar esta longitud sino bajo la forma de una fracción; mas ¿qué fracción podrá emplearse, cuál será su denominador? ¿Deberá suponerse la unidad dividida en 9, 15 ó 20 partes iguales, y cuántas de esas partes iguales podrán tomarse? Además, si se quiere trazar una línea que tenga de largo $\frac{13}{19}$ de la unidad, ¿cómo se encontrará, sobre la regla A, la longitud correspondiente? Sería preciso dividir esta regla en 19 partes iguales para que pudiesen encontrarse en ella 19 avos de unidad. Mas, si se quisiese que la línea tuviera de largo $\frac{23}{37}$ avos, sería menester dividir la regla en 37 partes iguales; y se comprende que sería imposible establecer así, sobre esa regla, todas las subdivisiones que pueden resultar de las combinaciones del cálculo. Ha sido, pues, preciso hacer una elección, y se ha dado preferencia á los divisores que se encuentran más frecuentemente en las aplicaciones.

Así, siendo el número 2 el más simple de todos los números, $\frac{1}{2}$ es la más simple de las fracciones, de cuyo grandor se forma más fácilmente una idea exacta y, por esta razón, ha debido ser empleada de preferencia en las primeras aplicaciones del cálculo. Después de eso, se ha hecho uso de la fracción $\frac{1}{3}$. La combinación de mitades con tercios ha obligado á establecer los sextos, así como la combinación de un tercio con un cuarto, ha conducido á emplear también el denominador 12. He ahí por qué casi en todos los pueblos las unidades adoptadas han sido divididas en 2, 3, 6, 8, 12, 20, etc.

Hay en el mundo civilizado una multitud de utilidades de longitud; mas nosotros nos ocuparemos solamente en el metro y la vara, como lo he insinuado al principio de la presente lección.

El metro

Sistema métrico

Oigamos al maestro Adhémar:

493. «Es sensible que los hombres no hayan podido entenderse desde un principio para adoptar, de común acuerdo, la misma unidad principal; de lo que ha resultado que cada pueblo, cada ciudad, y aún cada aldea, hayan tenido sus unidades particulares. Los unos tomaban por unidad de longitud la talla del hombre, que llamaban *toesa* y la dividían en seis partes iguales. Otros tomaban la unidad y la partían en ocho partes. Algunos empleaban una medida que llamaban *percha*. Las medidas itinerarias se llamaban algunas veces *leguas*, y variaban de un cantón á otro. Aquí la legua valía 2850 toesas; allí representaba el camino que un hombre podía hacer en una hora de tiempo; en otra parte la unidad se componía de mil pasos y tomaba el nombre de *milla*. Las unidades para evaluar un terreno cambiaban también según los lugares: algunas veces se les daba el nombre de *arpent,* que contenía 100 perchas;

en otros lugares se tomaba por unidad la cantidad de terreno que un hombre ó una carreta podía labrar en un día... En fin, no se habría encontrado, probablemente, dos villorrios en que las medidas fuesen perfectamente: idénticas; y se concibe qué manantial de errores y de fraudes debía ser esta confusión de medidas en las transacciones comerciales, así como en los trabajos de la industria».

«Se sentía, desde hace mucho tiempo, la necesidad de cambiar este estado de cosas, y por esto se había propuesto, en diferentes épocas, varios medios de remediar el mal. Mas se reconoció que ello era imposible por simples modificaciones, y se prefirió echar á un lado todas las medidas antiguas y escoger otras nuevas, que nada tuviesen de común con las primeras y que reuniesen en lo posible todas las ventajas.»

494. « Las tres condiciones esenciales á que era preciso satisfacer, eran:

1ª. *Adoptar por unidad principal una medida definida, invariable, y cuyo grandor preciso pudiese ser encontrado en todos los tiempos;*

2ª. *Que el sistema de medidas adoptado contuviese el menor número posible de unidades.*

3ª. *En fin, que cada unidad fuese subdividida, de la manera más conveniente, para la facilidad del cálculo».*

« La primera condición era la más difícil de llenarse. Se concibe, en efecto, que para obtener una cantidad de grandor invariable, era menester que su definición fuese tomada en la naturaleza; es lo que los antiguos habían tenido en cuenta al escoger por unidad de largor el codo, la toesa, el pie, la pulgada, etc., que arrancan evidentemente su origen, de las diversas partes de la estatura de un hombre. Mas, no siendo determinado de una manera rigurosa el grandor de esas unidades, túvose que recurrir á otros medios».

Unidad de longitud

« Habiendo llegado las ciencias matemáticas á tal grado de perfección, que se ha podido medir con exactitud la circunferencia de la tierra, se ha dividido este grandor en 40.000.000 de partes iguales, y se ha tomado una de esas partes por unidad de medida. Así»:

495. « El *metro*, unidad fundamental del nuevo sistema de medidas y pesas, es igual á ... $\frac{1}{40000000}$ de la circunferencia de la tierra, medida sobre un gran círculo que pasa por los polos, á .... $\frac{1}{40000000}$ ... de la distancia del polo al ecuador».

«Así se ha obtenido, pues, una cantidad invariable, y que podría encontrarse en todos los tiempos. En cuanto á la operación necesaria para conseguirlo, ella no es tan difícil como ordinariamente se imaginan las personas que no conocen todavía los procedimientos de la Geometría; fuera de que, si fuese posible imaginar que la longitud del metro pudiera perderse algún día, habría una infinidad de maneras de volver á encontrar este grandor, sin recurrir nuevamente á la medición de la tierra ».

«Hallándose determinada la unidad principal, se ha procurado dividirla de manera que se pueda aplicar á ella el cálculo decimal, que es más cómodo que el de las fracciones ordinarias y de los números complejos ".

496. « Así el *metro* ha sido dividido en diez partes, llamadas decímetros; cada decímetro contiene diez partes, que se llaman *centímetros*, y cada centímetro contiene diez *milímetros* etc."

«Para expresar las grandes dimensiones, se emplean como unidades los múltiples del metro. Así, una colección de diez metros forma el *decámetro*; cien metros forman un *hectómetro*; mil metros se llaman un kilómetro, y diez mil metros hacen un *miriámetro*».

497. « Yo representaré esta nomenclatura en el cuadro siguiente:

10 000……………….	miriá	metro
1 000……………….	kiló	
100………………	hectó	
10………………	decá(1)	
1……………………...		
0,1……………………	decí	metro
0,01…………………..	centí	
0,001…………………	decá	
0,0001……………….	milí	

CUESTIONARIO

¿Qué longitud tiene el metro? (495).- ¿Cómo se ha dividido el metro? (496).- ¿Cuáles son los múltiples y sub-múltiples del metro? (497).- ¿Con que letra se expresa en abreviatura el metro? (497).

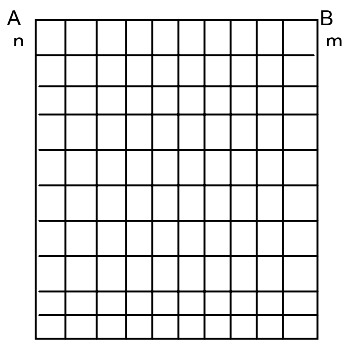
TRIGÉSIMA-QUINTA LECCIÓN

Unidad de superficie (2)

498. «Las unidades de superficie son los cuadros que tienen por costados las diversas unidades de longitud que se han expresado, es decir, el metro cuadrado, el decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado, el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado... Estas unidades se derivan del metro, pues que son cuadrados cuyos costados valen un decímetro, un centímetro, un decámetro, un hectómetro... El metro cuadrado se designa en los cálculos por la abreviatura *mg.*»

499. «TEOREMA.- *El metro cuadrado vale cien decímetros cuadrados y, en general, si el costado de un cuadrado vale diez veces el costado de otro cuadrado, el primero vale cien veces el segundo.»*

«En efecto, si se colocan diez decímetros cuadrados, los unos en seguida de los otros, sobre una misma línea AB, se obtiene una faja AB mn, que tiene diez decímetros (ó un metro) de largo y un decímetro de ancho. Si al lado de esta faja se colocan otras iguales hasta completar á diez, se obtiene un cuadrado que tiene un metro de largo y un metro de ancho, como lo representa esta figura»:



----

(1) El decámetro forma una medida muy cómoda para el agrimensor. La cadena de agrimensor tiene un decámetro de largo, etc.) Tomando de los señores Dumouchet et Dupuis.)

(2) Las explicaciones concernientes á esta clase de unidad y á las de volumen, capacidad y peso, las hemos tomado de MM. Dumouchet et Dupuis.

«Ahora bien: cada faja contiene diez decímetros cuadrados luego, las diez fajas contienen diez veces diez, ó ciento. Así, el metro cuadrado, vale cien decímetros cuadrados».

500. «En general, *se evalúa la superficie de un cuadrado haciendo el cuadrado de su costado, es decir, formando el producto de dos factores iguales á su costado.* Así, el cuadrado de 5 metros de costado vale 5 X 5, ó sea 25 metros" cuadrados. Del mismo modo: si el costado vale 5 centímetros, el cuadrado que sobre él se forme, contendrá 25 casillas iguales, cada una á un centímetro cuadrado».

501. «Los múltiples y sub-múltiples del metro cuadrado son (uniendo á la expresión griega la palabra *metro-cuadrado*)» :

EL MIRIAMETRO CUADRADO (cuadrado de 10000 metros de costado), que vale 10000 X 10000, ó sea 100000000 de metros cuadrados;

EL KILÓMETRO CUADRADO (cuadrado de 1000 metros de costado), que vale 1000 X 1000, ó sea 1000000 de metros cuadrados;

EL HECTÓMETRO CUADRADO (cuadrado de 100 metros de costado), que vale 100 X 100, ó sea 10000 metros cuadrados;

EL DECAMETRO CUADRADO (cuadrado de 10 metros de costado), que vale 10 X 10,6100 metros cuadrados;

EL METRO CUADRADO, UNIDAD PRINCIPAL;

EL DECÍMETRO CUADRADO (cuadrado de un decímetro de costado), que vale 0,01 de metro cuadrado, porque el metro cuadrado contiene 10 X 10, 6 100;

El CENTÍMETRO CUADRADO (cuadrado de un centímetro de costado), que vale 0,0001 de metro cuadrado, porque el metro cuadrado contiene 100 X 100, 6 10000;

Y el MILÍMETRO CUADRADO (cuadrado de un milímetro de costado), que vale 0,000001 de metro cuadrado, porque el metro cuadrado contiene 1000 X 1000, Ó 1000000.»

502. REGLA.- «*Para enunciar un número decimal de metros cuadrados, teniendo en cuenta los múltiples y submúltiples del metro cuadrado, se le divide desde luego, á lo menos mentalmente, en secciones de dos cifras á derecha é izquierda de la coma; si la última sección de la derecha no tiene sino una cifra, se agrega de ella un cero; se enuncia en seguida cada sección como si ella estuviese sola, uniendo á ella el nombre de sus unidades. La primera sección de la izquierda de la coma representa metros cuadrados, la segunda decámetros cuadrados, la tercera hectómetros cuadrados, y así en seguida. La primera sección de la derecha de la coma representa decímetros cuadrados, la segunda centímetros cuadrados y la tercera milímetros cuadrados, etc.*»

Así, el número 21456 m.q.,947 enuncia 2 hectómetros cuadrados, 14 decámetros cuadrados, 56 metros cuadrados, 94 decímetros cuadrados, 70 centímetros cuadrados. Ello resulta de los valores respectivos de los múltiples y submúltiples del metro cuadrado.»

503. *«La unidad de superficie para los terrenos es el AREA (un decámetro cuadrado), es decir, un cuadrado de 10 metros de costado, que vale, por consiguiente, 10 X .10, ó 100 metros cuadrados.»*

«El área se deriva del metro, pues que es un, cuadrado cuyos lados tienen de largo cada uno 10 metros; esta medida se designa en el cálculo por *a.*»

«El múltiple y el submúltiple (agregando á ella palabra área) son:»

504. «La HECTAREA, que vale 100 áreas, es decir, 100 veces 100 metros cuadrados, ó 10000 metros cuadrados, y que, por tanto, equivale al hectómetro cuadrado;»

«El *área*, UNIDAD PRINCIPAL;»

«La CENTIAREA, que vale 0,01 de área, es decir, un metro cuadrado.»

CUESTIONARIO

¿Qué se entiende por unidad de superficie? (498).- ¿Cuántos decímetros cuadrados tiene el metro cuadrado? (499).- ¿Cómo se avalúa la superficie de un cuadrado? (500).- ¿Cuáles son los múltiples y submúltiples del metro cuadrado? (501).- ¿Cómo se enuncia un número decimal de metros cuadrados, teniendo en cuenta los múltiples y submúltiples? (502).- ¿Cuál es la unidad de superficie para los terrenos? (503).- ¿Cuál es su múltiple y cuál su submúltiple? (504).

EJERCICIOS < 32 >, pág. 20, Ap.

«Enunciar los siguientes números, teniendo los múltiples del metro cuadrado:»

I. 364 m.q., 456	VI 71642 m. q.,765
II. 54350 m. q.,02468	VII. 1850 m. q.,3651
III. 512729 m. q.,12345	VIII. 81543 m. q.,3645
IV. 729 m. q.,86421	IX. 4365496 m. q.,001375
V. 4096 m. q.,05079.	

« Escribir en cifras los números siguientes:

X. «Cuatro *decámetros cuadrados*, ocho *metros Cuadrados*, treinta y cinco *decímetros cuadrados*, sesenta *centímetros cuadrados.*»

XI. «Treinta y cinco *hectómetros cuadrados*, cinco *decámetros cuadrados*, veintiocho *metros cuadrados*, dieciséis *decímetros cuadrados*, cuarenta y nueve c*entímetros cuadrados*.»

XII. «Seis *hectómetros cuadrados*, ochenta y nueve *metros cuadrados*, ocho *decímetros cuadrados*, sesenta y tres *centímetros cuadrados*, veinte *milímetros cuadrados*.»

XIII. «Tres *decímetros cuadrados*, cincuenta y seis *centímetros cuadrados*, treinta *milímetros cuadrados*.»

XIV. «Un *centímetro cuadrado*, cuarenta y cinco *milímetro cuadrados*.»

«Enunciar los siguientes números, teniendo en cuenta el múltiple y el submúltiple usados respecto al *área*»:

XV. 1789ª.,50	XVIII. 36145ª.,40	XXI. 23456ª.,56
XVI. 4628ª.,75	XIX. 183064ª.,15	XXII. 135790ª.,24
XVII. 25604ª.,25	XX. 1234 ª.,56	XXIII. 2468015ª.,30

Escribir en cifras los números siguientes:

XXIV. «Tres *hectáreas*, ocho *áreas*, cincuenta *centiáreas*».
XXV. «Nueve *hectáreas*, quince *áreas*, veinticinco *centiáreas*.»
XXVI. «Sesenta y dos *hectáreas*, treinta y ocho *áreas*, ochenta y cinco *centiáreas*.»
XXVII. «Trescientas cuarenta y cinco *hectáreas*, sesenta y cuatro *áreas*, diez *centiáreas*.»
XXVIII. «Dos mil quinientas *hectáreas*, veinte *áreas*, setenta y cinco *centiáreas*.»

TRIGÉSIMA-SEXTA LECCIÓN

«Unidades de volumen y de capacidad»

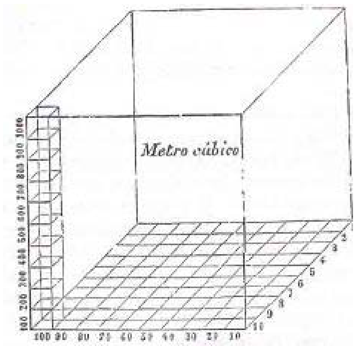
« Unidades de volumen»

505. «Las unidades de volumen son los cubos que tienen por costados el metro y sus divisiones, es decir, el metro cúbico, el decímetro cúbico, el centímetro cúbico… Estas unidades se derivan del metro, pues que son cubos cuyos costados valen un metro, un decímetro, un centímetro… El metro cúbico se designa en abreviatura por *m. c.* »

506. «*El metro cúbico vale mil decímetros cúbicos y, en general, si el costado de un cubo vale diez veces el costado de un otro cubo, el primero vale mil veces el segundo*.»

«Si se colocan, en efecto, diez decímetros cúbicos en seguida los unos de los otros sobre una misma línea, y si se repite diez veces la misma operación, se obtiene una sección que tiene diez decímetros (ó un metro) de largo y de ancho, y un decímetro de alto, como lo representa esta figura »:

«Si se colocan en seguida diez secciones parecidas, las unas sobre las otras, se obtiene un cubo que tiene un metro de largo, un metro de ancho y un metro de alto, es decir, un metro cúbico. Ahora bien: cada sección contiene cien decímetros cúbicos; luego, las diez secciones con tienen diez veces ciento ó mil. Así, el metro cúbico vale mil decímetros cúbicos.»



507. « En general, *se evalúa el volumen de un cubo haciendo el cubo de su costado, es decir, formando el producto de tres factores iguales á su costado*. Así, el cubo de 5 metros de costado vale 5 X 5 X 5, ó 125 metros cúbicos.»

508. « Los submúltiples del metro cúbico son:

«El *decímetro cúbico* (cubo de un decímetro de costado), que vale 0,001 de metro cúbico, porque el metro cúbico contiene 10 X 10 X 10 ó 1000.»

«El *centímetro cúbico* (cubo de un centímetro de costado), que vale 0,000001 de metro cúbico, porque el metro cúbico contiene 100 X 100 X 100 ó 1000000.»

«Y el *milímetro cúbico* (cubo de un milímetro de costado), que vale 0,000000001 de metro cúbico, porque metro cúbico contiene 1000 X 1000 X 1000 Ó 1000000000,»

«En cuanto á los múltiples del metro cúbico, ellos son usados.»

509. «REGLA.- *Para enunciar un número decimal metros cúbicos, teniendo en cuenta los submúltiples del metro cúbico, se les divide desde luego, al menos mentalmente, en secciones de tres cifras, á la derecha de la coma; sí la última sección de la derecha no tiene*

sino una ó dos cifras, se agregan dos ceros ó un cero. Se enuncia entonces la parte entera, y en seguida cada sección, como si estuviera sola, uniendo á ella el nombre de sus unidades. La primera sección de la derecha de la coma representa .decímetros cúbicos, la segunda centímetros cúbicos, y tercera milímetros cúbicos.»

«Así, el número 89 m.c.,1849 se enuncia: 89 metros cúbicos, 184 decímetros cúbicos, 900 centímetros cúbicos. Esto resulta de los valores respectivos de los sub múltiples del metro cúbico.»

510. «La *unidad de volumen* para la leña es el stérea ([1]), que vale un metro cúbico. El stérea se deriva del metro, pues que es un metro cúbico; él se designa en abreviatura por *st*.»

« Para tener un stérea de leña, cuando los trozos de leña son de un metro de largo, se les, acomoda sobre una armazón horizontal de un metro cuadrado, hasta la altura de un metro.»

«La leña se mide también al peso, y es lo más común.»
«El múltiple y el submúltiple usados para la leña son:
511. «El decastérea, que vale 10 stéreas,
«Y el decistérea, que vale 0,1 de stérea.»

« Unidad de capacidad»

512. « *La unidad de capacidad para los líquidos y para las materias secas es el* LITRO: *es una vasija cuya capacidad vale un decímetro cúbico*. El litro se deriva del metro, pues que su capacidad interior vale un decímetro cúbico; él se designa en abreviatura por *l*. »

«Los múltiples y submúltiples del litro se forman uniendo la palabra litro:

513. «El KILÓLITRO, que vale 1000 litros ó 1000 decímetros cúbicos, es decir, 1 metro cúbico;

«El HECTÓLITRO, que vale 100 litros;
« El DECALITRO, que vale 10 litros;
«El LITRO, *unidad principal*;
« El DECÁLITRO, que vale 0,1 de litro;
« El CENTÍLITRO, que vale 0,01 de litro;

« Y el MILÍLITRO, que vale 0,001 de litro, 6 0,001 de decímetro cúbico, es decir, un centímetro cúbico.»

«En el comercio cada una de estas medidas tiene su doble y su mitad. Todas ellas son cilíndricas; pero con la misma capacidad que las medidas cúbicas que ellas representan. Para medir los líquidos se sirven más frecuentemente de cilindros de estaño, cuya profundidad es el doble del diámetro; y para medir las materias secas se sirven de cilindros de madera, cuya profundidad es igual al diámetro.»

CUESTIONARIO

¿Qué se entiende por unidad de volumen? (005).- ¿Cuántos decímetros cúbicos tiene el metro cúbico? (506).- ¿Cómo se evalúa el volumen de un cubo? (507).- ¿Cuáles son los submúltiples del metro cúbico? (508).- ¿Cómo se enuncia un número decimal de metros cúbicos, teniendo en cuenta sus submúltiplos?(509).- ¿Cuál es la unidad de volumen para la leña? (510).- ¿Cuál es el múltiple y sub-múltiple de la stérea? (511).- ¿Cuál es la unidad de capacidad para los liquidas materias secas? (512).- ¿Cuáles son los múltiples y súb múltiples del litro? (513).

EJERCICIOS < 33 >, pág. 21, Ap.

« Enunciar los números siguientes, teniendo en consideración los submúltiples del metro cúbico:

([1]) Voz que tomamos del francés, por carecer de la equivalente el diccionario castellano.

I. 25 m. c.,4	IV. 1800 m. c., 3437	VII. 341 m.c.,4756
II. 177 m. c.,56	V. 2465 m. c., 13579	VIII. 1752 m.c.,75
III. 234 m. c.,365	VI. 8 m. c.,465184	XI. 3600 m.c',4

« Escribir en cifras los números siguientes:

X. «Dos *metros cúbicos*, quinientos *decímetros cúbicos*;»

XI. «Cuatrocientos veintiocho *metros cúbicos*, cincuenta y un *decímetros cúbicos*;»

XII. «Dos mil trescientos veinticinco metros *cúbicos*, cuarenta y ocho *decímetros cúbicos*, veinte centímetros *cúbicos*;»

XIII. «Nueve decímetros *cúbicos*, setenta y dos centímetros *cúbicos*;»

XIV. «Noventa y cinco *decímetros cúbicos*, veintinueve *centímetros cúbicos*, cuarenta *milímetros cúbicos*.»

TRIGÉSIMA-SÉPTIMA LECCIÓN

Unidades de pesos y monedas

§ IV. Pesos

514. En Francia (para no interrumpir la traducción que hacemos de los señores Dumouchel et Dupuis), *la unidad de peso es el* GRAMO, *igual al peso absoluto (ó en el vacío) de un centímetro cúbico de agua pura (ó destilada)*, fijada á la temperatura de su máximo de densidad, es decir, á 4 grados sobre cero del termómetro de Réaumur.»

«Se puede decir que el GRAMO es la milésima parte del peso absoluto de un litro de agua pura, tomada á la temperatura de su máximo de densidad, pues que el centímetro cúbico vale 0,001 de decímetro cúbico, es decir, 0,001 de litro.»

……………………………………………………………………………………………………

515. «El GRAMO se deriva del metro, siendo el peso de un centímetro cúbico de agua; él se designa en los cálculos por la abreviatura *g*.»

«Los múltiples y submúltiples del gramo son:

516. «El *Kilógramo* (que vale 1000 gramos), es el peso de 1000 centímetros cúbicos, es decir, un decímetro cúbico de agua ó de un litro de agua;

« El *Hectógramo*, que vale 100 gramos;
«El *Decagramo*, que vale 10 gramos;
«El *gramo*, unidad principal;
« El *decígramo*, que vale 0,1 de gramo;
«El *centígramo*, que, vale 0,01 de gramo;

«Y el *milígramo*, que vale 0,001 de gramo (es el peso de la milésima parte de un centímetro cúbico de agua, es decir, de un milímetro cúbico de agua.»

517. « *Se llama* QUINTAL MÉTRICO *un peso* de 100 *kilógramos*, y TONEL DE MAR *un peso* de 1000 *kilogramos*; el tonel de mar es el peso de 1000 decímetros cúbicos de agua, es decir, de un metro cúbico de agua.»

518. *Un volumen dado de agua destilada y que esté á la temperatura de cuatro grados sobre cero) pesa tantos gramos cuantos centímetros cúbicos corresponden á ese volumen; y recíprocamente, un peso dado de agua destilada ocupa tantos centímetros cúbicos, cuantos gramos corresponden á ese peso*, pues que un centímetro cúbico de agua pesa un gramo.»

« Se determina en general el peso de los cuerpos por medio de la balanza.»

§ V. *Monedas*

519. « Las *monedas* son piezas de metal que sirven para el comercio.»

«Hay monedas de oro, de plata y de cobre.»

520. *«La unidad de las monedas en Francia es el* FRANCO: *es una pieza de moneda que pesa 5 gramos y que se compone de nueve décimos de plata pura y de un décimo de cobre*. El franco se deriva del metro, porque, teniendo el peso de 5 gramos, él se deriva del gramo, y éste del metro.»

521. « Se llama *décimo* («décime») la décima parte del franco, y *céntimo* («céntime») la centésima parte del franco; el décimo vale evidentemente 10 céntimos. El décimo y el céntimo son de bronce.»

522. «Las monedas de oro son compuestas de nueve décimos de oro puro y de un décimo de cobre.»

« Las monedas de plata son compuestas, como el franco, de nueve décimos de plata pura y de un décimo de cobre.»

« Las monedas de bronce son compuestas de 95 centésimos de cobre, 4 centésimos de estaño y 1 centésimo de cinc.»

523. Valor, peso y diámetro de diferentes monedas:

VALOR		PESO	DIÁMETRO
Oro	100 francos....	32,258	35 milímetros
»	50 »	16,129	28 »
»	20 »	6,4516	21 »
»	10 »	3,2258	19 »
»	5 »	1,6129	17 »
Plata	5 francos	25	37 milímetros
»	2 »	10	27 »
»	1 »	5	23 »
»	50 céntimos	2,50	18 »
»	20 »	1	15 »
Bronce	10 »	10	30 »
»	5 »	2	20 »
»	1 »	1	15 »

524. «TEOREMA.- *Una suma dada de dinero pesa tantas veces 5 gramos cuantos francos contiene esta suma,* y recíprocamente, *un peso, dado de dinero vale tantos francos cuantas veces ese peso contiene 5 gramos*, ya que un franco pesa 5 gramos.»

CUESTIONARIO

¿Qué es gramo? (514).- ¿De dónde deriva el gramo? (515).- ¿Cuáles son los múltiples y sub múltiples del gramo? (516).- ¿Qué se entiende por quintal métrico y por tonel de mar? (517).- ¿Cómo se determina, en general, el peso de los cuerpos? (519).- ¿Cuál es la unidad de las monedas francesas, su peso y su ley? (521).- ¿Qué se entiende por décimo y céntimo? (522).

«PROBLEMAS SOBRE LAS MEDIDAS MÉTRICAS»

<34 >, pág. 22, Ap.

"*Nota*.- El *kilómetro* se designa en abreviatura por k, 10 mismo que el kilogramo, pero es fácil no confundirlos.»

1. Se ha importado en Francia:

48025k de té en 1841,		317962 k en 1842,
149239k " en 1843,	y	418324 k en 1844.

«¿Cuánto se ha importado durante esos cuatro años?»

2. « Entre los departamentos de Francia que cultivan tabaco, se cuentan:

El del Norte, en que se cultiva 1181 hectáreas
El del Pas de Calais ………… 523 »
El del Lot ……………………. 1651 »
El del Lot-et-Garonne ………. 2959 »

¿«Cuántas hectáreas hay en dichos departamentos destinadas al cultivo del tabaco?»

3. «¿Qué cuestan 42 hectáreas de terreno, á 750f la hectárea?»

4. «¿Qué cuestan 12st,4 de leña, á razón de 19f, 25 el stérea?»

5. «¿Qué cuestan 15 hectólitros de trigo, á razón de 16f,50 el hectólitro?»

6. «La distancia del polo boreal al ecuador vale 10000000 metros; ella vale también 90 grados. ¿Cuántos metros vale un grado?»

7. «Se llama legua de 25 al grado la 25.ª parte de un grado; ¿cuántos metros vale ella?»

8. «Evaluar en metros una media legua, un cuarto de legua, tres cuartos de legua.»

9. « El kilogramo de azúcar cuesta 1f,80, el kilogramo de café 3f,20. ¿Cuántos kilogramos de azúcar (ó de café) se tendrán por 32f,40? y ¿cuántos kilogramos de azúcar y de café, si se quiere tener tanto del uno como del otro, por dicho valor?»

10. «Un saco que pesa 1065 gr.s contiene 20 piezas de á 2 francos, 15 piezas de á 1 franco y. varias piezas de á 5 francos. ¿Cuántas piezas contiene el saco, suponiendo que el saco vacío pesa 15 gramos?»

11. «¿Cuántos kilogramos de pan se tendrán por 511f, á 0f,28 el kilogramo?»

12. «¿Cuántas piezas de á 5 francos se necesitan para dar un peso igual á 1 kilógramo?»

13. «Un vaso vacío pesa 75 decágramos, y pesa 325 decágramos cuando está lleno de agua pura; ¿cuál es la capacidad de ese vaso?»

14. ¿Qué cuestan 7436 kilogramos de leña, á 2 f,25 por 100 kilogramos?»

15. "Se tienen colocadas 20 piezas de un franco en una fila y al contacto, en línea recta; ¿cuántas piezas de 2 francos es menester agregar para tener una longitud igual á 1 metro?»

16. "Se tienen 11 piezas de á 2 francos á la fila y en contacto, en línea recta; ¿cuántas piezas de á 5 francos de plata es menester agregar para tener una longitud de un metro?»

17. "Un kilogramo de agua del mar contiene 50 gramos de sal; 475 decágramos ¿cuánto contienen de sal?»

18. «Las ruedas de un coche tienen 4m,50 de circunferencia, y el coche avanza, por consiguiente, 4m,50 en cada vuelta. ¿Qué camino habrá recorrido el coche cuando las ruedas hayan dado 36000 vueltas?»

19. ¿Cuántas piezas de 5 francos se necesitan para hacer equilibrio en una balanza á un vaso que contiene 2^{1},86 de agua pura y que vacío pesa 640 gramos?»

20. "Un vaso A contiene 50 litros de vino, y un otro vaso B contiene 30 litros de agua. Se tienen otros dos vasos vacíos capaces de contener cada uno de ellos 5 litros; se saca con uno de estos vasos cinco litros de vino del vaso A para ponerlos en el vaso B, y al mismo tiempo, con el otro vaso, 5 litros de agua del vaso B para ponerlos en el vaso A. En seguida se sacan 5 litros de la primera mezcla para ponerlos en la segunda, y al mismo tiempo, 5 litros de la segunda para ponerlos en la primera mezcla. Se pregunta: ¿cuánto contiene entonces cada vaso de vino y de agua?»

TRIGÉSIMA-OCTAVA LECCIÓN

Medidas, pesas y monedas españolas,

QUE SE USABAN EN SUD-AMÉRICA AL TIEMPO DE SU EMANCIPACIÓN, Y QUE RIGEN TODAVÍA EN LA MAYOR PARTE DE LOS ESTADOS HISPANO-AMERICANOS.

525. *La* VARA ESPAÑOLA, *unidad* PRINCIPAL (que equivale á 0,8359 del metro). En el artículo 376 se hizo la nomenclatura de los submúltiples de esta unidad, y sólo debo agregar aquí que todos ellos, inclusa la línea, son fracciones que tienen por denominador un múltiple de 2, como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ó un múltiple de 3, como $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$ ó ambos números como $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{36}$, etc.

526. Los MÚLTIPLES son:

La CUADRA (que vale la cuadragésima parte de una legua, usada sólo en la América española), tiene 150 varas.

La LEGUA (medida itineraria) ha estado y esta aún sujeta á diversas apreciaciones en Sud-América. He aquí lo que respecto á ella se enseñaba al principio de la independencia:

legua de Burgos = 6666 $\frac{2}{3}$ varas
» castellana = 6600 »
» española = 6600 »

La milla

PESAS DE ESPAÑA

(Dice M. Louis Deplanque, en su tratado *La tenue des livres en partie simple et en partie double* (duodécima edición, pág. 791): «Hay pocos estados cuyo sistema monetario sea más complicado que el de España». Otro tanto puede decirse respecto á sus unidades de pesas. Sin embargo, indicaremos aquí las principales divisiones y subdivisiones de este sistema.

527. La LIBRA, *unidad principal,* es igual á 0^{k},460096 (*).

(*) Según Deplanque.

Los múltiples son:

528. La ARROBA, que vale 25 libras.

El QUINTAL, que vale 100 libras.

Los submúltiples son:

El MARCO (que se emplea para pesar oro ó plata) tiene $\frac{1}{2}$ libra, ó sean 8 onzas.
La ONZA, es $\frac{1}{16}$ parte de la libra.
El ADARME, equivale á $\frac{1}{16}$ de onza.
El GRANO.

529. Los principales instrumentos destinados para pesar son la balanza y la romana.

LA BALANZA

Siendo tan sencillo y fácil de manejarse este instrumento, sólo hay que decir que las balanzas de mayor dimensión, que se usan para el tráfico, sirven, por lo regular, para pesar por libras ó por onzas, y que las hay especiales, más ó menos delicadas, para pesar plata, oro, piedras preciosas, etc.

LA ROMANA

Es un instrumento que hace las veces de balanza y que es destinada para pesar, ordinariamente, por arrobas ó quintales.

El *pilón* (que hace las veces de las pesas en la balanza), es una pieza maciza, no adherida á la romana y que puede correr á derecha ó izquierda, al arbitrio de uno.

Para servirse de la romana por menor, se la cuelga de un gancho suspendiendo del mismo el objeto que se quiere pesar.

Se dice que la romana *entra por menor*, cuando ella comienza su cuenta por libras y acaba en una arroba ó más.

Se dice que entra por mayor, cuando ella comienza su cuenta por arrobas ó más.

EL CAJÓN

530. Se da este nombre, entre los mineros de Sud-América, á una cantidad de metal que tiene de peso cincuenta quintales.

Para expresar qué porción de plata pura contiene el metal extraído de tal ó cual mina, se dice: «este metal da tantos marcos por cajón», ó «se tiene *la ley* de tantos marcos por cajón», siendo de notar que se llaman metales de *baja ley* los que dan menos de 50 marcos por cajón; y que los metales finos dan hasta 7000 y aún 8000 marcos, como los que se encuentran en algunas minas de Bolivia, llamados *rosicler y lisa* (sulfuro de plata); y es de advertir que el *cajón* pesa 10000 marcos.

CUESTIONARIO

¿Qué longitud tiene la vara española comparada con el metro, y cómo se halla subdividida? (525).- ¿Cuáles son sus múltiples? (526).- ¿Cuál es la unidad para las pesas y á cuántos gramos equivale? (527).- ¿Cuáles son los múltiples y submúltiples de la libra? (528).- ¿Cuántos marcos pesa el cajón? (530).

TRIGÉSIMA-NOVENA LECCIÓN

Monedas

531. Las hay de oro y de plata.

Lo que es en la América Meridional, casi han desaparecido las que se usaban bajo el régimen colonial; y las que actualmente se acuñan en varios de los estados, ordinariamente de plata, son del peso y ley de la moneda francesa, con la diferencia de que en América *la unidad principal* consiste en una pieza igual á la de 5 francos, llamada *sol* en el Perú, simplemente *peso* en Chile, *etc., etc*. En otros Estados la *unidad principal* es tan arbitraria y caprichosa, que hace sumamente difícil y aún enojoso el cambio. Era de desear que, cuanto antes y bajo de convenio, todas estas repúblicas adoptasen de lleno el sistema francés. <35>, Pág. 33, Ap.

§ 1

VARA ESPAÑOLA

532. *Adición*

Cálculo:

números dados $\begin{cases} 25.v \ \frac{1}{2} \\ 14 \ \frac{2}{5} \\ 18 \ \frac{3}{8} \end{cases}$

Suma= $58 \frac{11}{40}$

Operación previa:
Denominador como 40

Cálculo: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{20+16+15}{40}$

$= 1.v + \frac{11}{40}$

EXPLICACIÓN

Haciendo abstracción momentánea de los números enteros, se han adicionado previamente las fracciones, que han dado como suma 1.v $\frac{11}{40}$ avos de vara; se han colocado los ..$\frac{11}{40}$..avos al pie de las fracciones dadas; se ha llevado el 1 entero á la columna de las unidades simples, etc. (Lo demás, como de ordinario).

533. *Sustracción*
y prueba de la precedente adición

Operación previa:
Restador (= á los dos últimos sumandos)

$= 14 \ \frac{2}{5} + 18 \ \frac{3}{8} = \frac{1311}{40} = 32 + \frac{31}{40}$

Cálculo:

Restando $58 \ \frac{11}{40}$

Restador $32 \ \frac{31}{40}$

Resto $25 \ \frac{20}{40} = 25.v \ \frac{1}{2}$ (*igual al primer sumando*).

534. *Multiplicación*

Se quiere saber cuánto cuestan $24\ \frac{2}{3}$ varas de cierto género, á razón de 6 pesos 1 real la vara.

Operación previa

$$26 + \frac{2}{3} = \frac{74}{3}$$

$$6 + \frac{1}{8} = \frac{49}{8}$$

Cálculo:

$$\frac{74}{3} \times \frac{49}{8} = \frac{74 \times 49}{24} = \frac{3626}{24} = 151\frac{1}{12} \text{ (pesos).}$$

535 *División*

y prueba del precedente resultado:

$$151\ \frac{1}{12} : 6\ \frac{1}{8} = \frac{1813}{12} : \frac{49}{8} = \frac{1813}{12} \times \frac{8}{49} = \frac{3626}{147} = 24 + \frac{98}{147} = 24$$

$$= \frac{98 : 49}{147 : 49} = \frac{2}{3} \text{ (varas).}$$

M.- No siendo visible el factor 49, ¿cómo ha podido encontrársele desde luego?

536. P.- Por una sencilla consideración. El multiplicando de la precedente operación (de que la presente no es más que una *prueba*) contiene la fracción $\frac{2}{3}$ lo que me indujo á presumir que la fracción $\frac{98}{147}$, que acaba de obtenerse, debía ser equivalente de aquélla. Con tal antecedente, fácil me fué simplificar la expresión $\frac{98}{147}$; pues que, conociendo el *producto* 98 y el factor 2, era sencilla cosa obtener el otro factor (arts. 104 y siguientes). En efecto:

98 : 2 = 49 (*factor deseado*)

Dividiendo al mismo tiempo número 147 por el número 49, ha resultado:

$$\frac{98}{149} = \frac{98 : 49}{149 : 49} = \frac{2}{3}$$

Mas, suponiendo que no hubiese habido precedente alguno para presumir que hubiese un factor común entre el numerador y el denominador de la fracción $\frac{98}{149}$, ahí está el método llamado *máximo común divisor*, por el cual habríase encontrado, á poco andar, el divisor común 49.

§ 2

PESAS DE ESPAÑA (Ver los arts. 527 y 528)

Adición

537. Se quiere saber cuántos marcos contienen siguientes cantidades de plata:

8	libras	1	marco	7	onzas	13	adarmes,
12	»	0	»	4	»	12	»
4	»	1	»	0	»	15	»

Haciendo las respectivas adiciones, se obtiene:

24 lib. 2 marco 11 onzas 40 adarmes.

Para reducir todo á marcos, procedo de este modo:

24 libras	=…………….. 48 marco			
2 marcos	=…………….. 2 »			
11 onzas	=…………….. 1 »	3 onz.		
40 adarmes	= …………….. 0 »	2 »	8 adarmes	
Total..	51 marco	5	0	8 adarmes.

538. *Sustracción y prueba de la precedente adición*

Restando	51 marco	5 onz.	8 ad.	
Restador	3 »	5 »	8 »	(= á los tres últimos sumandos)
Resto	48 »	0 »	0 »	(igual al primer sumando de la adición precedente).

539. *Multiplicación*

Sea, por ejemplo, 51 marcos, 5 onzas y 8 adarmes de plata, á. razón de 10 p.s 6 r.s el marco. ¿Cuál es el monto?

$$(51 + \frac{11}{16}) \times 10\ \frac{3}{4} = \frac{827}{16} \times \frac{43}{4}$$

$$= \frac{35561}{64}\ 555 + \frac{41}{64} = 555 + \frac{\overset{5}{\cancel{40}}}{\underset{8}{\cancel{64}}}$$

= 555 p. s5 r.s …………..

$$5 \text{ onz.} = \frac{5}{8} \text{ de marco} = \frac{5}{8}$$

$$8 \text{ ad.} = \frac{8}{8 \times 16} \text{ de marco} = \frac{8}{128}$$

$$\text{Suma} = \frac{5}{8} + \frac{8}{128}$$

$$\frac{5}{8} \quad \frac{8}{128} \quad \frac{5 \times 16 + 8}{128} \quad \frac{88}{118}$$

Como se ve, los 51 marcos, 5 onzas y 8 adarmes de plata, importan 555 pesos, 5 reales.

540. *División prueba de la precedente multiplicación*

Se pregunta, ¿cuántos marcos de plata pueden obtenerse con 555 p..s 5 r.s, en el supuesto de que el marco vale 10 pesos 6 reales?

Para responder, divido el número de pesos por el número correspondiente al precio de un marco; de este modo:

$$\text{pesos } \frac{35561}{64}$$

J. -Pero ¿por qué no se toma por dividendo el producto que ha dado la multiplicación, esto es, 555 p.s 5 r.s ?

541. P.- Es que no te fijas en una importante circunstancia, y es: que el expresado producto no es exacto, pues le falta $\frac{1}{64}$ que se le ha descuidado como insignificante. Debes, además, tener en cuenta que ese producto provino, bajo la forma de cociente, de la división de 35561 por 64. Y bien, como ahora se trata de verificar ese resultado, por medio de la división, se hace indispensable agregar á ese producto el $\frac{1}{64}$ que le falta (art. 187). De esta suerte, ese cociente exacto (ahora dividendo), es 555X $\frac{41}{64}$ = $\frac{35561}{64}$ =, como se ve, en e antepenúltimo miembro de las ecuaciones del *Cálculo* precedente.

Volviendo ahora á mi propósito, para encontrar el número de marcos correspondiente al número de pesos dados, tomo como divisor el precio 10 $\frac{3}{4}$, y procedo de este modo:

$$\frac{35561}{64} : 10\ \frac{3}{4} = \frac{35561}{64} : \frac{43}{4} = \frac{35561}{\underset{16}{64}} \times \frac{\overset{1}{4}}{43} = \frac{35561}{688}$$

$$\begin{array}{r|l} 35561 & \underline{688} \\ 1161 & 51 \text{ marcos} + \ldots.. \\ 473 & \end{array}$$

Obtenida la parte entera del cociente, queda un resto, que vale $\frac{473}{468}$. Entonces, no pudiendo ten o convertir en enteros esta fracción, porque vale menos de un marco, tomo como divisor, no ya el precio correspondiente á un marco, sino el correspondiente á una onza, que equivale á una octava parte de marco. Al efecto se podría *multiplicar* por 8 el numerador de la fracción $\frac{473}{688}$; mas, á fin de abreviar el cálculo, yo prefiero *dividir* por 8 el denominador, lo cual importa una multiplicación (art. *389*). Así, en vez de escribir $\frac{473 \times 81}{688}$ escribo $\frac{473}{688 : 8}$ $\frac{473}{86} =$. Efectuado en seguida la división, tengo:

$$\begin{array}{r|l} 473 & \underline{86} \\ 43 & 5\ (\textit{onzas}) \ldots.. \end{array}$$

Para obtener el equivalente del resto 43, en expresión fraccionaria de *marco*, convierto el resto $\frac{43}{43}$ de *onza* en 16 avos, ó sea en *adarmes*, multiplicando este resto por 16, lo que me da:

$$\frac{43 \times 16}{86} = \frac{688}{86} \quad = \begin{array}{r|l} 688 & \underline{86} \\ 0 & 8\ \textit{(adarmes)} \end{array}$$

§ 3

542. Cuando las fracciones del multiplicando y del multiplicador son sencillas, esto es, que tienen denominadores de una sola cifra, algunos contadores preparan y efectúan el cálculo como se ve en seguida.

Sea la misma cuestión propuesta en el artículo 534:

$$\begin{array}{lrl} \textit{Multiplicando} \ldots\ldots\ldots\ldots.. & 24 & \frac{2}{3} \\ \textit{Multiplicador} \ldots\ldots\ldots\ldots.... & \underline{6} & \frac{1}{8} \\ & 144 & \\ & 4 & \\ & 3 & \frac{1}{12} \\ \textit{Producto} & 151 & \end{array}$$

EXPLICACIÓN.

Se ha hecho desde luego la multiplicación de los números enteros solamente, prescindiéndose de las fracciones, lo que ha dado el producto parcial 144.

En seguida, se ha multiplicado la fracción $\frac{2}{3}$ por el número entero del multiplicador, esto es, $\frac{2}{3}$ por 6; lo que ha dado $\frac{12}{3}$ = 4, que se ha puesto al pie del producto anterior. Así, ha quedado multiplicado todo el multiplicando por los enteros del multiplicador, ó, en otros términos, se ha tomado el multiplicando tantas veces cuantas unidades hay en el multiplicador.

Pero, como el multiplicador indica que se le debe tornar, además de las 6 veces, $\frac{1}{8}$ parte de vez, era menester llenar esta última condición; al efecto, se ha multiplicado todc dividendo por $\frac{1}{8}$, esto es, 24 $\frac{2}{3}$ X $\frac{1}{8}$, lo que ha dado 3 enteros, mas $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$ = , que se han colocado a pie de los dos productos parciales anteriores. De suerte que haciéndose la suma de los tres productos parciales, se ha obtenido el producto total 151 $\frac{1}{12}$

OTRO EJEMPLO

543, ¿Qué costarán 25 onzas y 3 adarmes de oro, á razón de 21 pesos 1 real la onza, siendo requisito que el monto ha de expresarse á menos de $\frac{1}{2}$ real?

Cálculo

25 $\frac{3}{16}$ 21 $\frac{1}{8}$ 25 50 3 $\frac{15}{16}$ [*]…………... 3 $\frac{1}{8}$ (1) + $\frac{3}{128}$ [**]… Suma 532 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{128}$ = 532 $ + $\frac{1}{2}$ real	*Operaciones auxiliares* [*] $\frac{3}{16}$ X21= $\frac{63}{16}$ =3 $\frac{15}{16}$. [**] Tomando $\frac{1}{8}$ de $\frac{3}{16}$ se tiene $\frac{3}{128}$.

Cómo se ve, las 25 0 y 3 adarmes de oro, importan 532 pesos $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ real, quedando desechados $\frac{3}{128}$ que valen mucho menos de medio real.

COMPROBACIÓN (*por medio de la división*)

$\left[\underbrace{532 + \frac{1}{16} + \frac{8}{128}}_{[*]} : \underbrace{21 + \frac{1}{8}}_{[**]}\right]$	*Operaciones previas:* [*]532 + $\frac{1}{16}$ + $\frac{3}{128}$ = 532 + $\frac{8+3}{128}$ = $\frac{532 + 128 + 11}{128}$ = $\frac{68107}{128}$
Cálculo: $\frac{68107}{128} : \frac{169}{8} = \frac{68107}{128_{16}} \times \frac{8^{1}}{169} =$ $= \frac{68107}{16 \times 169} = 68107 \,\vert\, 2704$ 0 | 25…(╫)…. 8112 | 2704 0 | 3 *adarmes*.	[**] 21 + $\frac{1}{8}$ = $\frac{169}{8}$ *Operación auxiliar:* ╫ Puesto que el resto 507 pesos no alcanza para pagar 1 onza, voy á ver cuántos adarmes se pueden tener; y como el adarme es la $\frac{1}{16}$ parte de 1 onza, convierto el resto 507 pesos en 'dieciséis avos de peso, lo que da 507 X 16= 8112. Así obtenido el nuevo dividendo, lo traslado al cálculo.

Luego, reuniendo los dos cocientes parciales, tengo:

25 marcos 3 adarmes

R.- Y ¿no podría hacerse el cálculo por el método ordinario, como ha sucedido en la precedente multiplicación, esto es, colocándose el divisor á la derecha del dividendo con las respectivas líneas, vertical y horizontal?

544 P.- Se podría; pero, en los más de los casos, sería ello un quebradero de cabeza, Tentémoslo:

$$531\frac{15}{16} + \frac{19}{128} \;\Big|\; 21\frac{1}{8}$$

Fácilmente podría uno hacerse cargo de las veces que los 21 enteros del divisor están contenidos en los 531 enteros del dividendo; pero la busca de las veces que esos mismos 21 enteros se hallan contenidos en $\frac{15}{16}$ y $\frac{19}{128}$ sería larga y fatigosa, aparte del descuento que habría

----

(1) Estos 3 $\frac{1}{8}$ han provenido de haberse tomado la octava parte de 25.

de hacerse del cociente en razón de $\frac{1}{8}$ del divisor, Atentos tales inconvenientes, cuando el dividendo y el divisor son números fraccionarios, se prepara el cálculo convirtiendo ambos términos (dividendo y divisor) en números enteros, á lo menos el divisor, multiplicando al efecto uno y otro, término por el denominador de la fracción divisora, y reduciéndolos á su expresión más simple, verbigracia:

$$8\left(531 + \frac{15}{16} + \frac{19}{128}\right) : 8\left(21 + \frac{1}{8}\right) = 4248 + \frac{120}{16}$$

$$+ \frac{152}{128} : 168 + 1 = 4248 + \frac{15}{2} + \frac{19}{16} 169 = 4248 + \frac{120+19}{16} : 169$$

$$= 4248 + 8\,\frac{11}{16} : 169 = 4256\,\frac{11}{16} : 169.$$

En este estado, podría ya plantearse y efectuarse, sin mayor inconveniente, la división ordinaria:

$$4256\,\tfrac{11}{16}\;\big|\;\underline{169}$$

§4

De todo lo expuesto en los tres párrafos anteriores, fluyen las reglas siguientes:

545. 1ª. *Para dividir una cantidad de pesos (moneda española), por un número cualquiera, á menos de un real ó de medio real, es preciso, después de obtenida la parte entera del cociente, convertir el resto en reales ó medios reales, multiplicando el resto por 8 ó por 16, y dividir en seguida este producto*. Así:

2379 (pesos)	235	29 X 16 = 464	235
29	10....	229	1 (medio real)...

Y, como el resto 229 importa más de la mitad del medio real, refuerzo con una unidad el nuevo cociente (art. 487), y tengo 10 pesos + 2$\frac{1}{2}$ real + $\frac{1}{2}$ real = 10 pesos 1 real.

546. 2ª. *Toda vez que haya de dividirse una cantidad de varas de tal género, á menos de una pulgada, (por ejemplo), ó una cantidad de marcos, á menos de un adarme (por ejemplo), se procederá de un modo análogo al indicado en el precedente articulo*.

CUESTIONARIO

¿Cual es la unidad principal de moneda en la mayor parte de los estados americanos? (531).- ¿Cómo se procede para dividir una cantidad de pesos (moneda española), por un número cualquiera A menos de un real ó de medio real? (545).- ¿Cómo se procede para dividir una cantidad de varas A menos de una pulgada, ó una cantidad de marcos á menos de un adarme? (546).

CONFERENCIA ACERCA DE LA LECCIÓN 39ª.

J.- A propósito de la multiplicación efectuada en el artículo 539, he menester una aclaración. Ya sabemos que el producto de una multiplicación ha de ser el mismo, sea que se coloque en primer lugar el multiplicando y después de éste el multiplicador, ó viceversa; pero, ¿á qué regla deberá uno sujetarse para conocer qué especie de unidades representa el producto, puesto que aquí el uno de los factores expresa *marcos* y el otro *pesos*?

547. P.- Esto es muy sencillo; pues no hay más que decirse: «¿Qué busco?: el *monto de los pesos*.» «Y bien, los *marcos* tienen que permanecer invariables; en cuanto á los pesos, el problema da á conocer tan sólo el precio de un marco, y lo que se busca es el importe de 50 y tantos marcos; luego, son los pesos los que han de reproducirse y, consiguientemente, en la presente cuestión, los *10 pesos 6 reales* vienen á ser el verdadero *multiplicando*; el número correspondiente á los marcos es el *multiplicador*, y, por fin, el producto ha de representar *pesos*» (art. 92).

J.- Para acabar de fijar mis ideas, desearía otra explicación. Puesto que, en .la operación, se tomaron los marcos como multiplicando, ¿cómo han podido dar *pesos* por producto?

548. P.- Desde el momento en que se ha tomado como multiplicando el número correspondiente á los *marcos*, éstos han dejado de figurar en el cálculo (art. 205), y son los pesos los que han ocupado el lugar de aquéllos, desempeñando las funciones de *veces* (206 y 207).

Para hacer más palmaria la explicación, simplifiquemos el caso propuesto, dejando á un lado las fracciones.

10
X 51 } Quiere decir, que el verdadero multiplicando X 51 (10 p,s) ha de reproducirse otras tantas veces cuantos son los marcos, esto es,50 veces, 51

51
X 10 } Quiere decir, que el *titulado multiplicando* 51 ha de reproducirse tantas *veces* cuantas unidades contiene el titulado multiplicador 10.

R.- A mí me ha ocurrido esta duda: No pudiendo dividirse el resto 507 p,s (art, 543, comprobación), se multiplicó ese resto por 16, así se obtuvo el nuevo dividendo 8112 y se efectuó la división por el divisor 2704, sin multiplicarlo por 16. Ahora bien, la regla establecida es: que, cuando se multiplica uno de los dos términos de la división por cierto número, debe multiplicarse también el otro término por el mismo número, para no alterar el valor de la fracción. Esto último no se hizo; luego, hay lugar á pensar que la operación ha sido inexacta, ó que la regla es falsa.

549. P.- Para salvar la duda, me valdré del sistema decimal. Cuando hay un resto en la división de números enteros y se quiere llevar adelante la división, se multiplica por 10 el dividendo, agregándole al efecto un *cero*, y se hace la división poniendo al cociente un número entero; mas, como ese cociente adolece del vicio de ser muy grande (10 veces otro tanto que el verdadero cociente), se coloca una coma y un cero á la izquierda del cociente, lo que importa dividirlo por 10 ó, lo que es lo mismo, importa reparar la falta cometida en no haber multiplicado oportunamente el divisor. Algo más: cuando, tratándose de francos, se dice, por ejemplo: «la cuenta arroja un resto de 10, 20, 30… *céntimos*», sucede que, aunque esos valores tienen el aspecto de números enteros, por el solo hecho de haberlos calificado de *céntimos*, representan la *unidad* (que es el franco) dividida por 100, es decir, $\frac{10}{100}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{30}{100}$ … Así también, en la cuestión que nos ocupa, aun cuando no se multiplicó por 16 el divisor 2704, por el solo hecho de haberse dado al cociente 8 el calificativo de *adarmes*, se sobrentiende que ese 8 representa la unidad (*1 onza*)dividida por 16, esto es:

8 adarmes = $\frac{8}{16}$ de onza.

FIN DE VOLUMEN II