

GRAL. NARCISO CAMPERO

## TRATADO COMPLETO

DE

# ARITMÉTICA

3 volúmenes

VOLUMEN 1

Buenos Aires 1898

© Rolando Diez de Medina, 2010  
La Paz - Bolivia

### INDICE

#### PRIMER GRADO DE INSTRUCCIÓN.

##### CAPITULO PRIMERO.- DE LA NUMERACIÓN

De la numeración en los dedos.  
En que se da término á la numeración en los dedos.  
Definiciones concernientes á las dos Lecciones que preceden.

##### CAPITULO II.- NUMERACIÓN Y PRINCIPALES OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL ARMARIO.

De la numeración.  
En que se da fin á la numeración en el armario.  
De la adición de números enteros.  
(Continúa la Adición).  
De la sustracción de números enteros.  
De la multiplicación de números enteros.  
(Continúa la Multiplicación).  
(Continúa la Multiplicación).  
De la División de números enteros.  
(Continúa la División de números enteros).  
(Continúa la División de números enteros).

#### SEGUNDO GRADO DE INSTRUCCIÓN.

De los números arábigos.  
De los números arábigos (*Continuación*).  
Diversas materias.  
De las fracciones y números quebrados.  
Adición (de fracciones decimales).  
Sustracción (de fracciones decimales).

Multiplicación (de fracciones decimales).  
División (de fracciones decimales).  
Fracciones ordinarias.  
Descomposición de los números en factores y su divisibilidad.

Composición de los múltiplos.  
Números primarios entre sí. Máximo común divisor.  
Transformación de las fracciones.  
Operaciones sobre las fracciones ordinarias.  
Multiplicación.  
División de las fracciones.  
Más explicaciones sobre problemas de fracciones.  
Transformación de una fracción en otra fracción decimal equivalente.

Medidas.  
Unidad de superficie.  
Unidades de volumen y de capacidad.  
Unidades de pesos y monedas.  
Medidas, pesas y monedas españolas.  
Monedas.

#### TERCER GRADO DE INSTRUCCIÓN

Nociones preliminares acerca de las proporciones.  
Propiedades de la equidiferencia.  
Propiedades de la proporción.  
De la regla de tres.  
Regla de interés.  
Interés compuesto.  
Rentas sobre el estado.  
Regla de sociedad.  
Regla de (mélange) mezclas.  
Regla de Aligación.  
Cuestiones diversas.

#### APÉNDICE

Entre los mandatarios de Bolivia ninguno ofrece elementos más diversos al criterio nacional ni es, por lo mismo, más contradictoriamente juzgado, que el General Narciso Campero.

Actor principal en sucesos cuyo veredicto histórico aún no ha sido pronunciado, General en Jefe del Ejército aliado en la batalla de Tacna, Presidente de la República en el período más luctuoso de la vida democrática de aquel país, Campero tuvo (los tiene hoy mismo) apologistas que le erigieran pedestal en el Olimpo, y detractores que le conducirían á la roca Tarpeya.

Discorre el tiempo, las pasiones políticas se sofrenan, elaborase el juicio de la Historia...

No pretendemos concurrir á ese magno proceso con un documento que justifique, enaltezca ó deprima los actos del político ó del guerrero. Ni la índole del trabajo á que dedicamos estas líneas es adecuada á este fin, ni nuestro propósito es otro que el de recomendar un texto de enseñanza de grande utilidad, en nuestro concepto, para la instrucción primaria y elemental.

Pero hay obras de tal manera ligadas al nombre de sus autores, que se confunden con ellos en la percepción intelectual, como expresión de su personalidad moral.

Tal sucede en el Tratado de Aritmética que hoy si emite á la publicidad.

Recopilación metódica de lecciones que siguen un encadenamiento rigurosamente lógico en el orden de las ideas que tienden á inculcar, vése en ellas, por decirlo así, al General Campero en el hogar doméstico, enseñando á sus tiernos hijos, desde la más rudimentaria contabilidad por los dedos de las manos, hasta los más arduos problemas de la ciencia de los números.

Su lenguaje sencillo, salpicado á veces de ingeniosas y oportunas alusiones, es propio del maestro que se dirige á niños cuyo desarrollo intelectual anhela propendiendo á facilitarlos, gradual y paulatinamente, con paternal solicitud.

No dudamos que los altos poderes de Bolivia, los Consejos Universitarios, las corporaciones municipales y el público, en general, prestarán favorable acogida á este nuevo opúsculo, así por su importancia intrínseca, como porque lleva en su portada la firma de uno de los más ilustrados Presidentes de Bolivia.

Buenos Aires, Agosto 25 de 1898

## **DATOS REFERENCIALES**

Después de muchos años de permanencia en Europa, donde me contraje principalmente al estudio de las Matemáticas, me ocurrió la idea de hacer una traducción de los mejores tratadistas, con ánimo de enseñar yo mismo la ciencia en el país de mi nacimiento; pero encontré desde luego un tropiezo, y era que la mayor parte de las dificultades que ofrecen las Matemáticas, provenían de la imperfección de su base ó cimiento, que es la Aritmética. En efecto, la manera como ésta enseña las operaciones fundamentales del cálculo, especialmente la multiplicación y la división, tiene mucho de empírico. A pesar de los razonamientos empleados para persuadir al aprendiz, de la verdad de los principios, él queda ordinariamente á oscuras, y hace las operaciones, más bien por imitación que por convencimiento. De ahí resulta, en primer lugar, que el estudio de la ciencia de los números sea tan árido, y en segundo lugar, que se necesite mucho tiempo, años de práctica, para que el alumno se dé cuenta cabal de las nociones que adquirió en las aulas.

Por mi parte, no enteramente satisfecho con las lecciones de mi maestro, consulté las obras de otros notables profesores, y procuré además informarme de los métodos seguidos en varias *pensiones* particulares; pero sin conseguir lo que buscaba — el medio eficaz de poner al alcance de los niños las primeras nociones de la ciencia.

Años después, viéndome en la necesidad de educar á mis hijos, y á fuerza de pensar y discurrir, llegué á apercibirme de que el mal estaba en que todos los que han escrito sobre Aritmética, han empezado por las cifras arábigas, descuidando el origen de la *ciencia*.

Mal puede estudiarse al *hombre* por ejemplo, examinándolo tan sólo desde que ha llegado á su edad madura, haciéndose abstracción de lo que fué al nacer, y de cómo llegó á ser lo que es.

Era menester estudiar la ciencia desde su cuna, esto es, desde que se hacían las cuentas con el auxilio de los dedos, formando en seguida colecciones diversas de unidades con piedrecitas ó semillas de alguna planta.

La invención de los *bolillos*, si bien ayuda á la inteligencia del niño para formar una idea de la numeración, me pareció inútil para el cálculo. Ya se verá en las primeras lecciones de mi tratado, el arbitrio de que me he valido para grabar en la mente del aprendiz lo que se entiende por numeración y cómo lo he conducido gradualmente hasta ponerlo en aptitud de comprender claramente el prodigioso, pero complicado mecanismo, en que juegan las cifras llamadas *números arábigos*.

-----  
Siendo la claridad la condición esencial que me impuse al acometer el presente trabajo, no me he contentado con que mis lecciones estén ajustadas á los principios generalmente establecidos, sinó que las he sometido á cierta especie de crisol, que ha consistido en hacer que el alumno explique á su modo el trozo ó trozos que ha estudiado. Toda vez que él se ha visto embarazado, he considerado que el texto no era bastante claro, y he tenido que variarlo y, á veces, que rehacer lo completamente, hasta obtener un buen resultado.

Por último, la experiencia me ha hecho palpar una verdad, para mí muy halagüeña, y es que el método seguido en mi tratado, no sólo excita interés en el aprendiz, amenizando en cierto modo el árido campo de la Aritmética sinó que acelera y solidifica su instrucción.

-----  
**Á LA MEMORIA**

DEL QUE FUÉ EMINENTE PROFESOR Y AUTOR DE UN CURSO COMPLETO DE MATEMATICAS

**J. ADHÉMAR**

COMO PEQUEÑO TRIBUTO DE SU DISCÍPULO Y AMIGO

**NARCISO CAMPERO**

-----  
Reminiscencias referentes al maestro Adhémar (\*) y á su aula

Favorecido yo por el General don José Ballivián, Presidente de Bolivia (año 1845), con el nombramiento de Secretario de la Legación que debía acreditarse en España, á efecto de pedir el reconocimiento de la independencia de Bolivia, me constituí en Madrid (1846). Terminada esa misión diplomática, me trasladé á París para dar comienzo á una comisión que me hubo encomendado el mismo General Ballivián, y que consistía en hacer estudios militares tanto en Francia como en España y Prusia. Mas las observaciones que hice desde luego, en la guarnición de París, y después en la de Madrid, me convencieron de que no podría hacer tales estudios sin cultivar previamente las Matemáticas que, á la sazón, me eran desconocidas, salvo

-----  
(\*) La pronunciación francesa es *Ademár*.

las nociones de Aritmética que hube adquirido en la escuela de primeras letras; pues, preciso es decirlo, ni en los colegios de Sucre, en que estudié para abogado, ni en ocho años que después hube servido en el ejército, tuve ocasión de imbuirme en aquella ciencia, ya porque ella no se introdujo en los colegios sino después de haber vencido yo la instrucción secundaria, ya también porque en el ejército era fruta desconocida.

Como quiera, instalado en París (año 1847), mi primer cuidado fué indagar qué profesor de Matemáticas gozaba de más crédito y, casi unánimemente, se me indicó á Mr. Adhémar, que daba sus cursos en el Cuartel-latino. Presentado ante él, convinimos en que asistiría á su clase desde el siguiente día.

Así lo hice, anticipándome á la hora, para poner en conocimiento de Mr. Adhémar, que el gobierno de mi patria deseaba que cuanto antes llenara mi comisión militar, y que, por tanto, me hallaba en el caso de contraerme tan sólo á los ramos indispensables para mi sometido.

—Está bien, me dijo; justamente acabo de abrir los cursos de Aritmética y de Algebra, que vienen como apropósito para usted.

—En cuanto al Álgebra, en hora buena, le contesté; pero, por lo que toca á la Aritmética, permítame V. decirle que creo saber lo bastante, y que podría ocuparme en otra cosa, puesto que no me sobra el tiempo.

—Asista V., sin embargo, á algunas lecciones de Aritmética, y si nada encuentra que le interese, ya veremos lo que haya de estudiar.

Las primeras lecciones me parecieron harto ingratas, tanto que me decía para mis adentros: «Gastar el tiempo en explicarle á uno que los números se han formado añadiendo á una, unidad otra unidad, y á esas dos unidades; otra unidad...; que para sustraer una cantidad de otra mayor, es necesario quitar, desde luego, del número mayor las unidades del número menor, después las decenas, las centenas, etc...; ocuparse todavía en demostrar que 4 por 2 es lo mismo que 2 por 4, como si no lo estuviera diciendo la tabla de multiplicación, y como si no fuera todo eso una cosa tan clara como la luz del día... »

Es oportuno decir aquí que, después de haber salido de la escuela de primeras letras, había tomado lecciones de Aritmética bajo la dirección de un contador de nombradía, y que, á mi ingreso en el colegio, llegué á cobrar fama de buen aritmético).

Sin embargo, continué oyendo las Lecciones de Mr. Adhémar, más por complacerlo, y también porque tenía el pensamiento de comprometerlo para que me diera lecciones particulares. Es el hecho que, en las últimas lecciones relativas á la multiplicación, llegué á sospechar que había algún vacío en mis conocimientos. Por fin, cuando se trató de la división, acabé de conocer una verdad: que no había yo aprendido la Aritmética sino por rutina.

Fué entonces que manifesté á Mr. Adhémar mi deseo de que me diera lecciones particulares. Se excusó alegando varias razones, concediéndome tan sólo que, antes ó después del curso, le consultase las dudas que me ocurriesen; —mas eran tantas y tan frecuentes mis consultas y tal mi contracción al trabajo, que al fin condescendió conmigo, señalándome una hora especial. (Era yo el único que gozaba de tal consideración).

Á la vuelta de dos años, Mr. Adhémar era no sólo mi maestro, más también mi íntimo amigo. En nuestros pasa-tiempos me decía, entre otras cosas: «Dígame: ¿la generalidad de sus compatriotas es tan activa y tenaz como usted? — Con algunas excepciones» le respondía yo.

En las ocasiones en que íbamos al jardín de Luxemburgo ú otro lugar de paseo (aludiendo á mi afición al dibujo), solía recomendarme, con, aire de chiste, que me ejercitáse en «aprender á ver»; pues sucede (decía él), que creemos ver lo que en realidad no es así. Por

ejemplo, cuando una persona que no entiende de perspectiva (*parte de las Matemáticas*) se aproxima á un edificio con columnas, cree que está viendo las columnas como si fueran de igual altura, y no hay tal; es la imaginación la que le sugiere esa creencia, por el conocimiento que de antemano tiene de que las columnas son iguales; pero ante la vista, la imagen de cada columna va aumentando ó disminuyendo de tamaño fío á medida que se halla más próxima ó más distante del observador. Otro ejemplo: cuando la misma persona se encuentra en un comedor cree que está viendo todos los platos en forma circular, siendo así que sólo aparece tal el plato que tiene bajo sus ojos, y que los demás se presentan á la vista más ó menos elípticos, según que estén más ó menos distantes del individuo.»

-----

Era Mr. Adhémar hombre como de sesenta y tantos años A la sazón; de mediana estatura, pero corpulento; cara llena y cabeza abultada; nariz algo roma y ojos grises pequeños; fisonomía no distinguida, pero simpática y llena de inteligencia; sencillo y suave en su trato; aunque francés, tenía toda la calma de un alemán... y, de paso sea dicho, gozaba de gran crédito en Alemania, como que fué allí muy aplaudido su opúsculo titulado «*Revolución de la mar*». Retirado de la gran sociedad y contraído tan sólo al estudio y á la enseñanza de las Matemáticas, era enemigo del despotismo no menos que de la demagogia. Cuando Luís Napoleón fué hecho emperador de los franceses, los republicanos pusieron el grito en las nubes, acusando á Luís Napoleón y sus adeptos de haber falseado la voluntad nacional; y como yo participaba de esta idea y le hablase un día en tal sentido, me dijo: «Los que así piensan, se equivocan: Luís Napoleón y los suyos no han hecho más que explotar la buena disposición del pueblo francés, ignorante en su gran mayoría, tanto es que hay campesinos que están en la firme persuasión de que este Napoleón es el mismo que condujo los ejércitos franceses á Austerlitz y demás batallas de la época del primer imperio. Lejos, pues, de haber sido cohechadas esas gentes por Luís Napoleón, son ellas más bien las que han estado enojadas contra él, por haber descendido (decían) de soberano que era de un gran imperio, á simple presidente *bourgeois*.»

-----

Había en el aula ó clase de Mr. Adhémar un joven parisiense que estudiaba para ser arquitecto, y otros dos mejicanos, á quienes su gobierno había acordado, por vía de premio, la gracia de que fueran á Roma y pasasen de allí á París á completar sus estudios de ingeniería civil, en que fueron sobresalientes. El primero, llamado Emilio Lemenil, y á quien encontré ya en la clase, se hizo desde luego amigo mío; los mejicanos, que eran dos hermanos apellidados Agea, y que ingresaron á la clase después que yo, no tardaron en cultivar relaciones de amistad conmigo á título de americanos; de modo que, entre los cuatro, formamos una especie de sociedad accidental, para discutir en mi alojamiento las dificultades que nos ocurrían en las lecciones orales de Mr. Adhémar. Sucedió á menudo que, en los diversos ramos de nuestro estudio, no atinábamos á hacer las demostraciones del caso ó á resolver ciertos problemas, sin embargo de las explicaciones verbales del maestro y de las contenidas en el respectivo texto. Entonces apelábamos al último recurso, y he aquí en lo que él consistía:

Desde las primeras lecciones particulares que me dió Mr. Adhémar, había condescendido conmigo en que se diera comienzo á cada lección con las consultas que yo le haría sobre las dudas que me ocurriesen en las materias tratadas en la clase. En esta virtud, cada vez que los cuatro amigos nos reuníamos en casa, yo tomaba nota de los puntos de nuestras dificultades é iba después á consultar con Mr. Adhémar. Aclaradas las dudas, comunicaba á mis amigos el resultado, y mis explicaciones (no tengo embarazo en decirlo) eran comprendidas en el acto. Esta observación acabó por confirmarme en la idea que desde antes tenía formada de mí mismo; y es que, si bien carecía del don de imitación, poseía en cambio una disposición especial para transmitir á otros los conocimientos adquiridos. De ahí nació en mí una aspiración, mejor dicho, una pasión: —la de acometer en mi país, al regreso de Europa, una reforma radical en la educación popular.

Con tal propósito, sin abandonar la clase ni las lecciones particulares de Mr. Adhémar, ingresé á la Escuela Imperial de Dibujo y á un establecimiento de Gimnástica; concurrí mas tarde al Conservatorio de Artes y Oficios, á la Escuela de Minas y á las lecciones públicas que

se daban en la Sorbona sobre Física, Química y Mecánica; por último, obtuve permiso del ministerio de la guerra para ser admitido en la Escuela de Estado Mayor, como auditor externo, donde permanecí mucho más de dos años (tiempo fijado para los alumnos franceses). En suma: nueve años pasé en esa vida de estudiante, y he aquí á propósito unos trozos de carta:

«París, 3 de Diciembre de 1891.

»Querido y viejo amigo:

»Una feliz casualidad ha conducido á la casa donde ha-  
»bito, á un compatriota de usted, señor Argandoña, que  
»representa á Bolivia; y es por la primera vez, desde que  
»nos despedimos, que he podido tener noticias de usted...  
»He sabido, con mucho placer, la magnífica carrera que  
»usted ha hecho, y para la cual ví á usted prepararse por  
»un trabajo perseverante que yo admiraba tanto...

» Avanzando en la vida, vuelve uno con agrado su pen-  
»samiento hacia el pasado; así, he releído frecuentemente  
»las cartas que usted me escribía de aquí durante mi per-  
»manencia en Rusia.

.....  
» EMILIO LEMENIL.»

-----

Mas, ¡oh dolor! vuelto á mi patria, después de diez anos de ausencia, vine á ser en ella como una planta exótica. Mal recibido por el nuevo gobierno, todos sus servidores me miraron de reojo, especialmente los de la alta clase militar, que me consideraban como un obstáculo á sus aspiraciones personales. Ya se ve; no había general, pero ni coronel en servicio activo, que no se creyese llamado á suceder al pobre joven, improvisado general, que á la sazón se hallaba rigiendo los destinos de la República, merced á las intrigas de los políticos de entonces. No tardó en desplomarse ese mal cimentado aparato de gobierno, y vino al poder uno de los hombres más conspicuos de Bolivia por sus luces, su patriotismo y su consagración á la cosa pública; pero nada pudo hacer, porque el espíritu de revuelta y una negra perfidia lo trajeron abajo el día menos pensado...

¡Qué de peripecias no he experimentado desde entonces! Perseguido, proscrito unas veces, honrado otras con el título, ya de senador, ya de ministro de estado, ya de plenipotenciario en Inglaterra y Francia, ya en fin de presidente constitucional de la República, sin solicitarlo... Pero, ¿de qué ha servido todo esto; qué bienes ha reportado la patria de mis desvelos y constante anhelo por servir sus intereses? Triste es decirlo, —¡ninguno! Y yo ¿qué he recogido? — ¡Decepciones y desencantos! —He ahí todo.

¡Plegue á Dios que este humilde trabajo, elaborado en un apartado retiro, á impulsos del amor paternal, llegue á ser de algún provecho para las generaciones, venideras de mi desventurada patria, tan digna de mejor suerte!

Sucre, 18 de Marzo de 1894.

NARCISO CAMPERO.

-----

## PREVENCIONES

1.<sup>a</sup>— En el estado de progreso á que han llegado las artes y las ciencias, poco se puede introducir de nuevo en ellas; de suerte que los nuevos autores tienen, por fuerza, que servirse de los conocimientos transmitidos por sus predecesores. Sucede empero que, ya por respeto á la propiedad, ya por no incurrir en la nota de plagiarios, varían la forma de lo que otros han dicho ó explicado. Apartándome de esa costumbre, he reproducido francamente muchos trozos de la obra del que fué mi maestro en Matemáticas, y del tratado de Aritmética de los señores Dumouchel y Dupuis, que he consultado frecuentemente.

2.<sup>a</sup>— En la clase ó pieza destinada para la enseñanza, ha de haber un aparato A, (\*) y varios accesorios que se indicarán en el curso de las lecciones.

3.<sup>a</sup>— Los números puestos entre paréntesis angular, en el curso del tratado, como <1>, son citas que se refieren al Apéndice.

4.<sup>a</sup>— Las cifras puestas á la margen izquierda del texto son los números de orden de los principios fundamentales. Los hemos llamado artículos en vez de números (como se acostumbra en la mayor parte de los tratados científicos), porque en la Aritmética se emplea, á cada paso, la voz *número* para expresar el grandor de una cantidad, lo que ocasiona á veces alguna confusión, pues se imagina el alumno que el texto habla de cierta cantidad, cuando sólo se refiere á un principio, ó viceversa.

5.<sup>a</sup>— Las cifras puestas dentro de un paréntesis común, verbigracia (1) ó (pág. 1), en los Cuestionarios, en el curso del tratado principal ó del Apéndice, son citas referentes á los artículos de orden, ó á las páginas respectivas de este texto.

6.<sup>o</sup>— ☑ Este signo quiere decir que es preciso ejecutar lo que se haya prescripto antes de él inmediatamente.

7.<sup>a</sup>— Como lo expresa el título del presente tratado, las lecciones que él contiene han sido ideadas por un padre de familia para instruir á sus hijos; pero esto no obsta á que ellas puedan darse en una clase pública más ó menos numerosa.

Si los niños fuesen muchos, el preceptor podrá (si lo estima conveniente) formar grupos de á cuatro, para el estudio de la respectiva lección, señalando á cada cual el papel que ha de desempeñar, es decir, que uno de ellos hará las veces de pasante ó profesor y los otros tres de simples interlocutores. Esto mismo deberá observarse en la clase general; por tanto, cada niño tendrá el deber de estudiar, literalmente ó en sustancia, el papel que se le hubiese asignado sea en su respectivo grupo, sea en la clase general.

"En las lecciones en que haya pocos diálogos ó que carezcan de ellos, el preceptor señalará á los niños la parte de lección que cada cual ha de estudiar en su respectivo grupo, sin perjuicio de imponerse del contenido de toda la lección.

Los interlocutores son:

**P.** (*Padre de familia*) ó *Preceptor*).

**M.** (*Manuel*).

**J.** (*José*).

**R.** (*Rosalía*).

Esto establecido, vamos á entrar en materia

-----  
(\*) *Advertencia para el fabricante*: — Este aparato, que llevará el nombre de *Armario*, debe ser construido según el bosquejo hecho en hoja suelta.

## **PRIMER GRADO DE INSTRUCCIÓN**

### CAPÍTULO PRIMERO

#### DE LA NUMERACIÓN

P.— Hijos míos: para el estudio de las Matemáticas, hay que dar principio á la Aritmética, que es la base fundamental de aquéllas...

J.— Y ¿qué es Aritmética? <|> pág. 1, del Apéndice.

P.— Haces bien, hijo mío, en preguntármelo; pero antes de satisfacer á esta pregunta, me ocurre hacer otra por mi parte: — ¿Quién de vosotros tres podrá decirme lo que es un *costurero*?

*Todos tres.* —Yo...

P.— Dejad á Rosalía la palabra.

R.— *Costurero* es una cajita en que se encierran las cosas necesarias para la costura.

P.— ¡Muy bien, hija mía! has dado una buena definición, sin que nadie te la haya enseñado, gracias á que has visto y palpado por ti misma las diversas piezas de que consta un costurero; mas, suponiendo que nunca hubieras visto ese mueble, ni conocido la aguja, el dedal, las tijeras y demás útiles que en él se encierran, tú comprendes, hija mía, que habría sido inútil darte la definición de un costurero, porque con ella nada habrías adelantado ó, como vulgarmente se dice, te habrías quedado en ayunas. Por lo mismo, soy de parecer que la definición de la Aritmética, así como la de otras muchas ciencias y artes, debe darse al fin del tratado y no al principio. Sea de esto lo que fuere, ingresemos en el estudio de la Aritmética.

### **PRIMERA LECCIÓN**

#### De la numeración en los dedos

1. P.- En ese cajoncito que tenéis á la vista, hay botones, fichas y hormillas de diversas clases. Como todo está mezclado, vais á comenzar, hijos míos, por escoger y poner aparte, en un solo montón, todas las hormillas parecidas á ésta, que os doy como muestra y que la llamaremos *unidad*.

*Todos tres.* -Ya hemos terminado.

2. P.- Está bien, hijos míos. Debo ahora advertiros que, como todas estas hormillas que habéis apartado son iguales entre sí, cada una de ellas podría servir de *unidad* para el caso de que fuera preciso repetir la operación que habéis hecho; ó, en otros términos, que este montón contiene tantas *unidades* cuantas hormillas hay en él.

R. -Pero ¿cuántas son las hormillas?

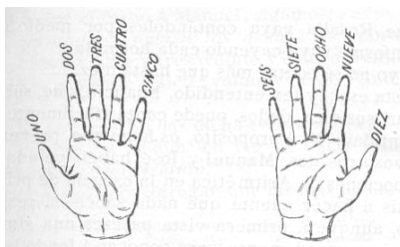
P.- Es lo que vamos á ver; pero antes quiero que diga José cuántos dedos tiene en sus dos manos.

J.- *Diez*, papá.



3. P.- Bien, José: ahora, aunque ninguno de vosotros tres supiera contar arriba de diez, le será fácil saber cuántas hormillas hay en el montón. Algo más... y esto es importante... *la llave de la Aritmética la tenéis en los dedos de las dos manos*; lo demás lo encontraréis en ese armario que está al frente.

Para mejor fijar las ideas, designaremos cada dedo con un letrero, y por su orden. Así, al dedo mayor de la mano izquierda le llamaremos uno, al que le sigue dos, etc., como se ve en estos dibujos:



4. P.- (*mostrándoles los dibujos*): -Fijaos bien en estos dos dibujos y muy especialmente en el número con que está marcado cada dedo... Más tarde os diré por qué he llamado número al letrero que lleva cada dedo, y también os explicaré los diversos sentidos de esa palabra *número*. Entre tanto, quiero que Rosalía cuente los dedos de sus dos manos, dando á cada uno su número correspondiente, conforme á los dibujos.

R. (*empezando por el dedo mayor de su mano izquierda*) va á contar...).

M. (*interrumpiendo*): -No comprendo lo que vamos á hacer.

R.-Yo quisiera ver lo que hay en el armario.

P.- Vamos despacio, que, como dice el proverbio, «despacio se anda lejos». Puesto que en los dedos de las dos manos está la llave de la Aritmética, vamos á servirnos de ellos para saber cuántas hormillas, ó, lo que es lo mismo, cuántas unidades hay en ese montón. Vamos, Rosalía...

R. (*contando sus dedos*): -U no, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

P.- Está bien. Dadme ahora las hormillas que habéis apartado... Voy á echarlas una por una en este plato, á fin de que Rosalía vaya contándolas, por medio de los dedos, conforme vaya cayendo cada hormilla.

R.- Si yo no sé contar más que hasta diez...

P.- Basta eso; y ten entendido, hija mía, que, sabiendo uno contar sus diez dedos, puede contar fácilmente cualquiera cantidad. Y, á propósito, os hago una prevención: Aunque vosotros dos, Manuel y José, habéis ya adquirido algunas nociones de Aritmética en la escuela de primeras letras, vais á hacer cuenta que nada sabéis al respecto; pues esto, aunque á primera vista parezca una simpleza, ha de servirnos grandemente para conocer á fondo la naturaleza de los números, sus propiedades y las diversas combinaciones á que se prestan. Esto advertido, empieza á contar, Rosalía, pues ya dejo caer la primera hormilla.

R. (*tocando*) con el índice de la mano derecha las yemas de los dedos de la izquierda, sucesivamente, por cada hormilla que cae; y haciendo otro tanto con el índice de la mano izquierda en las yemas de la derecha, cuenta hasta diez).

P.- Ahora á tu turno, José, cuenta de nuevo en tus dedos, desde uno hasta diez; pero expresando que estas nuevas hormillas se agregan á las diez contadas ya por Rosalía.

J. (*señalando sus dedos*): -Diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve, diez y diez.

5. P.- Muy bien, José: así es cómo debería contarse en rigor; pero sucede que, por abreviar palabras y pulir al mismo tiempo el lenguaje,

en vez de diez y uno	se dice once
" diez y dos	se dice doce
" diez y tres	se dice trece
" diez y cuatro	se dice catorce
" diez y cinco	se dice quince
.....	.....
en vez de diez y diez	se dice veinte

Toca ahora el turno á Manuel; sigamos,

M. (*apuntando también los dedos*). -Veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres, veinte y cuatro, veinte y cinco, veinte y seis, veinte y siete, veinte y ocho, veinte y nueve, treinta.

P.- Y ¿por qué no has dicho veinte y diez?

M.- Porque ya sé que, en vez de decir veinte y diez, se acostumbra decir treinta.

6. P.- A eso debo agregar que las más de las personas,

en vez de veinte y uno	dicen veintiuno
en vez de veinte y dos	dicen veintidós
en vez de veinte y tres	dicen veintitrés
en vez de veinte y cuatro	dicen veinticuatro
en vez de veinte y cinco	dicen veinticinco
en vez de veinte y seis	dicen veintiséis
en vez de veinte y siete	dicen veintisiete
en vez de veinte y ocho	dicen veintiocho
en vez de veinte y nueve	dicen veintinueve

7. Ya sabéis, hijos míos, que las hormillas que he dejado caer son tantas cuantos son los dedos que se han empleado para ir apuntando el número de cada hormilla; pero aquí ocurre una dificultad, y es: que, si quisiéramos seguir contando como hasta aquí, nos veríamos embarazados por falta de nuevos dedos; fuera de que, yo os había anunciado, hace poco, que para aprender á contar bastaban los dedos de las dos manos. En efecto, suponiendo que no se hallase sino uno de vosotros en esta clase, ese uno solo bastaría para llevar, por los dedos, la cuenta de las hormillas que vayan cayendo; he aquí cómo: Una vez recorridos los diez dedos, poned cada uno de vosotros con esta *tiza* (*ó carboncillo*) una señal en la segunda falange del dedo *número uno*, á fin de retener por este medio el recuerdo de que han caído ya diez hormillas; volved á recorrer todos los dedos, hasta llegar á veinte, y poned una señal en la segunda falange del dedo *número dos*; y así sucesivamente... Empieza tú, Rosalía.

R. (*cuenta hasta treinta*) y todos tres ponen las respectivas señales en los dedos).

P. -Continúa, José.

J. -Treinta y uno, treinta y dos treinta, y nueve treinta y diez.

8. P.- Se dice *cuarenta*; y notad, hijos míos, que la palabra cuarenta, viene de *cuatro*, que es el nombre del cuarto dedo; así como treinta, viene de *tres*. Y ya que la ocasión se presenta, voy á enseñaros los nombres de los siguientes

#### NÚMEROS:

cincuenta, que indica haberse contado los diez dedos	cinco	veces
sesenta,	Id.	id,
setenta,	"	"

ochenta,  
noventa,

“  
“

ocho. “  
nueve. “

Hecha esta advertencia, tú, José, vas á seguir contando, siempre por medio de los dedos, mientras yo continúo dejando caer hormillas.

J. (*teniendo cuatro dedos señalados*): -Cuarenta y uno, cuarenta y dos...setenta.

P.- Continúa, Manuel.

M. (*teniendo siete dedos señalados*): -Setenta y uno, setenta y dos... ochenta... noventa... noventa y nueve, ciento.

9. P.- Muy bien, Manuel. Tú has dado ya á entender á tus hermanos que, cuando se han recorrido los dedos *diez veces*) se ha llegado al número *ciento*; el cual se convierte en cien cuando precede á un nombre, por ejemplo: *cien* caballos, *cien* vacas.

## CUESTIONARIO

Indique Vd., en las yemas de los dedos, el número que debe llevar cada uno de ellos (3).- ¿Qué se dice en vez de diez y uno, diez y dos... diez y diez, etc.? (5 y 6). —¿Cómo se hará para seguir contando, una vez recorridos los diez dedos? (7). —¿Qué hay que advertir respecto de las palabras treinta cincuenta hasta noventa? (8). —Cuando se han recorrido diez veces las yemas de los dedos, ¿qué número resulta? (9).

-----

## SEGUNDA LECCIÓN

En que se da término á la numeración en los dedos

<2> Ap. pág. 1

P.- Como la *Primera lección* es el cimiento, por decirlo así, en que han de reposar todas las demás lecciones, vamos á tratar de afianzarla dándole un rápido repaso. Al efecto, Manuel contará de *uno á treinta y tres*; José de *treinta y tres á sesenta y seis*; y Rosalía de *sesenta y seis á ciento*: bien entendido que cada uno, á su turno, ha de llevar la cuenta por los dedos, como lo hicimos en la primera lección.

(*Los tres niños así lo hacen*).

10. P.- Bien, hijos míos: ya habéis contado hasta *cien* hormillas, sin más auxilio que los dedos; pues bien, con ese mismo auxilio podríais alcanzar á contar *millones de millones* (expresión que habréis oído á menudo en boca de los exageradores). En efecto: una vez que se ha contado hasta *ciento*, hay que volver á contar de nuevo *uno, dos, tres, etc.*, hasta llegar otra vez á *ciento*; con el solo agregado de recordar, antes de cada nuevo número, que ya se han contado *ciento*; y así diréis:

ciento uno  
ciento dos  
ciento tres  
.....  
.....  
ciento noventa y nueve  
doscientos.

Entonces, hay que volver á contar agregando á doscientos *uno, dos, etc.*, lo mismísimo que la segunda vez, hasta completar otros ciento...

M.- Pero á mí me ocurre una duda, papá; y es que, una vez que caigan cien hormillas, y que estén señalados los, diez dedos, ¿cómo haremos para seguir llevando la cuenta?

P.- Del modo más sencillo, Manuel. Cuando hayamos llegado á *ciento*, pondrá cada uno de vosotros una señal en la *tercera* falange del dedo *número uno* (para recordar que van cien hormillas contadas), limpiando al mismo tiempo todas las señales puestas en las segundas falanges.

R.- Pero, ¿cómo se dice cada vez que se han completado de nuevo *cien* hormillas?

11. P.- ¿No recuerdas, hija mía, que, al empezar la primera lección, te dije que bastaba saber contar sus diez dedos para poder contar hasta *ciento* y mucho más? Pues bien: al señalar la tercera falange (ó sea el tronco) del *dedo número uno*, dirás *un ciento*; al señalar la tercera falange del *dedo número dos*, dirás *dos cientos*; al señalar la del *dedo número tres*, dirás *tres cientos*, y así sucesivamente, teniendo el cuidado de expresar el número del dedo que se señale, antes de decir *ciento* ó *cientos*; sólo sí que, generalmente, se escriben estos números en una sola palabra. Así:

En lugar de *dos cientos* se escribe *doscientos*  
" " " *tres cientos* se escribe *trescientos*

y así los demás cientos, con las siguientes -

#### EXCEPCIONES:

En vez de decir	cinco cientos	se dice quinientos
» » » »	siete cientos	» » setecientos
» » » »	nueve cientos	» » novecientos
» » » »	diez cientos	» » MIL.

R.- ¡Qué gusto, papá! Yo no creía que era tan fácil llegar á contar hasta *mil*!

P.- Pero ¿habéis comprendido bien todo lo que hasta aquí hemos hecho?

R.- Sí, papá.

12. P.- Sin embargo, debo insistir en llamar vuestra atención sobre una cosa, (y fijad bien en vuestra memoria, hijos míos, esto que voy á decir). ¿Cómo contasteis las diez primeras hormillas que dejé caer en el plato? - al favor de los *diez dedos*. -¿Cómo llegasteis á *ciento*? - aumentando á *diez* otros *diez*, y después otros *diez*, en fin, contando *diez* tantas veces cuantos dedos hay en las dos manos. Y ¿cómo hemos podido llegar á *mil*? -aumentando á *ciento* otros ciento y á esos *doscientos* otros *ciento*, en fin, contando *ciento* tantas veces cuantos dedos hay en las manos... En una palabra: todo nuestro desempeño, ó como si dijéramos, nuestro caballo de viaje, ha sido ese número *diez*, que no debéis perder de vista, porque él ha de conducirnos á descubrir los más importantes secretos que la Aritmética y las Matemáticas encierran. Esto advertido, voy á enseñaros en pocas palabras cómo se cuenta hasta un *millón*; lo cual no se reduce á otra cosa que á contar *mil* diez veces (que entonces se tienen *diez mil*); agregar á estos *diez mil* otros *diez mil* (que son *veinte mil*); á estos *veinte mil* otros *diez mil* (que hacen *treinta mil*), etc..., hasta llegar á *cien mil*; contar, por fin, *cien mil* diez veces para tener un *millón*...

R.- ¿Y ahí se acaba todo, papá?

P.- No, hija mía; los números son como el tiempo, que nunca se acaba, pero del cual puede sacar uno mucho provecho, según sus necesidades.

R.- ¡Oh, papá! entonces estaremos contando toda la vida... <3> pág. 1, *Apéndice*.

P.- No te asustes, Rosalía: eso de que no haya cuándo acaben los números, es lo de menos, como lo comprenderás cuando abramos aquel armario, que es el *Arca* donde está encerrada toda la Aritmética, y le abriremos en la próxima lección.

R.- ¡Gracias á Dios!

## CUESTIONARIO

¿Cómo se seguirá contando de ciento hasta mil? (10). -¿Qué hay que observar tocante a. las palabras doscientos... cuatrocientos... hasta mil? (11) - ¿Cómo se sigue contando de mil hasta un millón? (12).

-----

## TERCERA LECCIÓN

### Definiciones concernientes á las dos Lecciones que preceden

P.- Ya habéis visto, hijos míos, en la precedente Lección cómo se puede llegar á contar en los dedos hasta un millón. Pues, bien; á favor de ellos, se podría seguir contando, sin más que poner una señal (de otro color), en la primera falange del dedo *número uno*, para retener la idea de que se ha contado *un millón*, etc. Más, quiero ahorraros ese trabajo; porque lo que hasta aquí hemos hecho, basta y sobra para comprender las siguientes

### DEFINICIONES:

13. CANTIDAD (Ó GRANDOR).- *Se llama así todo lo que? pudiendo ser aumentado ó disminuido? es susceptible de ser computado ó medido.* [Ejemplos: la moneda, el peso, la longitud, un montón de hormillas, etc.].

14. UNIDAD.- *Es el objeto ó cosa que sirve de término de comparación para computar ó medir una cantidad.*

15. NUMERACIÓN.- *El arte de formar los números, de expresarlos con palabras, ó de representarlos con ciertos signos.*

16. Hay dos suertes de *numeración*: la hablada y la escrita.

17. LA HABLADA.- *Es el arte de expresar todos los números posibles con unas cuantas palabras.* [De ella nos hemos servido en las precedentes Lecciones].

18. LA ESCRITA.- *Es el arte de representar todos los números con unas cuantas palabras escritas ó signos.* [Volveremos á hablar de ella adelante].

19. NÚMERO.- *Es el nombre especial que se da á cada, cantidad formada sobre la unidad, según el lugar que ocupa en la escala de la numeración.* [Ejemplos: uno, dos, tres... ciento,... mil,... millón...].

Y basta por ahora, con tal de que aprendáis bien las definiciones que acabo de enseñaros.

## CUESTIONARIO

Qué es cantidad ó grandor? (13).- ¿Qué es unidad? (14).- ¿Qué es numeración? (15).- ¿Cuántas clases hay de numeración? (16).- ¿Cuál es la numeración hablada? (.17).- ¿Cuál es la escrita? (18).- ¿Qué es número? (19).

-----

## CAPÍTULO II

### NUMERACIÓN Y PRINCIPALES OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL ARMARIO

#### CUARTA LECCIÓN

De la numeración

p.- Ya es tiempo, hijos míos, de satisfacer vuestra curiosidad. Abre, Rosalía, ese armario, tira del cajón de abajo y dinos lo que hay, en conjunto.

R. (*abriendo el armario*): -Aquí veo un montón de hormillas; muchas cajitas de diversos tamaños; multitud de casillas...

P.- Bien: ahora prestadme atención todos tres, y tened paciencia, que á fuerza de ella se gana la ciencia.

Ese montón de hormillas, de que ya nos servimos en la Primera Lección, es la *cantidad*, que también va á servirnos en la presente.

20. Las cajitas) de menor á mayor, son para encerrar en ellas las *unidades*, las *decenas* y las *centenas*... (Luego os diré algo sobre estos dos últimos nombres).

21. Esas casillas del armario, en forma de tablero, son destinadas á servir de depósito para las hormillas sueltas y para las cajitas, según su tamaño ó importancia. Es de advertir que, para nuestro propósito, basta en la actualidad hacer uso de una sola de las líneas horizontales de casillas, desentendiéndonos de las demás.

22. Desde luego, debéis saber: que la casilla de la derecha, señalada con *u* minúscula, está destinada para servir de depósito á las *unidades simples* (hormillas sueltas en el presente caso), con la condición indispensable de que, tan luego que las hormillas lleguen á diez, ha de reunírselas en la mano para ser trasladadas á otro lugar, que ya os indicaré.

Hecha esa explicación, veamos cómo la ejecuta Rosalía.


R. (*tomando las hormillas necesarias, y colocándolas en la casilla u, cuenta: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve... En llegando á diez, las recoge y las tiene juntas en la mano*).

P.- Dime ahora: ¿qué hicisteis en la Primera Lección, después de haber contado diez en las puntas de los dedos?

R.- Pusimos una señal en la segunda falange del dedo *número uno*.

23. P.- Eh, bien: aquí tienes ahora esta cajita con la señal á (que quiere decir *diez*); pon en ella, Rosalía, las diez hormillas que acabas de contar, y deposita la cajita en la segunda casilla del armario (que se halla marcada con la misma letra, para indicar que es allí donde deben depositarse las cajitas que llevan dicha señal)... Notad, hijos míos, que esta operación equivale exactamente á la que practicasteis poniendo una señal, con tiza, en la *segunda* falange del dedo número uno; y fijaos en que aquí también es segunda la casilla que acabamos de ocupar, quedando vacía la primera.

R. [  ] (1).

(1) Con ese signo [  ] expresaremos, en lo sucesivo, que debe ejecutarse lo que se ha dicho ó prescrito.

24. P.- Para economizar trabajo y tiempo, supongamos que cualquiera de vosotros ha contado, sobre esas diez hormillas, otras diez, hasta llegar á veinte, y que estas diez nuevas hormillas han sido igualmente encerradas en esta otra cajita, marcada con la letra *d*. Pregunto ahora á José: ¿en qué casilla la coloca?

J. - En la segunda casilla.

P. - Hazlo así.

J.-[☒].

P.- Ya sabéis que cada una de estas cajitas, señaladas con la letra *d*, contiene diez hormillas; de suerte que, á medida que yo las vaya colocando en la segunda casilla, vosotros tres seguiréis llevando la cuenta. Ya principio [☒].

*Los tres:* treinta, cuarenta... noventa...

25. P.- A esas nueve cajitas, que contienen noventa hornillas, agrego esta otra [☒]. Dí, Manuel: ¿qué nombre darás al número de hormillas contadas y qué harás con las diez cajitas que se han reunido?

M.- Daré al número el nombre de *ciento*. En cuanto á las diez cajitas, las encerraré en una de esas otras cajitas más grandes, señaladas con la letra *c* y la colocaré en la casilla marcada con igual letra [☒].

P.- Perfectamente, Manuel. Debo ahora hacer notar que lo que ha hecho Manuel, guarda perfecta semejanza con lo que se hizo en la Primera Lección, es decir: se puso una señal en la *tercera* falange del dedo mayor, quitando todas las señales anteriores.

Y aquí es del caso hacer varias

## ADVERTENCIAS

### *Primera*

26. Los contenidos de las casillas u, d, c se denominan como sigue:

En lenguaje común=	{ <i>uno (ó una).</i> <i>diez.</i> <i>ciento.</i>	
En lenguaje escolar=		{ <i>unidad.</i> <i>decena.</i> <i>centena.</i>
En lenguaje matemático.....	{ <i>unidad de primer orden.</i> <i>unidad de segundo orden.</i> <i>unidad de tercer orden.</i>	

### Segunda

27. En cada casilla no deben colocarse sino de uno á nueve objetos: de ahí se sigue que, para los matemáticos, todos los objetos contenidos en cualquiera casilla, son *unidades*, con la sola distinción del orden á que pertenecen. Para ello han tenido una razón, que paso á exponer.

28. Al presente (en que la *cantidad* es un montón de hormillas), el término de comparación para el depósito hecho en la primera casilla, ha sido *una* hormilla suelta; para la segunda casilla una cajita marca *d*; para la tercera, también *una* cajita marca *c*. Ahora bien: como en ninguna casilla debe depositarse más de nueve objetos, resulta que todos esos objetos son UNIDADES, si bien de orden distinto.

### Tercera

28 bis, De la antedicha variedad de denominaciones provienen tres diferentes maneras de expresar una misma cantidad.- *Ejemplo:* coloco *dos* cajitas marca *c*, en la tercera casilla [  ] cinco marca *d*, en la segunda casilla [  ] y *tres* hormillas sueltas en la primera casilla [  ].

En lenguaje común, se diría *doscientos cincuenta y tres*. En lenguaje escolar, *dos centenas, cinco decenas y tres unidades (simples)*.

En lenguaje matemático, *dos unidades de tercer orden, cinco unidades de segundo orden y tres de primer orden*.

## CUESTIONARIO

Las cajitas de menor á mayor ¿para qué sirven?(20)- ¿A qué uso están destinadas las casillas del armario? (21)- ¿A qué está destinada la casilla señalada con *u* minúscula? (22)- Una vez que se han contado diez hormillas, ¿dónde se las colocará? (23)- ¿En qué casilla deben colocarse las cajitas marca *d* minúscula? (24)- ¿Qué nombre se dará al número de hormillas contenidas en diez cajitas marca *d* minúscula y dónde se las colocara.? (26)- ¿Cómo se denominan los contenidos de las casillas *u, d, c* minúsculas? (26)- En cada casilla, ¿cuántos objetos es permitido colocar? ¿Cómo consideran los matemáticos á los objetos contenidos en cualquiera casilla? (27)- ¿Cuál ha sido el término de comparación para el depósito hecho en la primera casilla, en la segunda y en la tercera? (28).

## QUINTA LECCIÓN

### En que se da fin á la numeración en el armario

P.- Ya explicamos en la última Lección lo concerniente á las tres primeras casillas de nuestro armario; voy á llamar ahora vuestra atención sobre las tres siguientes casillas.

29. Estas letras *U, D, C* (*mostrando las del armario*), quieren decir también *unidad, diez, ciento*; ó sea: *unidad, decena, centena*, lo mismo que las letras de las anteriores casillas, con la diferencia de que, de minúsculas que eran, se han convertido aquí en mayúsculas, porque estas tres casillas están destinadas para depositarse en ellas las *unidades, decenas y centenas* de MIL, como se indica ahí mismo; mientras que las tres primeras llevan por distintivo la palabra *simple*, cuyo significado conocisteis ya en la Lección anterior.

30. Pasando á las casillas que siguen (*mostrándolas*): estas mayúsculas de imprenta, *U, D, C*, tienen igual significado que las anteriores, con la diferencia de que éstas son para el depósito de *millones*, como lo está expresando su letrero.

Vamos ahora á explicar el uso que se hace de estas seis casillas.

En la última Lección quedasteis ya enterados de que, en completándose á diez cajitas marca *d*, se encerraban las diez en una sola cajita (más grande) marca *c* y se depositaba ésta en la tercera casilla que lleva en cabeza la letra *c*, que quiere decir *ciento ó centena*.

Se comprende fácilmente que, repitiendo la misma operación, se puede tener dos, tres y más centenas.



31. Reunidas diez *centenas simples*, como no es permitido que permanezcan más de nueve objetos en una misma casilla, veríamonos obligados á encerrar estas *diez centenas* en una que ya no sería cajita sino cajón, el cual no entraría en nuestra casilla de *unidades de mil*. Para obviar este inconveniente apelamos al siguiente recurso:

He aquí unas hormillas de metal amarillo (*mostrándolas*) que queremos depositarlas en el armario, suponiendo que son de *oro*, y que cada una de ellas equivale á *mil* hormillas, de las que hasta aquí nos han servido.

32. Y bien: en lugar de una *caja mayor*, que no cabría, en la casilla *U* deposito en ella una hormilla de estas [☒], y tengo así el valor de *mil* hormillas. Volviendo á contar desde una hormilla simple y reuniendo decenas y centenas, llego á obtener otras mil, que las cambio también por una hormilla de *oro*; y así sucesivamente, hasta reunir diez, que las encierro en esta otra cajita, marca *D*, la cual vale así por una *decena de mil*, ó sea *diez mil* hormillas simples. Repitiendo iguales operaciones, llego á depositar otra y otras cajitas de á *diez mil* hasta completar *diez* cajitas. Entonces, no pudiendo dejar las diez en una casilla, por ser prohibido, las encierro en esta otra, marca *C*, que la coloco en la casilla *C* [☒], teniendo así el valor de una *centena de mil*, ó sean  *cien mil* hormillas simples, reunidas en una sola cajita.

33. Procediendo de igual modo, llego á depositar *diez* cajitas del mismo valor [☒], y tengo *diez centenas de mil*, ó sea *un millón* de hormillas simples.

34. Pasando á las tres casillas subsiguientes: estas letras *U, D, C*, mayúsculas de imprenta, quieren decir *unidades, decenas, centenas de millón*, como lo está expresando el letrero puesto encima de dichas letras. El procedimiento para haber de servirse de ellas, es idéntico al que hemos observado respecto á las tres anteriores.

Así, admitiendo que estas nuevas hormillas que os muestro [☒], son de piedra preciosa (de esmeralda, por ejemplo) y que cada una de ellas vale por las diez cajitas que momentáneamente dejamos en la casilla *C*, para pasarlas de ahí á la casilla contigua, *U*, las levanto y, trocándolas con una hormilla de éstas, la deposito en la casilla *U* [☒]. He ahí cómo, en esta nueva casilla tengo el equivalente de *una unidad de millón*, ó sea *un millón* de hormillas comunes, habiendo quedado vacías todas las demás casillas de la derecha. En este estado, suponed que, recomenzando la penosa tarea de volver á contar desde una hormilla común, llegamos á reunir otro *millón*, etc., hasta obtener el valor de diez hormillas de esmeralda; que entonces, encerrándolas en esta cajita *D*, que he aquí [☒], la coloco en la casilla respectiva, etc., hasta reunir diez, que las encierro en esta cajita mayor *C*, y las deposito en su respectivo lugar [☒].

Tengo entonces  *cien unidades de millón* ó, lo que es lo mismo,  *cien millones* de hormillas comunes.

Para no fatigar más vuestra atención, quiero por ahora detener ahí la serie de la *Numeración*, y distraeros con una historieta. <4> pág. 1, Ap.

## DOS IMPORTANTES ADVERTENCIAS

### *Primera*

35. Las casillas del armario están separadas de tres en tres. Para mejor entendernos, daremos á estas separaciones ó secciones, empezando por la de la derecha, las denominaciones de *jerarquía primordial* (ó sea jerarquía de *SIMPLES* unidades) decenas y centenas, jerarquía de *MILES*, jerarquía de *MILLONES*, etc.

### *Segunda*

35 bis, Ya dijimos en la Cuarta Lección (art. 27) que los matemáticos consideran como unidades los objetos contenidos en cualquiera casilla, distinguiéndolas solamente con la designación del número de orden correspondiente, Sólo hay que agregar ahora: que ese

número de orden sigue ascendiendo á medida que avanza uno contando las casillas hacia la izquierda; y que así la cuarta casilla es *de cuarto orden*, la quinta *de quinto orden*, etc., etc.

Esto establecido, veamos cómo se lee una cantidad que contenga dos jerarquías.

#### *Ejemplo*

Pongo en la séptima casilla una hormilla de esmeralda; en la sexta casilla, dos cajitas con marca *C*; en la quinta, *tres* id, marca *D*; en la cuarta, *cinco* marca *U*; en la tercera seis marca *c*; en la segunda ocho marca *d*; por último, en la primera casilla nueve hormillas ordinarias [☒].

Pregunto á Rosalía: ¿cómo lee esta cantidad en lenguaje matemático?

R.- *Una* unidad de séptimo orden; *dos*, del sexto; *tres*, del quinto; *cinco*, del cuarto; *seis*, del tercero; *ocho*, del segundo; *nueve*, del primer orden.

P. - Diga, José: ¿cómo se lee la misma cantidad en lenguaje escolar?

J.- Una unidad de millón; dos centenas, tres decenas y cinco unidades de mil; seis centenas, ocho decenas y nueve unidades simples.

P.- Diga, Manuel: ¿cómo se lee en lenguaje común?

M.- Un millón, doscientas treinta y cinco *mil*, seiscientas ochenta y nueve.

P.- ¡Bien!

#### ADVERTENCIAS

36. Cuando entre las casillas ocupadas, ó á la derecha de ellas, hay alguna ó algunas que han quedado vacías, en llegando á ellas se dice, en lenguaje matemático; *cero unidades* (de tal orden); y, en lenguaje escolar ó común, se pasa por alto sobre las casillas no ocupadas, es decir, que se limita uno á expresar los valores de cada jerarquía, como si ésta fuese independiente de las otras jerarquías.

#### *Ejemplo*

Sea la misma cantidad de que acabamos de servirnos, con estas dos diferencias: que quito las *cinco* hormillas de oro, y también las *ocho* cajitas marca *d* [☒].

Pregunto á Manuel: ¿cómo se enuncia la cantidad en lenguaje matemático y en lenguaje común?

M. En lenguaje matemático: [☒].

En lenguaje común: Un millón, doscientas treinta mil, seiscientas nueve.

P.- ¡Perfectamente!

37. REGLA.- Para enunciar, escribir ó leer una cantidad, se debe empezar por el número más alto, es decir, por el de la casilla que contiene unidades de mayor valor, y continuar expresando las demás, sucesivamente, hasta las simples unidades. Mas, para haber de leer una cantidad crecida, lo primero que hay que hacer, antes de leerla, es pasar en vista todos los órdenes, á usanza escolar, empezando por la derecha, y diciendo: unidad, decena, centena *simples*, unidad, decena, centena *de mil*, etc.; hasta llegar al último número de la izquierda, á fin de saber el rango á que pertenece y darle su nombre propio.

38. OBSERVACIÓN.- De la manera como se ha formado el valor que encierra cada casilla, resulta: que son necesarias *diez* unidades de un orden cualquiera (hablando matemáticamente), para haber de obtener *una* sola unidad del orden inmediatamente superior; y, viceversa: que *una* unidad de cualquier orden vale por diez unidades del orden inmediatamente inferior.

#### CUESTIONARIO

¿Qué representan las letras *U, D, C* mayúsculas cursivas y á qué uso están destinadas las casillas marcadas con esas letras? (29) - ¿A qué están destinadas las casillas marcadas con las letras mayúsculas, de imprenta, *U, D, C*? (30) - Reunidas diez centenas simples, ¿qué debe hacerse con ellas? (31). - ¿Qué procedimiento se observará respecto á las casillas señaladas con las mayúsculas *U, D, C* cursivas? (32). - Una vez obtenidas diez cajitas, de una centena de mil cada una, ¿cuántas hormillas simples se tendrán? ¿Qué se hará con esas diez cajitas? (33). - ¿Qué procedimiento se observara respecto a los millones? (34). - ¿Qué denominación se dará á cada una de las secciones separadas en el armario de tres en tres, empezando por la derecha? (35). - Cuando entre las casillas ocupadas ó á la derecha de ellas hay alguna ó algunas casillas vacías. ¿Cómo se lee en lenguaje matemático, en lenguaje escolar y en lenguaje común? (36). - ¿Como se hace para enunciar, escribir ó leer una cantidad? (37). - ¿Qué resulta de la manera como se ha formado el valor que encierra cada casilla? (38).

-----

#### SEXTA LECCIÓN

De la adición de números enteros

39. P.- Las principales operaciones aritméticas se reducen a cuatro, á saber:

Sumar (*)	ó adición
Restar	ó sustracción
Multiplicar	ó multiplicación
Partir	ó división

Trataremos de ellas sucesivamente.

#### ADICIÓN

##### DE NÚMEROS ENTEROS

Para poder sumar cualesquier cantidades, es necesario aprender de memoria, los rudimentos que se hallan comprendidos en la siguiente

#### TABLA DE ADICIÓN

§

##### PRIMERA PARTE

##### Sección

Sección A

Dos cantidades que hacen dos: Una y una son »
--

Sección B

Dos cantidades que hacen tres: Una y dos son » Dos y una » »
--

-----  
(\*) Sobreentendiéndose operación de sumar.

<p align="center"><b>Sección C</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen cuatro:</i> Una y tres son * dos y dos * tres y una *</p> <p align="center"><b>Sección D</b></p> <p>(* <i>Das cantidades que hacen cinco:</i> Dos y tres son * tres y dos *</p> <p align="center"><b>Sección E</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen seis:</i> Dos y cuatro son * tres y tres * cuatro y dos *</p> <p align="center"><b>Sección F</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen siete:</i> Dos y cinco son * tres y cuatro * cuatro y tres * cinco y dos *</p>	<p align="center"><b>Sección G</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen ocho:</i> Dos y seis son * tres y cinco * cuatro y cuatro * cinco y tres * seis y dos *</p> <p align="center"><b>Sección H</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen nueve:</i> Dos y siete son * tres y seis * cuatro y cinco * cinco y cuatro * seis y tres * siete y dos *</p> <p align="center"><b>Sección I</b></p> <p><i>Das cantidades que hacen diez:</i> Dos y ocho son * tres y siete * cuatro y seis * cinco y cinco * seis y cuatro * siete y tres * ocho y dos *</p>
--	--

SEGUNDA PARTE

<p align="center"><b>Sección J</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen once:</i> Dos y nueve son * tres y ocho * cuatro y siete * cinco y seis * seis y cinco * siete y cuatro * ocho y tres * nueve y dos *</p>	<p align="center"><b>Sección K</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen doce:</i> Tres y nueve son * cuatro y ocho * cinco y siete * seis y seis * siete y cinco * ocho y cuatro * nueve y tres *</p>
--	--

(\* En esta sección y las siguientes se ha suprimido la combinación en que entra la cantidad uno, por ser muy fácil comprensión, verbigracia: Uno y cuatro son cinco; ó cuatro y uno son cinco.

<p align="center"><b>Sección L</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen trece:</i> Cuatro y nueve son * cinco y ocho * seis y siete * siete y seis * ocho y cinco * nueve y cuatro *</p> <p align="center"><b>Sección LL</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen catorce:</i> Cinco y nueve son * seis y ocho * siete y siete * ocho y seis * nueve y cinco *</p> <p align="center"><b>Sección M</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen quince:</i> Seis y nueve son * siete y ocho * ocho y siete * nueve y seis *</p>	<p align="center"><b>Sección N</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen dieciséis:</i> Siete y nueve son * ocho y ocho * nueve y siete *</p> <p align="center"><b>Sección Ñ</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen diecisiete:</i> Ocho y nueve son * nueve y ocho *</p> <p align="center"><b>Sección O</b></p> <p><i>Das cantidades del primer orden que hacen dieciocho:</i> Nueve y nueve son *</p> <p align="center">NOTA. — En vez de uno y uno son dos, (como se ha dicho en la Sección A), algunos dicen: «uno más uno hacen dos», y así en las demás Secciones.</p>
---	---

**OBSERVACIÓN**

P.—Para ayudar á la memoria á retener la precedente Tabla, conviene fijarse en una circunstancia, y es: que, en la primera columna de cada Sección (excepto las Secciones A y O), las cantidades van creciendo, al paso que las de la tercera columna van disminuyendo; así, por ejemplo, en la Sección F, la primera columna, empezando por *dos*, acaba por *cinco*; y la tercera, empezando por *cinco*, acaba por *dos*. Son las mismas cantidades, pero colocadas en orden inverso respectivamente.

40.- Los signos que usa la Adición son los siguientes:

El signo +, puesto entre dos cantidades, quiere decir que la cantidad que le sigue debe ser agregada á la que le precede, y se pronuncia más, en lenguaje aritmético. Así, por ejemplo, en lugar de la expresión común *uno y uno*, se escribe uno + uno, y se lee *uno más uno*.

El otro signo, =, significa que la cantidad ó cantidades que se hallan antes del signo, son equivalentes á la cantidad ó cantidades que vienen después de él, y se pronuncia igual, v.g.:

$$\begin{aligned} \text{tres + cinco} &= \text{ocho} \\ \text{nueve} &= \text{seis + tres} \end{aligned}$$

Él hace las veces de la palabra *son* (ó *hacen*), que se usa en el estilo común, por ejemplo: tres y cinco *son* (ó *hacen*) ocho.

### § 3

Eso entendido, veamos cómo se hará para agregar unidades del primer orden á una cantidad que contenga *diez* y *ocho* ó más unidades.

Al efecto, supongamos que á la cantidad diez y ocho se quiere agregar *dos* más; dejando momentáneamente á un lado la decena de diez y ocho, y tomando tan sólo la unidad *ocho*, digo:

$$\text{ocho y dos son diez}$$

En seguida concluyo diciendo: *una decena* proveniente de las unidades simples (*ocho* y *dos*), y otra decena que dejé momentáneamente, hacen *dos decenas*, ó, en otros términos:

$$\text{diez y ocho + dos} = \text{veinte}$$

*Otro ejemplo.* A veintitrés hay que agregar ocho, Me desentendiendo por un instante de las dos decenas de veintitrés, y digo: tres y ocho son once; pero, siendo *once* una contracción de *diez* y *uno* (art. 5), me fijo en que hay una decena completa y un pico de *uno*, que ya me anuncia que el resultado final ha de dar un pico de uno, En efecto, volviendo á tomar en cuenta las dos decenas que dejé á un lado, tengo: veinte + once = treinta y *uno*.

Del mismo modo, para sumar cuarenta y siete + cinco, digo:

Siete y cinco son *doce*; *doce*, quiere decir *diez* y *dos*, é instantáneamente veo que en la suma de cuarenta y siete + cinco ha de haber también un pico de *dos*. En efecto: cuarenta y siete + cinco = cincuenta y dos. Por igual razón, para sumar sesenta y siete + ocho, digo: Siete y ocho son quince; pero quince es contracción de *diez* y *cinco*; luego, en la suma de sesenta y siete + ocho, ha de haber también un pico de *cinco*, como sucede en efecto, pues sesenta y siete + ocho = setenta y cinco.

Cuando la agregación de las unidades sueltas da más de quince, entonces la cosa es más clara, pues las palabras mismas *diez* y *seis*, *diez* y *siete*, *diez* y *ocho* están indicando el pico que ha de haber en el resultado definitivo.

Con lo expuesto, podemos establecer la siguiente:

41, REGLA: -*Siempre que se trate de agregar unidades simples á una cantidad que contenga una ó más decenas, hay que dejar á un lado, momentáneamente, la decena ó decenas del sumando mayor, adicionar las unidades simples de ambos sumandos y agregar este resultado á la decena ó decenas momentáneamente descuidadas. Sí la suma de las unidades simples alcanza á diez, hay que agregar una decena á la decena á decenas del número mayor, Si dicha suma pasa de diez, entonces, además de esa decena, se agregará á la decena ó decenas del número mayor el pico que diere la Tabla.*

## CUESTIONARIO

¿Cuáles son las principales operaciones de la Aritmética? (39) - ¿Cuáles son los signos que usa la adición? (40) - ¿Cómo se hace para agregar unidades simples á una cantidad que contenga una ó más decenas? (41).

### SÉPTIMA LECCIÓN

#### (Continúa la Adición)

P.- Desde la precedente lección no ha habido tiempo para que se graben en vuestra memoria todas las combinaciones de la *Tabla de adición*; pero no importa, porque eso vendrá con la práctica. Vamos, entre tanto, á abordar la operación llamada...

R.- Pero á mí me ha ocurrido una duda, papá, al estudiar la Tabla.

P.- Veámosla.

R.- ¿Por qué desde la Sección K para adelante, en las columnas primera y tercera, han ido desapareciendo, una tras otra, las cantidades *dos*, *tres*, *cuatro*... hasta ocho inclusive?

P.- Por esta sencilla razón, hija mía:

Que la Tabla ha tenido por objeto establecer las combinaciones que pueden hacerse entre dos cantidades del primer rango solamente, ó sean *unidades simples*. Siendo ello así, no podía haberse hecho, en la Sección K, por ejemplo, la combinación diez y dos; porque *diez* no pertenece al rango de *unidades* sino al de *decenas*.

Por igual consideración se han suprimido los números que faltan en las Secciones posteriores.

Disipada así la duda, volvamos á tomar el hilo de la Lección. Hasta aquí sólo hemos hecho uso de la primera línea horizontal de casillas del Armario; al presente vamos á servirnos de algunas otras de las casillas horizontales que se hallan debajo y, al mismo tiempo, de las verticales pertenecientes á la *Primera Jerarquía*.

42. Al efecto, supongamos que, teniendo en nuestra heredad seis peones contratados para trabajar á jornal por largo tiempo, he estado apuntando en el Armario, con hormillas y cajitas, los aras que cada uno de ellos ha trabajado [  ].

	c	d	u	
El peón A ha hecho.....	dos	cuatro	nueve	Jornales
El id. B " " ".....	una	ocho	seis	
" " C " " ".....		siete	cinco	
" " D " " ".....		seis	dos	
" " E " " ".....		cinco	seis	
" " F " " ".....				
<i>Suma de jornales =</i> .....				

Ahora, para obtener la *suma*, esto es, el monto de los jornales, procedo del siguiente modo:

Me contraigo desde luego á la columna de las unidades simples, para ir agregando las de la primera casilla á las de las demás que se hallan ocupadas; tomándolas al efecto en la mano, sucesivamente, hago mí cuenta, diciendo:

«*nueve y seis son quince, + cinco son veinte, + dos son veintidós, + seis son veintiocho. En veintiocho hay dos decenas y ocho unidades; dejo las ocho unidades (en la casilla de unidades de la Suma) [ ]*, y llevo las *dos decenas* (esto es, las acomodo en dos cajitas marca *d* y las llevo á la parte superior de las columnas de las decenas)» [ ]

En este estado, me contraigo á la columna de las decenas, para proceder en ellas del mismo modo que en la de las unidades simples y, teniendo en cuenta las *dos* cajitas que acabo de llevar de la columna de unidades, digo:

«*Dos que he traído y cuatro son seis, + ocho son catorce, + siete son veintiuna, + seis son veintisiete, + cinco son treinta y dos. En treinta y dos hay tres decenas (de decenas) y sobran dos decenas (simples). Dejo estas dos decenas simples (en la casilla respectiva de la Suma) [ ]*. Y llevo treinta decenas, ó sean tres centenas (acomodándolas en tres cajitas marca *c*) á la parte superior de la columna de centenas» [ ]

Contrayéndome, por último, á la columna de las centenas, digo:

«*Tres que he traído y dos son cinco, + una son seis, que las dejo*» (en la casilla de centenas de la Suma) [ ]

La operación se halla terminada, dando por resultado:

Seis centenas | dos decenas | ocho unidades,

ó, en lenguaje común:

seiscientas *veinte y ocho* hormillas, que representan igual número de jornales ó sea la *Suma*(\*)

#### OBSERVACIONES

43. P.- Como he recogido materialmente todos los objetos contenidos en las casillas superiores, para colocarlos bajo, en una sola línea, han desaparecido por completo los apuntes que había arriba; de suerte que ya no puede saberse qué número de jornales correspondía á cada uno de los peones.

Para obviar tal inconveniente, y algún otro que lo palparéis cuando calculemos sobre números escritos en cifras, se opera de este otro modo: -No se quita ninguna hormilla ni cajita de su lugar, sino que tan sólo se hace uno cargo del contenido de cada casilla, y va haciendo de memoria las agregaciones sucesivas. Lo mismo se hace esto es, de memoria, la operación de llevar decenas, centenas, etc., de una columna á otra.

Para llenar la línea de la Suma, se sirve uno de las hornillas y cajitas de repuesto.

-----  
(\*) Ya se supone que, habiéndose recogido todas las hormillas y cajitas, para colocarlas sucesivamente en la línea de la Suma, resulta que todas las casillas de arriba han quedado vacías.

También es de advertir que los que están acostumbrados al cálculo, omiten todos los conceptos que, para mayor claridad, se han puesto entre paréntesis en las explicaciones anteriores, y que suprimen, además, otras muchas expresiones, limitándose al empleo de muy pocas palabras. Así, en el ejemplo propuesto, dirían:

«Nueve y seis quince, veinte, veintidós, veintiocho, pongo ocho y llevo dos. Dos que llevo y cuatro son seis, catorce, veintiuna, veintisiete, treinta y dos; pongo dos y llevo tres. Tres que llevo y dos son cinco y una son seis, que las pongo. <5> pág. 2, Ap.

#### PRUEBA DE LA SUMA

44. Después de terminada la operación de sumar, hay que cerciorarse de que el resultado es exacto, valiéndose al efecto de otra operación llamada prueba. La más sencilla y la única que por ahora esté á vuestro alcance, es hacer por segunda vez la operación (*sin ver el resultado de la primera*), pero yendo de abajo para arriba. Si la segunda suma, así obtenida, fuese igual á la primera, se podrá dar por exacto el resultado.

#### ADVERTENCIAS

45. *Primera*: -Ya se ha visto que, para hacer la operación, se principia por la columna de las unidades simples y se pasa á considerar sucesivamente las columnas de *orden* superior, es decir, que considera uno los distintos *órdenes* de numeración yendo de derecha á izquierda. Para enunciar ó expresar una cantidad cualquiera, se vá al contrario, de izquierda á derecha, empezando por las unidades de mayor valor.

46. *Segunda*: -Cuando al enunciar una cantidad no se menciona alguno de los *órdenes*, entonces, al colocar ó apuntar los valores en el Armario, se deja vacía la correspondiente casilla.

-----

Ahora, hijos míos, para terminar la lección de hoy, voy á dar á cada uno de vosotros un ejercicio, ó llámese problema de adición, á fin de que vayáis meditándolo hasta la *Conferencia* que tendremos próximamente, como cuarto intermedio entre Lección y Lección.

*Para Manuel*: - Un banquero ha recibido en depósito, de varias personas, los siguientes valores en soles (\*), en billetes de á diez, de á ciento y valores de á mil, á saber:

De Administrador	G, ochocientos veinticinco,
" Minero	H, seis mil cincuenta,
" Abogado	I, mil y uno,
" Empleado	J, ciento ochenta,
" Comercio	K, mil nueve.

¿A qué cantidad asciende el monto del depósito?

*Para Rosalía*: - Ha venido de París una factura de menaje para señorita, cuyo importe se ha avaluado en francos, como sigue:

Un catre de bronce .....	= quinientos veinticinco,
una cómoda de cedro, embarnizada.....	= trescientos,
un ropero con espejo de cuerpo entero.....	= trescientos ocho,
una mesa de tocador, con útiles de porcelana..	= trescientos veinte,
un velador ó mesa de cabecera.....	= sesenta y cuatro,
una máquina de costura y un costurero.....	= quinientos uno,
un piano .....	= dos mil seis.

¿Cuál es el importe total de estos artículos, en francos?

*Para José*: - La provincia X consta de cinco cantones, que contienen el número de habitantes expresados en la relación que sigue:

-----  
(\*). Moneda peruana.



El cantón L..... = nueve mil treinta y cinco,  
 “ “ L ..... = nueve mil uno,  
 “ “ M..... = ocho mil ciento tres,  
 “ “ N..... = siete mil ochocientos,  
 “ “ O..... = seis mil sesenta y siete.

¿Qué número de habitantes tiene toda la provincia?

#### CUESTIONARIO

¿Cómo se suman dos ó mas cantidades que contengan unidades, decenas, centenas...? (42).- ¿Cómo se hace la prueba de la Suma? (44).

-----

CONFERENCIA <6> pág. 2, Ap.

P.- Vamos á ver cómo andan los problemas: Manuel será el primero en resolver el suyo. Para mejor entendernos" supongamos que él desempeña en un Banco el cargo de tenedor de libros... y, sea dicho entre paréntesis - que no hay cosa más parecida á un *Libro de cuentas* que nuestro Armario,- porque en uno y otro hay *unidades, decenas, centenas* simples, jerarquías, etc., etc.

Esto entendido, voy á enunciar sucesivamente las cantidades, para que Manuel las vaya apuntando, á medida que yo las dicte; pero ha de ser con la condición de que él expresará la clase de valores, esto es, que son vales de á *mil*, billetes de á *ciento*, de á *diez* ó de á un sol... los que apunta.

Manos á la obra, señor tenedor de libros, que yo empiezo.

P.- (Leyendo el problema) «Del administrador G *ochocientos veinticinco*.»

M.- [  ] <7> pág. 3, Ap.

P.- «Del minero H *seis mil cincuenta*.»

M.- [  ] <8> pág. 3, Ap.

.....  
 P.- Terminada como está la operación, sírvase Vd., señor tenedor, hacer la suma de esas diversas partidas y enunciar, á su turno, el resultado de la operación, primero en términos escolares, y después en lenguaje común.

M.- [  ] <9> pág. 3, Ap.

[NOTA.- R. y J. resuelven su respectivo problema con sujeción á los mismos principios y procedimientos.]

P.- Ya veis, hijos míos, que «*no es el león como lo pintan*», puesto que, sin gran pena, ya sabéis sumar; pero, para completar las nociones que sobre el particular habéis adquirido, no está de más que yo agregue una breve explicación.

47. Sabéis que se da el nombre de *suma* al resultado final de la operación de sumar. Frecuentemente se da también á ese resultado el nombre de *total*, como sinónimo de *suma*. Sin embargo, hay casos en que cada una de estas dos palabras tiene su significado especial, como lo veréis más tarde. (Aún no se ha generalizado la denominación que debe darse á los elementos de la *suma*, es decir, á las cantidades parciales componentes de aquélla; nosotros, para lo que se ofrezca, les daremos el nombre de *sumandos*).

48. Algo más: también se aplica el nombre de *suma* á la operación misma de sumar, como sinónimo de *adición* que es cosa muy distinta de la cantidad llamada *suma*); pues, en este otro sentido significa toda la operación, como cuando se dice: la *suma* (ó *adición*) es una de las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética.

Y bien; como que ya la conocéis, me ocurre haceros una pregunta á todos tres, para que cada uno á su turno, empezando por José, dé su contestación:

¿Qué es la suma ó adición?

J.- [  ] }  
R.- [  ] } <10> pág. 3, Ap.  
M.- [  ] }

## CUESTIONARIO

¿Qué nombre se da al resultado final de la operación de sumar? (47). - ¿Qué nombre se da á cada una de las cantidades que forman la suma? (47).- ¿Qué otra cosa significa la palabra suma? (48).

-----

## OCTAVA LECCIÓN

### De la sustracción de números enteros

#### § 1

P.- La *Sustracción* es hermana gemela de la *Adición*; y, sin embargo, ambas están en contradicción perpetua: ésta por la afirmativa y aquélla por la negativa. La una, á semejanza de los mercaderes, pide siempre *más*; y la otra, como los compradores por comisión, ofrece siempre *menos*: así es el mundo. El agua y el fuego, hijos de Dios, y hermanos por lo tanto, parece que fueran mortales enemigos; esto no obstante producen entrambos tantos bienes!... Ni más ni menos sucede entre la *Adición* y la *Sustracción*.

Sólo sí que, siendo estas señoras adustas á cual más, hay que hacerles antesala y buscar madrina, á fin de que sean ellas accesibles. Así, para haber de saludar á la primera, tuvimos que valernos de su camarera, la «Tabla-de-Adición»; y ahora es menester que solicitemos la recomendación de la favorita de la señora *Sustracción*, que hela aquí:

## TABLA DE SUSTRACCIÓN

### PRIMERA PARTE

Sección A  
Dos menos una es una

Sección B  
Tres menos dos es una  
" " una son dos

<p><b>Sección C</b></p> <p>Cuatro menos tres es una        * * dos son dos        * * una * tres</p>	<p><b>Sección G</b></p> <p>Ocho menos seis son dos        * * cinco * tres        * * cuatro * cuatro        * * tres * cinco        * * dos * seis</p>
<p><b>Sección D</b></p> <p>Cinco menos tres son dos        * * dos * tres</p>	<p><b>Sección H</b></p> <p>Nueve menos siete son dos        * * seis * tres        * * cinco * cuatro        * * cuatro * cinco        * * tres * seis        * * dos * siete</p>
<p><b>Sección E</b></p> <p>Seis menos cuatro son dos        * * tres * tres        * * dos * cuatro</p>	<p><b>Sección I</b></p> <p>Diez menos ocho son dos        * * siete * tres        * * seis * cuatro        * * cinco * cinco        * * cuatro * seis        * * tres * siete        * * dos * ocho</p>
<p><b>Sección F</b></p> <p>Siete menos cinco son dos        * * cuatro * tres        * * tres * cuatro        * * dos * cinco</p>	
SEGUNDA PARTE	
<p><b>Sección J</b></p> <p>Once menos nueve son dos        * * ocho * tres        * * siete * cuatro        * * seis * cinco        * * cinco * seis        * * cuatro * siete        * * tres * ocho        * * dos * nueve</p>	<p><b>Sección K</b></p> <p>Doce menos nueve son tres        * * ocho * cuatro        * * siete * cinco        * * seis * seis        * * cinco * siete        * * cuatro * ocho        * * tres * nueve</p>

<p><b>Sección LL</b></p> <p>Catorce menos nueve son cinco        * * ocho * seis        * * siete * siete        * * seis * ocho        * * cinco * nueve</p>	<p><b>Sección N</b></p> <p>Diecisiete menos nueve son ocho        * * ocho * nueve</p>
<p><b>Sección M</b></p> <p>Quince menos nueve son seis        * * ocho * siete        * * siete * ocho        * * seis * nueve</p>	<p><b>Sección O</b></p> <p>Dieciocho menos nueve son nueve</p>
<p>NOTA. — En vez de «dos menos una es una» (como se ha dicho en la Sección A), algunos dicen: «se dos quito una, queda una»; y así en las demás Secciones.</p>	

P.- Para estimularlos á aprender cuanto antes la Tabla de sustracción, voy á entretenerlos con algunos ejemplos.

PRIMER EJEMPLO

49.- Supongamos que yo doy á Juan en venta al fiado, una res, por el precio de *setenta y cinco* soles, que los apunto, poniendo en el Armario:

*Siete* cajitas marca *d* y *cinco* hormillas sueltas.

A los pocos días, Juan me envía, en parte de pago, *cincuenta* soles. Para hacer mi cuenta, los apunto también, en la segunda línea horizontal del Armario, poniendo *cinco* cajitas marca *d*, y nada en casilla de unidades.


d	u
siete cinco	cinco
dos	cinco


(\*) En esta Sección y las que siguen se ha suprimido la combinación en que resulta ó entra el número *uno*, por ser de muy fácil comprensión; por ejemplo: cinco menos *uno*, quedan cuatro; ó cinco menos cuatro, queda *uno*.

Aproximadas así ambas cantidades, y comparándolas, orden por orden, digo:


« *De cinco unidades nada quinto* (porque nada hay en la casilla de unidades de Juan), quedan cinco (unidades simples), *que las pongo abajo*, en la correspondiente casilla de la tercera línea horizontal.

Pasando al segundo orden de casillas, digo:

«*De siete decenas quinto cinco* [  ], quedan *dos* (decenas), *que las pongo* en la correspondiente casilla de dicha tercera línea (\*).

Aquí se hace necesario advertir que, habiendo quitado yo *cinco* decenas de arriba, han quedado, por este solo hecho, compensadas y sin valor alguno, las cinco de abajo; por consiguiente, también las quito [  ], quedando en definitiva como resto:

*dos* decenas y cinco unidades, es decir, *veinticinco* soles, los mismos que sale á deberme Juan.

NOTA, -Observando rigurosamente el significado de la palabra *quedan*, debería dejarse cada resto parcial en la misma primera línea horizontal [  ]; mas ya veremos por que razón, en la práctica, se le coloca en la tercera línea llamada *resta*.


#### SEGUNDO EJEMPLO

49 bis, Hice á Pablo varios encargos, enviándole al efecto *seiscientos cincuenta* pesos, y él me ha remitido una parte de los encargos con una cuenta en que consta que los artículos remitidos han costado la suma de *cuatrocientos sesenta y tres* pesos.


Para saber yo cuántos pesos me quedan en su poder, ocurro al Armario, y hago el siguiente apunte:

Pongo arriba como cargo contra Pablo.....  
Pongo abajo como descargo á favor de Pablo.....

c	d	u
seis	cinco	
cuatro	seis	tres

Haciendo en seguida la comparación entre el cargo y descargo, tropiezo desde luego con un inconveniente, que consiste en que no hay cómo deducir las tres unidades apuntadas abajo, porque en la casilla respectiva de arriba *nada* hay. Entonces, recordando el adagio «más vale maña que fuerza », hago de modo que de la casilla *d* del cargo pase *provisionalmente* una cajita á la casilla de *unidades* simples, donde vacío el contenido [  ], lo que en nada altera el

valor del cargo, porque, como se ve, su monto es el mismo

.....  
Mas, habiendo ahora *diez unidades* arriba, digo: « de diez unidades quito tres [  ], quedan *siete*, que las bajo á la *resta*.

c	d	u
seis	cinco	diez
cuatro	seis	tres
		siete

Pasando al rango de las decenas, vuelvo á tropezar con el mismo inconveniente; lo cual no me arredra, porque ya conozco el camino. En efecto, hago que de la casilla de

(\*) Así como en la operación de sumar se denomina *suma* la última fila de, casillas horizontales que manifiesta el resultado final, así también, en la operación de restar, se da á la última fila la denominación de *resta*.

centenas pase á la de las decenas una cajita (que contiene diez cajitas marca *d*) y las vacío [  ]; de modo que, cuatro decenas que existían y diez que acaban de venir, hacen catorce decenas, y digo:

«De catorce quito seis [  ], quedan ocho, que las bajo la resta».

Finalmente, pasando á la columna de centenas, digo:

«de cinco quito cuatro [  ], queda una, que la bajo á la resta.

Como todos los valores concursados se han retirado, tanto en el cargo como en el descargo, quedan tan sólo apuntadas en la resta, como cargo líquido, una centena, ocho decenas y siete unidades, es decir:

c	d	u
cinco cuatro	Catorce seis	..... siete
una	ocho	siete

Ciento ochenta y siete pesos,

que es el resto que aún queda á favor mío en poder de Pablo.

## § 2

Para daros mayor luz sobre la Substracción, voy á presentaos un

### TERCER EJEMPLO

50.- Suponed que mi corresponsal N. me ha escrito dándome aviso de que con el portador de su carta me ha enviado *mil pesos* enzurrados.

Contado aquí el dinero, resulta que falta un peso que, (á juicio del portador, debe provenir de un error cometido por el Contador del señor N.)

En ese concepto, hago en el Armario la siguiente apuntación:

Remitido por el señor N.....	u	c	d	u
A deducir, por error cometido.....	una			una

Tratando ahora de aplicar al caso la *Substracción*, encuentro vacía la casilla de unidades de arriba, y ocurrió á la casilla inmediata, que también se halla vacía..... Entonces, sin pararme en rangos ni en jerarquías, prosigo mi propósito hasta encontrar una casilla ocupada. Encuentro, por fin, una sola unidad en la de los Miles; la tomo, en calidad de suplida, y hago con ella el siguiente arreglo:

Cambio la *unidad de mil* con su valor equivalente, es decir con diez cajitas marca *c* [  ]; de estas diez dejo nueve en la casilla de centenas [  ]; cambio la restante con su equivalente, esto es, con diez cajitas marca *d* [  ], de las cuales dejo nueve en la casilla de decenas [  ], y cambio la restante con diez unidades simples, que las dejo en la correspondiente casilla [  ].

De este arreglo, que en nada menoscaba la partida sentada á favor del señor. N., resulta la siguiente transformación:

Remitidos por el señor N.....	u	c	d	u
A deducir, por error cometido .....		Nueve	Nueve	diez
		.	.	
		.	.	
		.	.	
		nueve	nueve	nueve

Así las cosas, digo:

«De diez unidades simples quito una [  ] quedan *nueve*, que las bajo á la *resta*».

« De *nueve* decenas *nada* quito, quedan *nueve* y las bajo».

« De *nueve* centenas *nada* quito, bajo las *nueve*».

Terminada la operación, contesto al señor N., acusándole recibo de

novecientos noventa y nueve pesos

R.- Y ¿cómo se llama el resultado de la sustracción?

P.- Este y otros pormenores dejaremos para mañana; entre tanto, con la Tabla de sustracción y las recientes explicaciones, tenéis lo bastante.

### CUESTIONARIO

¿Cómo se hace una sustracción? (49)- Cuando la casilla superior se halla vacía ó contiene menor valor que el de la respectiva casilla inferior, ¿qué hay que hacer? (49 bis y 50).

#### § 3

51. P.- Ante todo, para facilitaros el aprender de memoria la «*Tabla de sustracción*», conviene recordar la Observación puesta en seguida de la «*Tabla de adición*», con las siguientes diferencias:

*Primera:* que, en la Tabla de adición estaba en último lugar la columna de las *sumas*, y que, en la sustracción, esa misma columna se halla en primer lugar.

*Segunda:* que la Tabla de adición contiene, en la tercera columna, las cantidades que deben ser *adicionadas*; mientras que, en la Tabla de sustracción, esas mismas cantidades figuran también en la tercera columna, pero para ser *sustraídas*.

#### § 4

52. Los signos que emplea la sustracción, son los que se ven aquí en seguida:

— =

El primero, -, quiere decir *menos*; y ya dijimos, al tratar de la Adición, que el signo = significa *igual*.

Así, por ejemplo, la expresión común «*dos menos uno es uno*», se escribe en lenguaje aritmético dos — uno = uno.

#### OTRO EJEMPLO

«De cinco quito dos, quedan tres» (estilo común).  
cinco — dos = tres (estilo aritmético).

#### ADVERTENCIA

53. Cuando de un valor cualquiera se sustrae otros valor igual, el resultado se expresa con la palabra *cero*.

#### EJEMPLO

«Nueve *menos* nueve, es *cero*»  
o bien,  
«De nueve *quito* nueve, *no queda nada*»;  
nueve — nueve = *cero* } estilo  
(estilo aritmético)

#### OTRO EJEMPLO

«cero *menos* cero, es *cero*»  
«De cero *quito* cero, *nada queda*» } *estilo común*.  
cero — cero = *cero* } (estilo aritmético).

54. Prosiguiendo ahora la lección anterior, que dejamos interrumpida, debo empezar por decir: que las nociones que os dí acerca de la *Sustracción* son importantes, pero que no sirven... Son *importantes*, como razonamiento, como enseñanza para que el aprendiz comprenda mejor lo que se hace en la práctica; y *no sirven*, porque en la práctica se procede de dos modos, muy distintos del que insinué, y que voy á explicarlos sucesivamente.

Conviene advertir, desde luego, que en ambos modos se conservan las dos partidas de cargo y descargo, tales como se hallan apuntadas; y eso, por varias razones, siendo la principal la de que, en los libros de cuentas, las cantidades son inamovibles y que, por consiguiente, no se puede trasladar materialmente, como lo hemos hecho en el Armario, ninguna unidad de una casilla á otra. Por esta razón las traslaciones se hacen en la imaginación solamente, lo mismo que las sustracciones.

#### PRIMER MODO PRÁCTICO

##### § 5

55. Para entendernos más fácilmente, traigamos á consideración el segundo ejemplo propuesto en la sesión anterior, esto es:

Cargo contra Pablo.....  
 Descargo á favor de Pablo.....

c	d	U
seis cuatro	cinco seis	tres
una	ocho	siete

Así las cosas, digo:

«De *nada* quito tres, no puede ser; tomo, en la imaginación, *una* de las *cinco* decenas del cargo, y tengo *diez* unidades»; entonces digo: «*de diez quito tres, quedan siete, que las anoto en las unidades de la resta*». Pasando al orden de las decenas y recordando que las cinco del cargo quedaron en cuatro (por haber pasado *una* á la casilla de unidades), digo: «*de cuatro quito seis, no puede ser: tomo una centena del cargo*» (que la traslado mentalmente á la de decenas), «*la cual, con las cuatro existentes, hace catorce decenas; de ellas quito seis, quedan ocho, que las pongo en la resta.*» Pasando al rango de centenas, digo: - «*de cinco* (teniendo en cuenta la centena que pasó á la casilla de decenas) *quito cuatro, queda una, que la pongo en el correspondiente lugar de la resta*».

Terminada ahí la sustracción, se ve que da el mismo resultado que obtuvimos en el art. 49 bis, es decir: *una centena, ocho decenas, siete unidades= ciento ochenta y siete pesos*; siendo de notar que este modo de obrar ofrece la ventaja de que se conservan las partidas de cargo y descargo para cualquier caso de olvido ó equivocación.

##### § 6

#### SEGUNDO MODO PRÁCTICO

56. En éste, que es el más comúnmente usado, se procede como en el anterior, con esta esencial diferencia: que en vez de *disminuir* una en la casilla del cargo, por habérsela pasado á la casilla de la derecha, se *aumenta* una (mentalmente) á la correspondiente casilla del descargo. Por ejemplo: á la correspondiente casilla del descargo. Por ejemplo: en vez de disminuir *una* de las *cinco* decenas del cargo, se aumenta *una* á la casilla del descargo. Pero, antes de pasar adelante, conviene que os penetréis de la siguiente verdad:

57. *Puede aumentarse* una unidad al valor de cualquiera casilla del cargo, con tal de que al mismo tiempo se aumenta *otra* unidad á la correspondiente casilla del descargo, pues que entre ambas forman una especie de balanza. En efecto: si en una balanza hay, por ejemplo, *cinco* onzas en uno de sus platillos, y *tres* onzas en el otro platillo, la balanza quedará

inclinada al lado de las cinco, tanto cuanto va de cinco á tres onzas, es decir, con una desigualdad correspondiente á *dos* onzas. Si agregamos á cada lado de la balanza *una* onza, la desigualdad será la misma; pues habiendo en uno de los platillos *seis* onzas y en el otro *cuatro*, la diferencia seguirá siendo de *dos* onzas. Si aún quisiéramos agregar *una* onza más á cada uno de los platillos, en nada se alteraría la diferencia; porque de *siete* á *cinco* habría la misma desigualdad que existía desde un principio. (\*)

La demostración que acaba de hacerse, autoriza á establecer la siguiente

#### REGLA

58. Para efectuar una sustracción se puede aumentar al cargo, en cualquiera de sus órdenes, una unidad cuando fuese necesario, con tal de que se aumente otra unidad al descargo, en el orden correspondiente. (\*\*)

Eso entendido, he aquí cómo se hace la sustracción, del *segundo modo* práctico.

Sea el mismo ejemplo propuesto en el art. 49 bis:

"De cero (digo) *quito tres, no puede ser; tomo una decena prestada*», y digo: «*de diez unidades quito tres, quedan siete, que las pongo, y llevo una decena.*»

Pasando á las decenas, digo: «*una que he traído y seis (que existen en las decenas del descargo), son siete; siete de quince, quedan ocho, que las pongo, y llevo una.*»

En el rango de las centenas, digo: «*una que he traído y cuatro, son cinco; cinco, de seis queda una, que la pongo.*»

Vemos, en definitiva, que este segundo modo nos dá, como debía ser, el mismo resultado que el anterior < || > página 3, Ap.

J.- ¿Por qué y para qué se dice «*llevo una*»?

P.- Me complace la pregunta, José; porque, de ordinario, sucede que los niños aprenden esta expresión sin comprender su importancia. Voy, pues, á explicarla volviendo á nuestro ejemplo.

59. Estando vacía la casilla de unidades del cargo, tuve necesidad de tomar prestada *una decena* del mismo, para trasladarla á la casilla de unidades, lo cual importaba aumentar esta última casilla con el valor de una decena. Para no alterar la diferencia existente entre el cargo y el descargo, debía yo aumentar también una decena á la casilla correspondiente del descargo, según lo demostrado en el arto 57.

Pero, si así lo hubiese hecho, lejos de facilitar la sustracción, la habría embrollado, pues hubiera tenido que decir: «de diez quito trece, no puede ser». A fin de obviar tal inconveniente, reservé en la memoria la decena que debía aumentarse á la casilla de unidades del descargo, y me limité á quitar *tres* unidades de las *diez* venidas al cargo.

60. Bien; pasando á la columna de las decenas, es de notar que las cinco .decenas que se ven en el cargo debían quedar reducidas á *cuatro*, en razón del préstamo hecho á la casilla de las unidades. He querido, sin embargo, considerarlas como *cinco* decenas, porque así conviene á mi propósito.

-----  
(\*) Esta demostración puede hacerse de un modo palpable en el Armario.

(\*\*) Al tratar de la operación de *dividir*, veremos que hay casos en que se hace necesario suplir al cargo *dos, tres, cuatro...* hasta *nueve* unidades, de tal ó cual orden.



Es de advertir que, por este hecho, *he aumentado* una decena á la casilla de decenas del cargo, lo cual exige que yo aumente también una decena al descargo; pero ¿de dónde sale esta última decena? Esta es, pues, la misma que, al principio, debió ser colocada en la casilla de unidades del descargo, y que la retuve en la memoria, contentándome con haber dicho «y llevo una», con ánimo de colocarla aquí (*mostrando la casilla de decenas del descargo*).

Al decir ahora: «una que traigo y seis son siete», queda compensado el aumento hecho arriba, pues que considero como siete las decenas del descargo, siendo así que sólo son seis.

61. He ahí, en resumen, el por qué y para qué de la expresión «y llevo una».

## § 7

P.- Reanudando ahora la Lección, falta que demos nombre á cada uno de los elementos ó cantidades que figuran en la sustracción.

62. A la primera la llaman comúnmente Cargo. Los comerciantes la llaman *Haber*. Nosotros., que somos cursantes de Aritmética, nos permitiremos llamarla *Restando*.

A la segunda le dan generalmente el nombre de *Data*, los comerciantes *Debe*; y nosotros le daremos el de *Restador*, con autorización de la Academia española.

La tercera, como que es la más solicitada, tiene más nombres: *Resto*, *Exceso*, *Diferencia*, *Saldo* (entre comerciantes). Nosotros daremos la preferencia á la penúltima denominación.

63. La *prueba* de la sustracción se hace por medio de la adición, es decir, que se agrega á la diferencia el *restador*; y si la operación ha sido bien hecha, debe obtenerse el *restando*. En efecto, la diferencia no es sino *lo que falta* al restador para ser igual al restando.

64. La sustracción puede servir de prueba á la adición, como habremos de verlo más tarde (art. 160 bis). (\*)

## PROBLEMAS

*Para José.* Un comerciante debe á un banquero mil setecientos sesenta y ocho pesos; á cuenta de esta suma le ha pagado *ochocientos treinta y nueve*. ¿Cuánto le debe todavía?

*Para Rosalía.* Cierta persona nació en el año mil ochocientos dieciocho, y ha muerto en mil ochocientos setenta. ¿Cuántos años ha vivido?

*Para Manuel.* Habiéndose pesado un cajón de mercaderías, se ha visto que alcanza á *cuatrocientas quince* libras; pero se ve también que el peso de los efectos sólo es de *trescientas noventa y ocho* libras. Se pregunta: ¿cuál debe ser el peso del cajón?

## CUESTIONARIO

¿Cuáles son los signos que emplea la sustracción? (52).- Cuando de un valor cualquiera se sustrae otro valor igual, ¿con qué palabra se expresa el resultado? (58).- ¿Cuántos modos prácticos hay de efectuar la sustracción? (54).- ¿Cómo se hace en el primero? (55). - ¿Cómo se hace en el segundo? (56).- ¿A qué condición puede aumentarse el cargo, con una ó más unidades, en cualquiera de sus órdenes? (57 y 58).- ¿Por qué razón y con qué objeto se usa la expresión llevo una? (60 y 61).- ¿Qué nombres da usted á las tres cantidades que figuran en la sustracción? (62).- ¿Cómo se hace la prueba de la sustracción? (63).- ¿Qué es restando? - ¿Qué es restador? - ¿Qué es diferencia? - ¿Qué es sustracción?

(\*) *Souvenir.* Entre los objetos contenidos en el Armario debe haber una tablita propia para cubrir el restando mientras se efectúa la prueba.

## PROGRAMA PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

*Primera parte.*- Solución de los tres problemas pendientes.

*Segunda parte.*- Prueba de la solución de los tres problemas, con arreglo al artículo 63.

*Tercera parte.*- Respuestas al Cuestionario precedente, en el concepto de que las cuatro últimas definiciones han de darse por los niños (nombrados de antemano), según su modo de entender, salvas las correcciones que tuviere á bien hacer el preceptor. < 12 > pág. 3, Ap.

-----  
CONFERENCIA

(Aquí la ejecución del Programa formulado al fin de la Octava Lección),

M.- Tocante á la Tabla de adición, hay una explicación ó regla para poder continuar sumando de *dieciocho* para arriba, y no nos has dicho cómo haremos para restar de una cantidad que pase de *dieciocho*.

P.- Tu reparo es muy racional, Manuel; pero debo decirte que, para lo que es la operación mecánica, por decirlo así, de restar, no hay para qué inquietarse de la falta que has notado, como vas á convencerte.

65. En efecto; fijándose en los tres ejemplos contenidos en la primera parte de la Lección Octava, se comprende fácilmente que el valor máximo de una casilla del cargo no puede pasar de dieciocho, como lo demuestra el siguiente

Haciendo, pues, la sustracción de las dos unidades simples, las *nueve* decenas del cargo, quedan reducidas á ocho; es decir, procediéndose con arreglo al *Primer modo* práctico de restar (art. 55), que es el más natural; pues, si bien el *Segundo modo* ( art. 56) es más conveniente, no por eso deja de ser un tanto artificial.

EJEMPLO:

Cargo.....	una	Nueve	Cero
Descargo...		Nueve	dos
Resto.....		Nueve	ocho

Restando, en seguida, las nueve decenas del descargo, hay que decir: «de *dieciocho* quito nueve, quedan nueve».

Mas, suponiendo que el cargo fuese *ciento noventa* y nueve y el descargo *noventa* y *nueve*, entonces, al hacer la sustracción en la columna de las unidades, no habría para qué tomar prestada una decena, porque la sustracción podría hacerse llanamente. Pasándose á la columna de las decenas, el *nueve* del cargo tendría, es verdad, el valor de *nueve*; pero él bastaría por sí solo para responder al descargo y, por consiguiente, no podría convertirse en *diecinueve*.

Síguese de ahí que, aun en el caso arriba propuesto (que sería el más apurado que pudiese ocurrir), la cuestión se hallará comprendida en la Tabla; y que, por consiguiente, no hay necesidad de restar de dieciocho para arriba; salvo el procedimiento empleado por la División, como lo veréis á su tiempo.

Entre tanto, conviene hacer aquí una

#### OBSERVACIÓN:

En rigor, podíamos habernos dispensado de la Tabla de sustracción, supliéndola con la de la adición, y empleando al efecto un poquito de maña.

He aquí cómo: tomando (por ejemplo, en la Sección M) las columnas *quinta* y *tercera*, podíamos decir «*quince* menos *nueve*», y el resultado *seis* lo encontraríamos en la misma línea horizontal, al extremo izquierdo; y así en todas las demás combinaciones.

R.- Dínos, papá: ¿para qué ha sido, entonces, damos la tarea de estudiar dos Tablas en vez de una sola?

P.- ¡Lástima es, hija mía, que las niñas no puedan dedicarse entre nosotros á la profesión del foro, pues discurre como un abogado! si bien es verdad que hay abogados que están siempre en riña con la verdad y la razón.

Os he dado la tarea de aprender las dos Tablas, para que, con tal motivo, conozcáis los términos técnicos que usan la Adición y la Sustracción; y también para que veáis, por vuestros propios ojos, teniendo las dos Tablas á la vista, que aquellas señoras, aunque hermanas gemelas, son esencialmente antagonistas, como os lo anuncié al principio de la Octava Lección. Agrego ahora: que el oficio de la Sustracción se reduce á deshacer lo que hizo la Adición, empezando por donde ésta terminó, como lo atestiguan ambas Tablas.

-----

### NOVENA LECCIÓN

#### De la Multiplicación de números enteros

##### § 1

P.- Hijos míos: habéis atravesado ya las áridas regiones de la Adición y de la Sustracción, y os felicito de hallaros actualmente en el territorio de la Multiplicación.

La *Multiplicación*, hija legítima de la Adición, tiene el mismo carácter de ésta, quiero decir, que propende siempre á aumentar el valor de la cantidad ó cantidades que están bajo su influencia; pero, á diferencia de la madre, que, como señora de edad, camina muy lentamente, la Multiplicación, joven todavía y excesivamente viva, va siempre á toda prisa, abreviando el camino y salvando obstáculos que da gusto; tanto es, que hay operaciones para las cuales la Adición necesitaría horas enteras, mientras que la Multiplicación las efectúa en un abrir y cerrar de ojos. Mas, para tratar con ella, habéis de aprender, de pronto, á serviros de la Tabla de Multiplicación que voy á daros. Oportunamente os haré algunas indicaciones para facilitar el retenerla en la memoria.

Uno <i>por uno es</i> ..... uno	Cinco <i>por uno son</i> ..... cinco
» » dos » ..... dos	» » dos » ..... diez
» » tres » ..... tres	» » tres » ..... quince
» » cuatro » ..... cuatro	» » cuatro » ..... veinte
» » cinco » ..... cinco	» » cinco » ..... veinticinco
» » seis » ..... seis	» » seis » ..... treinta
» » siete » ..... siete	» » siete » ..... treinta y cinco
» » ocho » ..... ocho	» » ocho » ..... cuarenta
» » nueve » ..... nueve	» » nueve » ..... cuarenta y cinco
Dos <i>por uno son</i> ..... dos	Seis <i>por uno son</i> ..... seis
» » dos » ..... cuatro	» » dos » ..... doce
» » tres » ..... seis	» » tres » ..... dieciocho
» » cuatro » ..... ocho	» » cuatro » ..... veinticuatro
» » cinco » ..... diez	» » cinco » ..... treinta
» » seis » ..... doce	» » seis » ..... treinta y seis
» » siete » ..... catorce	» » siete » ..... cuarenta y dos
» » ocho » ..... dieciséis	» » ocho » ..... cuarenta y ocho
» » nueve » ..... dieciocho	» » nueve » ..... cincuenta y cuatro
Tres <i>por uno son</i> ..... tres	Siete <i>por uno son</i> ..... siete
» » dos » ..... seis	» » dos » ..... catorce
» » tres » ..... nueve	» » tres » ..... veintiuno
» » cuatro » ..... doce	» » cuatro » ..... veintiocho
» » cinco » ..... quince	» » cinco » ..... treinta y cinco
» » seis » ..... dieciocho	» » seis » ..... cuarenta y dos
» » siete » ..... veintiuno	» » siete » ..... cuarenta y nueve
» » ocho » ..... veinticuatro	» » ocho » ..... cincuenta y seis
» » nueve » ..... veintisiete	» » nueve » ..... sesenta y tres
Cuatro <i>por uno son</i> ..... cuatro	Ocho <i>por uno son</i> ..... ocho
» » dos » ..... ocho	» » dos » ..... dieciséis
» » tres » ..... doce	» » tres » ..... veinticuatro
» » cuatro » ..... dieciséis	» » cuatro » ..... treinta y dos
» » cinco » ..... veinte	» » cinco » ..... cuarenta
» » seis » ..... veinticuatro	» » seis » ..... cuarenta y ocho
» » siete » ..... veintiocho	» » siete » ..... cincuenta y seis
» » ocho » ..... treinta y dos	» » ocho » ..... sesenta y cuatro
» » nueve » ..... treinta y seis	» » nueve » ..... setenta y dos
Nueve <i>por uno son</i> ..... nueve	Cero <i>por uno es</i> ..... cero
» » dos » ..... dieciocho	» » dos » ..... cero
» » tres » ..... veintisiete	» » tres » ..... cero
» » cuatro » ..... treinta y seis	» » cuatro » ..... cero
» » cinco » ..... cuarenta y cinco	» » cinco » ..... cero
» » seis » ..... cincuenta y cuatro	» » seis » ..... cero
» » siete » ..... sesenta y tres	» » siete » ..... cero
» » ocho » ..... setenta y dos	» » ocho » ..... cero
» » nueve » ..... ochenta y uno	» » nueve » ..... cero

NOTA. — En lugar de decir (por ejemplo) *uno por dos*, dicen algunos, *dos veces uno*, cambiando el orden de los números. Esto se explicará detenidamente más adelante.

R.- ¿Cómo se ha formado la Tabla de Multiplicación?

67. P.- Tomando el número *uno* una vez, se ha tenido por producto el mismo número *uno*.

Tomando el número *uno* dos veces, ó lo que es lo mismo, agregando á *uno* otro *uno*, se ha obtenido el producto *dos*:

Agregando á este resultado otro *uno*, ó tomando el número *uno* tres veces, se ha formado el producto *tres*.

Continuando así, se ha obtenido sucesivamente el producto de *uno* por cada uno de los nueve primeros números, llamados *dígitos*, con alusión á los dedos de las manos, porque ellos se emplean ordinariamente para expresar esos, primeros números.

Asimismo, tomando el número *dos* una vez, se ha obtenido como producto el mismo *dos*; agregando á *dos* otros *dos* (lo cual es lo mismo que tomar dos veces el número *dos*), se ha obtenido el resultado *cuatro*.

Agregando otros *dos* á este resultado (que es lo mismo que tomar *tres* veces el número *dos*), se ha obtenido *seis*...

En fin, operando del mismo modo sobre los números *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, se ha llegado á formar el cuadro que contiene todos los productos de los nueve primeros números de la numeración.

En cuanto al *cero*, como él sólo sirve para señalar las casillas vacías y que, por sí nada vale, según lo explicaremos más tarde, es claro que, tomado una vez, dará como producto *cero*, *nada*; tomado dos veces, dará también *cero*; y así sucesivamente hasta el infinito.

J.- Yo quisiera ver, papá, un ejemplo de la Multiplicación.

P.- Tienes razón, Pepe, porque, así en lo científico como en lo moral; nada enseña mejor que el ejemplo. He aquí uno:

#### EJEMPLO

68. Teniendo el año *trescientos sesenta y cinco* días, se quiere saber cuántos días hay en un lustro, que es el lapso de tiempo transcurrido en cinco años (1).

69. Si encomendásemos este cálculo á la Adición, ella arreglaría las cosas á su modo, como voy yo á hacerlo en el Armario, bajo sus prescripciones [  ]; y satisfaría á la pregunta presentando la

U	c	d	u
	tres	seis	cinco
	tres	seis	cinco
	tres	seis	cinco
	tres	seis	cinco
	tres	seis	cinco
uno	ocho	dos	cinco

suma

Consultando ahora el mismo caso con la multiplicación, he aquí lo que ella dice:

(1) Hacemos prescindencia del día de más que tiene el año bisiesto.

70. «En el rango de unidades se ve el número *cinco* re-  
 «petido *cinco veces*; en el de decenas, el número *seis* re-  
 «petido otras tantas veces, lo mismo que el número *tres*,  
 «en el rango de centenas; de modo que la proposición se  
 «reduce á multiplicar *trescientos sesenta y cinco* por *cinco*»  
 lo cual, en el Armario, se traduce así:

	U	c	d	u	
Multiplicando.....		tres	seis	cinco	<i>días</i>
Multiplicador.....				cinco	<i>veces</i>
	v	s	n	m	
	una	ocho	dos	cinco	

Continúa la Multiplicación diciendo: «*cinco* por *cinco* son *veinticinco*; pongo *cinco* (casilla m), y llevo *dos*; *seis* por *cinco* son *treinta*, y *dos* que llevo son *treinta y dos*; pongo *dos* (casillas n), y llevo *tres*; *tres* por *cinco* son *quince*, y tres que llevo son *dieciocho*; pongo *ocho* (casilla s), y llevo *una*, que la pongo» (casilla v).

« He terminado dice (la Multiplicación)

R.- Papá, y ¿cómo se llama el resultado de la Multiplicación?

71.- Producto, hija mía; pero vamos con

#### OTRO EJEMPLO

72. Se pregunta ¿cuántos días hay en *quince* años, sin tenerse en cuenta el día excedente de los años bisiestos?

Eso, en lenguaje aritmético, se traduce así:

Trescientos sesenta y cinco x quince.

73. El signo X, equivalente de *multiplicado* por, quiere decir que la cantidad que antecede, llamada multiplicando), debe ser reproducida *tantas veces* cuantas unidades contiene la cantidad que le sigue, llamada *multiplicador*.

Ahora bien, la Tabla de multiplicación no nos hace saber sino las combinaciones de los nueve primeros números entre sí; pero no nos dice cuál sea el producto de una cantidad repetida más de *nueve veces*.

74. Si en tal aprieto recurriésemos á la Adición, ella, u procediendo con su acostumbrada calma, pero cautelosa como es, se expediría del siguiente modo:

Tomando al pie de la letra el significado del signo de multiplicación, reproduciría el multiplicando quince veces, como se vé en la figura A B C D que sigue, y que, para mayor claridad, la traslado al Armario [  ].

Siendo muchos los sumandos, los dividiría en dos secciones, de las cuales la primera contendría cinco sumandos, y la segunda diez.

Así colocados en el Armario todos los sumandos, la Adición haría la suma de la primera sección, y obtendría el siguiente resultado:

A	U	c	d	u	B
		tres	seis	cinco	PRIMERA SECCIÓN
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		tres	seis	cinco	SEGUNDA SECCIÓN
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
		»	»	»	
D					C
....	una	ocho	dos	cinco	
....	tres	seis	cinco	cinco	
....	cinco	cuatro	siete	cinco	

Suma.....  
 En seguida, adicionalmente la Suma.....  
 segunda sección, tendría por Suma.....  
 Por último, teniendo ambas Sumas, tendría por..... Total .....

Ese Total quiere decir: que, en *quince* años, hay cinco mil *cuatro* cientos *setenta* y *cinco* días.

P.- Ya veis, hijos míos, que la operación es larga y penosa de hacerse; y ¿cuál no sería si se tratase, por ejemplo, de saber cuántos días han transcurrido desde la venida de Jesucristo hasta el presente? Tal pregunta ocasionaría un ímprobo trabajo, si se propusiese uno operar conforme á las reglas de la Adición.

Más dejando á un lado esa enfadosa operación, veamos cómo resuelve la Multiplicación el segundo Ejemplo poco ha propuesto:

	u	c	d	u
Multiplicando.....	....	tres	seis	cinco
Multiplicador.....	....	.....	uno	cinco

## § 2

Mas, antes de pasar adelante, es indispensable hacer aquí tres—

ADVERTENCIAS

75. *Primera.*- El *multiplicando* ha sido considerado generalmente como un número *concreto*, es decir, que representa objetos de una misma especie, pero reales, que afectan á los sentidos, por decirlo así; mientras que al *multiplicador* se le ha considerado como número *abstracto*) que existe en la imaginación solamente, y cuyo único oficio es el de indicar *cuantas veces* debe reproducirse el multiplicando.

Síguese de ahí que el *producto* de la multiplicación ha de ser de la misma especie que el multiplicando, ni más ni menos que la *suma lo* es respecto de los sumandos.

76. *Segunda.*- El multiplicador, aunque *abstracto*, ha sido clasificado, lo mismo que los números *concretos*, en unidades, decenas, centenas (simples), unidades, decenas, centenas (de mil), etc.

77. *Tercera.*- Cuando el multiplicando debe reproducirse más de *nueve veces*, la Multiplicación, como hija de la Adición, divide su trabajo, calculando primero el producto del multiplicando por las *unidades simples*, contenidas en el multiplicador; en seguida, el producto de dicho multiplicando *por las decenas* del multiplicador, etc.

Esto sentado, veamos cómo procede la Multiplicación para haber de resolver nuestra cuestión pendiente. Al efecto fijemos la vista en lo que teníamos preparado en el .Armario, á saber:

Multiplicando .....  
 Multiplicador .....

u	c	d	u
..... .....	Tres .....	seis uno	cinco cinco
l v tres	e ocho n seis	b dos m cinco	a cinco
cinco	cuatro	siete	cinco

78. La Multiplicación, contrayéndose primero á formar el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador, dice:

«*cinco veces cinco son veinticinco*; pongo *cinco* (en la casilla *a* (\*)) y se llevo *dos*: *cinco veces seis* son

*Treinta*, y *dos* que llevo son *treinta y dos*; pongo *dos* (casilla *b*), y llevo tres: *cinco veces tres* son *quince*, y *tres* que llevo son *dieciocho*, pongo *ocho* (en la casilla *e*) y llevo *una*, que la pongo (en la casilla *i*».

De este modo, ha obtenido ella, como primer producto parcial, *una* unidad de mil, *ocho* centenas, *dos* decenas y *cinco* unidades simples.

Luego, pasando á ocuparse en formar el producto de la decena del multiplicador, dice la Multiplicación:

"*Una vez cinco es cinco*, que lo pongo en la casilla *m*, y nada llevo: *una vez seis es seis*, que lo pongo en la casilla *n*, y no llevo nada: *una vez tres es tres*, que lo pongo en la casilla *v*».

Obteniendo así, como segundo producto —parcial, *tres* unidades de mil, *seis* centenas y *cinco* decenas, hace en seguida la *suma* de los dos productos parciales, y concluye diciendo:

«La fórmula trescientos sesenta y cinco X quince,

da este resultado:

«Producto = *cinco* mil *cuatro* cientos *setenta y cinco*».

(\*) Toca al Preceptor ir anotando en el Armario las operaciones de la Multiplicación, al paso que ésta las vaya expresando.



## CUESTIONARIO

¿Cómo se ha formado la Tabla de Multiplicación? (67).- ¿Cómo procederla la adición para obtener el mismo resultado que la Multiplicación? (69 y 74).- Y ¿cómo procederla la Multiplicación? (70 y 78 ).- ¿Cómo se llama el resultado de la Multiplicación? (71 ). - ¿Cual es el signo equivalente de multiplicado por? (73).- ¿Qué se entiende por número concreto, y qué por número abstracto? (75).- Cuando el multiplicando debe reproducirse más de nueve veces, ¿cómo divide su trabajo la Multiplicación? (77).

-----

## DÉCIMA LECCIÓN

### (Continúa la Multiplicación)

#### § 1

Ya visteis, hijos míos, en la sesión anterior, cómo puede uno aprovechar de la Tabla de Multiplicación para obtener el producto de una cantidad cualquiera, que haya de reproducirse más de *nueve veces*.

Al presente, voy á aclarar y poner en transparencia el gran secreto de la Multiplicación, en que parece que entrase por mucho el arte de escamotear.

Escuchad bien.

Ante todo, preciso es que os diga (en reserva): que la *Multiplicación* tiene el aire de una loquilla; que su estilo es muy conciso; que suprime muchas expresiones (como quien dice: «*al buen entendedor pocas palabras*»); cambia súbitamente el *género* gramatical, haciendo masculino ó femenino á un mismo sujeto; tal que su lenguaje parece que pecase de incorrecto; pero ella sabe lo que se hace y se dice, como lo veremos poco á poco.

#### § 2.

### OBSERVACIONES

79. *Primera*.- La Multiplicación ha dividido su trabajo en dos partes ó secciones, contrayéndose primero á presentar el producto del multiplicando, tan sólo por las *unidades simples* que contiene el multiplicador. En esta primera parte nada hay de particular, y, pasándola por alto, veamos lo que ha ocurrido en la segunda parte, esto es, al buscar el producto del multiplicando *por la decena* del multiplicador. Al efectuar esta operación, se ha contentado ella con decir: «*una vez cinco, es cinco, pongo cinco*»; y, sin más, así lo ha dicho y hecho.

80. Más, he aquí cómo deben interpretarse sus palabras: Los nueve primeros números de la Numeración tienen dos; valores; el uno *relativo*, según el *rango* á que pertenezcan, y el otro *absoluto*, cuando se prescinde del rango. Así, el número *dos*, por ejemplo, si está colocado en la casilla *u*, y se fija uno en su rango y jerarquía, vale por *dos* unidades simples; si se halla en la casilla *d*, vale por *veinte* unidades; si en la casilla *c*, por *doscientas* unidades, etc.; mientras que, no teniéndose en cuenta el lugar que ocupa, será *dos* y siempre *dos* por su nombre de bautismo, si puedo explicarme así. Ahora bien: la Multiplicación, considerando solamente el valor absoluto de los números que ha tenido á la vista, en vez de decir una decena de veces (ó diez veces) cinco unidades simples, se ha contentado con decir: «*una vez cinco es cinco, pongo cinco*».

Por mi parte, como intérprete de la Multiplicación, debo agregar que el error aparente que ha cometido de palabra, queda corregido de obra, con el hecho de haber puesto el producto de «*una vez cinco*» en la casilla de decenas, pues que allí importa  *cincuenta* unidades, ó sean CINCO DECENAS.

Igual explicación cabe tocante á la multiplicación de las seis decenas del multiplicando por la una decena del multiplicador, esto es, que la Multiplicación, en vez de decir: una decena de veces (ó diez veces) seis decenas, hacen sesenta decenas, que forman SEIS CENTENAS; se ha contentado con decir: «una vez seis, es seis y *pongo* seis" (en la casilla de centenas).

Lo mismo al multiplicar las tres centenas del multiplicando por la decena del multiplicador, en vez de decir: una decena de veces tres centenas, hacen treinta centenas (ó, lo que es lo mismo, TRES MIL), ha dicho simplemente: «*una vez tres es tres, pongo TRES*" (en la casilla de mil) . De la anterior observación: fluyen las siguientes

#### REGLAS:

81. *Primera.*- La multiplicación de una ó más *unidades simples* del multiplicando, por una ó más *unidades simples* del multiplicador, da por producto unidades simples, *verbi gracia*: « cinco veces *cinco* (días) son VEINTICINCO» (días).

82. *Segunda.*- La multiplicación de una ó más decenas del multiplicando por una ó más unidades simples del multiplicador, da necesariamente por resultado *decenas*) v. g.: «cinco veces *seis* (sobren tendiéndose SEIS *decenas* de días), son TREINTA» (decenas de días).

83. *Tercera.*- La multiplicación de una ó más centenas del multiplicando por una ó más unidades simples del) multiplicador, da por resultado *centenas*, v. g.: «cinco veces *tres* (centenas de días) son QUINCE» (centenas de días).

84. *Cuarta.*- La multiplicación de una ó más *unidades* del multiplicando por una ó más *decenas* del multiplicador, da necesariamente por resultado *decenas*) v. g.: «*una vez* (sobrentendiéndose *una decena de veces*) *cinco* (días), son CINCO» (sobrentendiéndose *cinco decenas* de días)», *etc.*

85. *Quinta.*- En fin: las decenas, multiplicadas por decenas, dan *centenas*; las centenas, por decenas, dan *miles*; *etc.* Las unidades simples por centenas dan *centenas*; las decenas por centenas dan *miles*; las centenas por centenas dan *decenas de mil*, *etc.*

#### *Segunda observación:*

86. Si comparamos lo que la Adición ha hecho para dar solución á nuestro último ejemplo (véase el primer cuadro de dicho ejemplo) con lo que ha hecho la Multiplicación para el mismo efecto (último cuadro), veremos: que la primera ha presentado *dos sumas* (parciales) y un TOTAL, que son exactamente iguales á los dos *productos parciales* y *Producto general* presentados por la Multiplicación. Sólo sí, que el procedimiento de la segunda ha sido mucho más rápido y compendioso: y hé ahí por qué se dice que

*La Multiplicación es una especie de adición abreviada.*

#### CONCLUSIÓN

##### § 3.

De todo lo dicho podemos deducir esta definición:

87. La *Multiplicación* es una operación que tiene por objeto reproducir un número dado, llamado *Multiplicando*, tantas veces cuantas indica otro número, también dado, llamado *Multiplicador*, y obtener así el número que exprese el resultado.

Ese resultado se llama *producto*; y, como el multiplicando y el multiplicador concurren juntamente á la formación ó *facción* del producto, se llaman también los FACTORES *del producto*.

##### § 4.

88. *Preguntas á que deben contestar José, Rosalía y Manuel, en la próxima conferencia:*

¿Qué es *multiplicando*?  
 ¿Qué es *multiplicador*?  
 ¿Qué es *producto*?

CUESTIONARIO

¿Por qué razón, al multiplicar las decenas, centenas, etc., por decenas, centenas, etc.; se emplean las mismas palabras que para multiplicar unidades simples? (80).- ¿Qué producto dan las unidades simples del multiplicando, multiplicadas por una ó más unidades simples del multiplicador? (81).- ¿Qué dan las decena multiplicadas por una ó más unidades simples? (82).- ¿Qué resultado dan las centenas multiplicadas por unidades simples? (83).- Y ¿qué dan las unidades simples multiplicadas por decenas, etc.? (84).- ¿Cuál es el producto de las decenas multiplicadas por decenas, de las centenas por decenas, etc.; y cuál el de las unidades simples por centenas, el de las decenas por centenas, etc.? (85).- ¿Por qué se dice que la multiplicación es una adición abreviada? (86).- ¿Qué es multiplicación? (87).- ¿Qué es multiplicando? (1).- ¿Qué es multiplicador? (1) - ¿Qué es producto? (1) - ¿Qué denominación se da al *multiplicando* y al *multiplicador*, considerados conjuntamente? (87).

UNDÉCIMA LECCIÓN

(Continúa la Multiplicación)

§ 1.

89. P.- Hijos míos: voy á ocupar ahora vuestra atención sobre una de las propiedades más notables de la Multiplicación, y que consiste en permitirle á uno invertir el orden de los factores, es decir, colocar el multiplicando en lugar del multiplicador, y viceversa, con la seguridad de que el producto será igual al que se habría obtenido si el multiplicando y el multiplicador hubiesen estado colocados en su lugar respectivo.

90. Sea por ejemplo: *tres X cinco*, es igual á *cinco X tres*. Para fijar mejor las ideas, supongamos que, habiéndose presentado cinco niños, se quiere dar tres naranjas á cada uno de ellos, y se desea saber cuántas naranjas se necesitan.

Como en el caso que acaba de suponerse, son las tres naranjas las que han de reproducirse, tomo tres hormillas (que representan tres naranjas) y las pongo como multiplicando en una línea horizontal.....

En seguida, trazo verticalmente otra línea *b c*, en que establezco cinco puntos, para expresar que el multiplicando debe reproducirse *cinco* veces, por ser éste el número de los niños.

En este estado, á fin de saber cuál habrá de ser el producto) recurro á la Multiplicación. Ella, en vista del trazo *a b c*, dice: «*cinco veces tres*»

A este mandato, se hace súbitamente .la reproducción en esta forma:

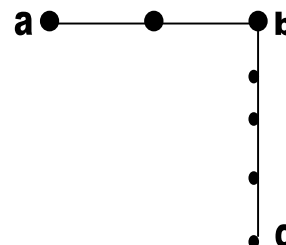
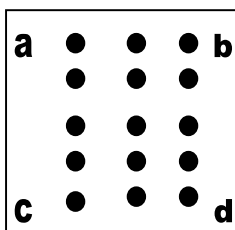


FIGURA A

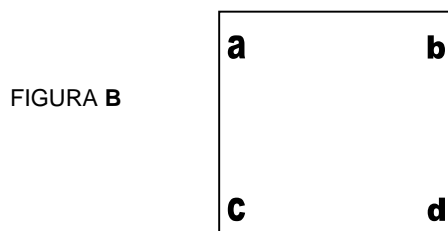


91. Viene en seguida su *auxiliar*) la *Tabla de Multiplicación*, quien (haciendo las veces de la *Tabla de Adición*), en un abrir y cerrar de ojos, recoge todos los objetos contenidos en la figura *a b c d*, os deposita al pie de la línea *d c* y (dejando vacía la figura) contesta á nombre

(1) Estése á lo prevenido en el artículo 88.



de su mandante (la Multiplicación): que el producto es *quince* (sobrentendiéndose *naranjas*) en el presente caso). De esta suerte la figura A queda trasformada en esta otra:



Producto = quince

### § 2.

92. Busquemos ahora el producto de la multiplicación de *cinco* X *tres* (segunda parte de lo enunciado al principio del artículo 90).

Para ello bastará cambiar la posición de la Figura A, de modo que el costado *b c* quede horizontal, hacia arriba, y el costado *c d* (igual al costado *a b*, verticalmente colocado al extremo derecho, y hacer en seguida este raciocinio:

Según aparece ahora la figura, las cinco naranjas del costado *b c* son las que se han reproducido y, consiguientemente, se puede tomar este costado como multiplicando. Se ve, por otra parte, que él se ha reproducido *tres veces*, es decir, otras tantas veces cuantos son los puntos ocupados en el costado *c d*, que hace ahora de multiplicador.

Y bien; como las naranjas no han aumentado ni disminuido, y son las mismas, en una ú otra posición, se sigue que el producto ha de ser QUINCE naranjas, necesariamente.

### § 3.

Quedando así demostrada la exactitud de la afirmación en el ejemplo propuesto, podríamos tomar cualesquiera otros factores para generalizar la regla; pero nos dispensamos de ello, por la siguiente consideración.

93. Dados que sean el multiplicando y el multiplicador, y formada sobre ellos la correspondiente figura (que nos permitiremos llamarla el «*Tablero*» de la Multiplicación), sucederá siempre: que, vista la figura de frente, se encontrará el *verdadero* multiplicando reproducido tantas veces cuantas unidades haya en el *verdadero* multiplicador; y que, vista la figura de costado, se hallará el nuevo multiplicando reproducido tantas veces cuantas unidades tenga el nuevo multiplicador. Y, como la figura será la misma, y contendrá el mismísimo número de unidades, el total de ellas tendrá por fuerza que ser invariable, cualquiera que sea el sentido en que se haga el cómputo. <13> pág.

Fundados en las precedentes demostraciones, podemos establecer la siguiente

### REGLA

94. *Se puede cambiar en el cálculo el orden de los factores, sin que este cambio altere el producto.*

NOTA.- En la práctica es preferible, á veces, tomar el multiplicador por multiplicando, y éste por multiplicador, por razón de comodidad y economía de tiempo, como lo veremos después.

§ 4.

PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN

95. Ella puede hacerse invirtiendo el orden de los factores. Si la primera operación ha sido bien hecha, en la segunda debe encontrarse el mismo resultado.

NOTA.- Cuando tratemos de la *División*, haremos conocer otro género de prueba para la Multiplicación.

PROBLEMAS (Para los próximos ejercicios)

I

En una clase hay *diecisiete* bancos: cada banco está ocupado por *catorce* alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

II

Un negociante en vinos compra *setecientos treinta* barriles de vino, cada barril vale *doscientos cuarenta y cinco* pesos. ¿Cuál es el importe total?

III

Para un batallón de *cuatrocientas veinticinco* plazas se necesitan á *trescientos cinco* tiros por plaza. ¿Cuántos tiros se requiere por todo?

PROGRAMA PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

*Primera parte.- preguntas* á que deben contestar los niños (§ *cuatro* de la décima Lección), y correcciones que deberá hacer el Preceptor con arreglo al Apéndice <14> pág. 4; Ap.

*Segunda parte.- Resolución* de problemas, y prueba de su exactitud cambiando de factores.

*Tercera parte - Responder* á las preguntas del Cuestionario que va en seguida.

CUESTIONARIO

Se puede invertir el orden de los factores, es decir, poner el multiplicando en lugar del multiplicador y éste en lugar de aquél, sin alterar el resultado? (89 y 94).- Compruebe usted esta afirmación. (90, 91, 92 y 98).- ¿Cómo se hace la prueba de la Multiplicación? (95).

-----

**DUODÉCIMA LECCIÓN**

**De la División de números enteros**

§ 1.

He aquí, hijos míos, que hemos arribado por fin á los dominios de la *División*, quien, de paso sea dicho, tiene fama de ser excesivamente adusta y de no dejarse comprender de buenas á primeras; pero que no lo es tanto, cuando el recién llegado es atento y complaciente con ella.

Bueno es saber que ella es hija legítima de la *Sustracción*, y que participa del carácter y de todos los accidentes de la madre que le dió el sér. Tiene por rival á su prima hermana la *Multiplicación*, con quien parece estar en perpetua pugna, como la *Sustracción* con la *Adición*. En efecto; la Multiplicación, genio esencialmente creador, aumenta las cantidades en un abrir y cerrar de ojos; y la División, á su turno, armada de su sable mágico, separa y destroza, á grandes tajos, y á nombre de la igualdad; los prodigiosos efectos de la Multiplicación.

## GUÍA DEL APRENDIZ

96. *Primera advertencia.*- Así como la *Multiplicación* es una especie de *Adición* abreviada, así también la *División* viene á ser una especie de *Sustracción* abreviada.

97. *Segunda advertencia.*- La *División* no es otra cosa que una descomposición del *producto* proveniente de una multiplicación, en la que entraron los mismos elementos ó cantidades que figuran en la presente operación.

La *División*, en su afán de descomponer lo que hizo la *Multiplicación*, procede siempre en sentido contrario; así, la *División* empieza por donde acabó la *Multiplicación*, como lo veréis adelante. Entre tanto, felicitaos, hijos míos, de que, para tratar con la *División*, no habéis menester de más madrina que la «*Tabla de Multiplicación*», á la cual conocéis ya bastante. Manejándola con un poco de sagacidad, ella os conducirá, de buen grado, por la escabrosa senda que vais á recorrer.

*Tercera advertencia.*- Es muy digno de notarse que, en los diversos dominios que hemos estado atravesando, unas mismas cosas ó ideas tienen distintos nombres. Así:

98. *En el dominio de la Adición" se llama SUMA á lo que en el de la Sustracción se llama RESTANDO; en el de la Multiplicación PRODUCTO; y en el de la División DIVIDENDO.*

Sucede en estos diversos dominios, ó soberanías, lo que en Italia, España, Francia y Portugal; naciones que hablan diversas lenguas, bien que todas ellas hayan procedido de una madre común, que es la Lengua latina.

J.- ¿Cuál es la madre común de la Adición, la Sustracción, la Multiplicación y la División?

98 bis. *P.- Es la Numeración* (aquella señora anciana con quien, por más señas, tuvimos que entendernos por medio de los dedos).

Absuelta así la pregunta, vuelvo á tomar el hilo de la lección.

99. *La Adición da el nombre de PRIMER SUMANDO á lo que la Sustracción llama RESTADOR CONSTANTE, la Multiplicación MULTIPLICANDO, y la División DIVISOR.*

100. *El MULTIPLICADOR propiamente tal es decir, considerado como número abstracto, es, en el lenguaje de la Multiplicación, lo que el COCIENTE en el lenguaje de la División.*

101. *Y es de notar que, en el lenguaje de la Adición y en el de la Sustracción, no hay nombre especial equivalente á multiplicador ó cociente, cuyo oficio se reduce á expresar, respectivamente, el número DE VECES que debe ser reproducido el multiplicando y el número DE VECES que el divisor se halla contenido en el dividendo.*

102. *Cuarta advertencia.*- Así como la *Multiplicación* tiene siempre por objeto encontrar el *producto* de dos factores conocidos, así también el objeto de la *División*, dado el *dividendo* y uno de los factores, se reduce siempre á encontrar el *otro* de los factores.

Para daros alguna luz acerca de las cuatro advertencias precedentes, voy á valerme, por vía de ejemplo, del siguiente

### PROBLEMA

103. Se han distribuido *quince* naranjas entre varios niños, y ha recibido *tres* naranjas cada uno. ¿*Cuántos* fueron los niños?

Fórmula de la División: *quince dividido por tres.*

-----

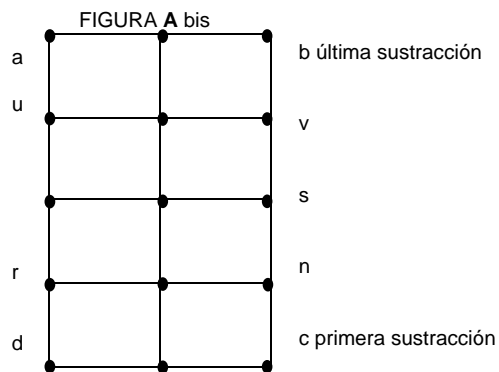
Quiero suponer que yo ignoro la operación de *dividir*. Sin embargo, sabedor de que ella es una especie de Sustracción abreviada, voy á ver si, con el auxilio de las luces que me han suministrado la Adición, la Sustracción y la Multiplicación, puedo resolver el problema, razonando al efecto del siguiente modo.

104. Puesto que la División da el nombre de *dividendo*: á lo que la Multiplicación llama *producto*, el actual dividendo *quince* debe de ser el resultado de una multiplicación, y el divisor *tres*, uno de los factores de ese producto, es decir, el multiplicando, que es la cantidad que debe haberse reproducido, según lo da á entender el problema. Ahora bien: sabiendo que son tres las cantidades cardinales que entran en la División, y que corresponden á las tres de la Multiplicación, según lo dijimos en la *Tercera advertencia*, es claro que, conociendo, como conocemos, dos de esas cantidades (que son el producto quince y el multiplicando tres) sólo hay que buscar la tercera (esto es, el multiplicador); pero tropiezo, desde luego, con la dificultad de que la Multiplicación no enseña el modo de encontrar esa cantidad. Entonces, recurro á la Adición; pero me encuentro con el inconveniente de que, una vez que ella ha hecho la *suma* (que la División llama *dividendo*), no da reglas para volver á encontrar los sumandos, cuyo número constituye el factor que busco. En tal caso apelo á la Sustracción, y procediendo como ella, deduzco del restando (dividendo en el lenguaje de la División), el restador (llamado divisor por la División), lo que me da:

$$\text{Quince} - \text{tres} = \text{doce};$$

mas, veo que doce no puede ser el factor que busco; porque doce X tres daría por producto treinta y seis, que es más que el doble del dividendo quince. Reflexionando entonces que, así como hay casos en que la Adición tiene que agregar varios sumandos de un mismo valor, como por ejemplo, en el caso de la figura A (art. 90), así también la Sustracción puede hacer una serie de sustracciones tomando por restador una misma cantidad hasta que nada quede en el restando. Eso sentado, tomo el restando quince y por restador constante el divisor tres, y digo:

De quince quito tres, que los pongo en la línea *d c*; de doce que restan, quito otros tres, que los coloco en una línea *m n*; de nueve que restan quito otros tres, que los coloco en una línea *r s*; de seis que quedan quito otros tres, que los coloco en una línea *u v*; de tres que restan quito otros tres, que los coloco en *a b*. Y como nada queda ya en el dividendo, doy por terminada la operación, que me da la figura *a b c d*, (\*) la cual manifiesta, en primer lugar, que el dividendo no es otra cosa que el llamado producto por la Multiplicación (Figura B, art. 91); en segundo lugar, que el divisor es el que sirvió de multiplicando, á la Multiplicación; que el



cociente es lo que la Multiplicación llama multiplicador; y, por fin, que el dividendo se ha descompuesto en cinco porciones iguales que corresponden á otros tantos niños.

105. Consultada ahora la División, en los términos del problema, ella contesta autoritativamente:

«Quince dividido por tres, dá cinco»

J.- ¿Qué quiere decir con esto la División?

P.- Quiere decir, en sustancia, lo mismo que ha dicho la Sustracción, esto es, que, descomponiendo el dividendo *quince* (naranjas) en *tres* porciones iguales, se tendrán *cinco* porciones (para otros tantos individuos).

(\*) Nótese que esta figura es exactamente igual á la que formó la Multiplicación ( art. 90 ).

R.- Y, ¿cómo aprenderemos á contestar tan pronto como la División?

106. P. -Sirviéndoos de la «*Tabla de Multiplicación*», quien, de paso sea dicho, es también auxiliar de la División, y sirve á ambas al pensamiento.

Se busca en la Tabla por qué número ha debido ser multiplicado el número *tres* para formar un producto de *quince*, y la Tabla señala el número *cinco*. Así, siendo conocidos el *producto* formado por la Multiplicación y el que le sirvió de *multiplicando*, se encuentra instantáneamente el número que le sirvió de multiplicador (llamado por la División *el cociente*, en el presente caso).

107. Queda pues demostrada la verdad de las cuatro advertencias hechas al principio de la presente lección, mediante los razonamientos empleados en la solución del problema enunciado en el art. 103.

## § 2.

108. El signo que la División emplea para expresar que una cantidad ha de dividirse por otra es, comúnmente, lo que en la cartilla de leer se llama *dos puntos*, por ejemplo:

*doce: cuatro*

Es de advertir que el número colocado antes de los *dos puntos* se llama *dividendo*, y el que viene después *divisor*.

Usa también la División otro signo para expresar la misma idea, y es una raya horizontal entre las dos cantidades, puestas la una encima de la otra; por ejemplo:

doce  
-----;  
cuatro

pero entonces se lee la frase diciendo «doce sobre cuatro», y se da el nombre de *numerador* á la cantidad que está encima y de *denominador* á la que está debajo.

## § 3

Eso establecido, pasemos á allanar otra dificultad que presenta la operación de dividir, y consiste en lo siguiente:

109. Hay algunos números que no se hallan comprendidos en la Tabla de multiplicación, como el *once*, *trece*, *diecisiete*, *diecinueve*, *veintitrés*, etc., etc. Otros hay que, aunque divisibles exactamente por *cierto* número, no lo son por otros: por ejemplo, el número *veinticinco* es divisible por *cinco*, y no lo es por *dos*, ni por *tres*, ni por *cuatro*, ni por ninguno de los números que siguen al *cinco* hasta el *nueve* inclusive. Ahora bien; á cualquiera le ocurre preguntar: ¿cómo deberá hacerse para aprovechar, en semejantes casos, de la Tabla de multiplicación?

110. La respuesta es menos difícil de lo que á primera vista parece. En efecto, si me propongo dividir, por ejemplo, *once* por *tres*. Como en la Tabla el número *tres* no produce *once* por cualquiera número que se le multiplique, busco el producto de *tres* que más se aproxime á *once*, pero que sea inferior á éste. Así; diciendo «*tres veces cuatro son doce*», veo que no puede ser, porque, para que el dividendo pudiera contener *cuatro* veces al divisor, sería menester que aquel alcanzase á *doce*. Entonces, me digo: «*tres veces tres son nueve*», y ahí me detengo, firmemente persuadido de que el producto de *tres* que más se aproxima á *once*, es el de la multiplicación de *tres* por el número *tres* mismo; pero veo al mismo tiempo, que en la *división* habrá un sobrante de *dos*.



§ 4

111. Veamos ahora cómo se opera en el Armario.

Establezco desde luego el dividendo y el divisor en la primera línea.....

a una	b una	r tres
	c nueve	x tres
	d dos	

Así preparado el cálculo, digo: "once entre tres á tres; pongo tres al cociente» (casilla x) [☑]. En seguida, multiplicando el divisor por el cociente, digo: «tres veces tres .son nueve, que los pongo debajo de las unidades del dividendo» (casilla c) [☑]. Sustrayendo después este producto, nueve, que en el presente caso funciona como restador, digo: «de una quito nueve, no puede ser... de once quito nueve, quedan dos, que las pongo, como resto, debajo del restador nueve" (casilla d) [☑].

La operación queda terminada, dando por resultado: que once unidades divididas entre tres, corresponden á TRES por cada unidad del divisor, y que hay un sobrante de dos, unidades simples, al cual se le da el nombre de *fracción*.

Pasemos á otra cosa...

R.- Pero, papá, ¿qué se hace con esas dos unidades sobrantes?

P.- Tu pregunta es muy justa, hija mía; mas, aún no es tiempo de absolverla. Nos ocuparemos en ello cuando tratemos de las *fracciones* de unidad, que, por ahora, debo seguir con mi propósito de allanar otra de las dificultades que ofrece la operación de *partir ó dividir*.

112. Ella consiste en que, si el divisor contiene *decenas* "centenas" ó *unidades* de rango superior, la *Tabla de multiplicación* no basta por sí sola; pues no dá sino el producto de unidades simples por unidades del mismo orden; pero aquí lo del refrán: «*astucia contra el poder*».

Supongamos que se trata de repartir *noventa y siete soles* (\*) entre *doce* individuos.

Para Preparar el cálculo en el Armario, pongo [☑]

.....  
y digo: «El divisor *doce* puede estar contenido en el dividendo *noventa y siete*, siete veces, ocho veces ó tal vez nueve veces; quiero ensayar poniendo en el cociente *ocho* veces» (casilla x) [☑].

nueve	Siete	una	dos
c	d	x	
nueve	seis	ocho	
	e una		

«Multiplico el divisor *doce* por el cociente *ocho*, y tengo por producto *noventa y seis*, que los pongo (casillas c y

d) [☑]; hago en seguida la sustracción, y me queda *una* unidad simple, que la coloco, como resto (en la casilla e).

Así terminada la operación, concluyo expresando que el divisor *doce* se halla comprendido *ocho* veces en el dividendo *noventa y siete* ó, lo que es lo mismo, que de la cantidad *noventa y siete* \$ se pueden hacer ocho porciones iguales de á *doce* \$ cada una, que vendrá á ser la parte que á cada individuo toque en la repartición.

M.- ¿Por qué y para que se hacen la multiplicación y la sustracción?

(\*) Un sol, moneda peruana, equivale, en su valor intrínseco, á una pieza de cinco francos.

113. P.- Tu has tocado, Manuel, en el nudo de la dificultad, el atolladero, por decirlo así, que embaraza el paso á los jóvenes viajeros que, por primera vez, atraviesan la región en que nos hallamos. Habremos de salvarla, sin embargo, á favor de las luces que ha tenido á bien suministrarnos la Regenta de este estado — Señora División —.

Recordad, hijos míos, que en el *art.* 104 establecimos, como tipo ó *medida* (para efectuar la división por medio de la sustracción), una porción que fuese cabal para empezar dando una unidad á cada individuo, y que esta *medida* nos sirvió para hacer las demás sustracciones parciales, hasta terminar la operación. Y bien: en el presente caso, si hubiéramos querido valemós de la «*Sustracción*», habríamos tenido que hacer ocho sustracciones sucesivas, *de á doce* unidades cada sustracción, mientras que la «*División*» nos proporciona la ventaja de poder hacer esas ocho sustracciones de un solo golpe; he aquí cómo:

La División se ha dicho (para sus adentros): «La Multiplicación, reproduciendo *ocho veces* una porción de *doce* \$, ha formado *noventa y seis* \$; luego, dando yo un *tajo* al dividendo *noventa y siete* (llamado *producto* por la Multiplicación), lo divido en dos partes, de las cuales asigno la primera para repartirla por igual entre los co-partícipes; y del *resto*, ya veremos...»

114. Ahora bien; dando respuesta á la pregunta de Manuel, digo: *que se hace la multiplicación para obtener el máximo de porciones iguales que puedan ser contenidas en el dividendo*. Así, por ejemplo, en el presente caso, en que el dividendo es *noventa y siete* y el divisor *doce*, calculando cuántas porciones de *doce* unidades se pueden hacer del dividendo, pongo *siete* al cociente, como ensayo. Más, multiplicando el divisor por el cociente, veo que es mucha la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente. Por lo tanto pongo, también como ensayo, *nueve* al cociente; pero tropiezo con el inconveniente contrario, de ser el producto del divisor, por el cociente, mayor que el dividendo. Entonces, con la evidencia de que el verdadero cociente se halla entre siete y nueve, pongo definitivamente *ocho* al cociente; y, hecha la multiplicación, obtengo un resultado satisfactorio. En efecto, *doce* multiplicado por *ocho*, da *noventa y seis*, y de *noventa y seis á noventa y siete* no hay sino la diferencia de *una* unidad, lo que quiere decir que *ocho* es el número que corresponde al cociente.

115. En resumen, hijos míos: el objeto de la *multiplicación* es el de buscar el mayor número de porciones iguales que puedan ser contenidas en el dividendo; y el objeto de la *sustracción* es dar á conocer el *resto* que queda ó pueda quedar del dividendo.

Para mayor claridad, volvamos á nuestro ejemplo. Haciendo la multiplicación del divisor por el cociente, se obtiene un producto de *noventa y seis*; y sustrayendo esta cantidad del dividendo *noventa y siete*, queda la *diferencia ó resto* de *uno*, que ya no puede ser dividido sino en *fracciones*.

#### OBSERVACIÓN

116. El *resto* ó sobrante de la división debe ser *menor* que el divisor; de otro modo, deberá agregarse una ó más unidades al cociente.

NOTA.- Ya haremos otras observaciones sobre el particular, cuando estemos más avanzados en la instrucción.

-----

## CUESTIONARIO

De V. á conocer las cuatro Advertencias relativas a la división de números enteros. (96 al 102 inclusive).- ¿Cómo podría resolverse un problema de división por medio de la sustracción? (104). ¿Cómo se resuelve el mismo problema por medio de la división? (105).- ¿Cómo se demuestra la verdad de las cuatro Advertencias relativas á la división? (107).- Dé V. á conocer el uso que se hace de la Tabla de multiplicación para dividir un número que esté comprendido en dicha tabla. (106).- ¿Qué signos emplea la división para expresar que una cantidad ha de dividirse por otra cualquiera? (100).- Cuando se emplean *dos puntos*, ¿qué nombres tienen las cantidades que se ponen antes y después de los *dos puntos*? (100).- Cuando se emplea la *raya horizontal*, ¿cómo se lee y qué nombres tienen las dos cantidades? (108).- ¿Cómo podría aprovecharse de la Tabla de multiplicación para dividir un número que no esté comprendido en ella ó que no sea exactamente divisible por el divisor dado? (109 y 110).- ¿Cómo se opera en el Armario? (111 y 112).- ¿Por qué y para qué se hacen la multiplicación y la sustracción al dividir una cantidad? (114 y 115).- ¿Qué regla hay que observar en cada división parcial respecto al resto? (116).

## DÉCIMATERCERA LECCIÓN

(Continúa la División de números enteros)

### § 1

117. La Multiplicación no resuelve más que un problema, á saber: dados el *multiplicando* y el *multiplicador*, encontrar el *producto*.

118. Parece que sucediera lo mismo con la División, cuya fórmula es esta: «dados el *dividendo* y el *divisor*, encontrar el *cociente*»; mas, ello es así sólo en la apariencia; pues, cuando el *divisor* representa al que fué *multiplicando* en la operación de multiplicar, el *cociente* da el factor que sirvió de *multiplicador*; y viceversa, cuando el *divisor* representa al multiplicador, el *cociente* dá el factor que sirvió de multiplicando.

119. Así; son dos, en realidad, los problemas que tiene que resolver la «División» en su tarea de *dividir* el producto de la «Multiplicación (\*)»

120. *Primero*.- Dados el *dividendo* y el *divisor* (cuando éste representa al *multiplicando*), encontrar el *cociente* (que en este caso corresponderá al *multiplicador*).

121. *Segundo*.- Dados el *dividendo* y el *divisor* (cuando éste fué el *multiplicador*), encontrar el *cociente* (el cual corresponderá entonces al *multiplicando*).

122. El primer problema lo tenemos ya resuelto en el artículo 105, en el cual el *factor incógnito* ha sido el que sirvió de *multiplicador* en la multiplicación, Pasemos, por tanto, á ocuparnos en el segundo problema, que tiene por objeto encontrar el *multiplicando*, cuando el *producto* y el *multiplicador* son conocidos.

123. Este problema no presenta dificultad, porque la preparación y el procedimiento son los mismos que hemos empleado para resolver el primer problema; pero se hace necesario demostrar que, también en este caso, la operación de *dividir* es una suerte de sustracción abreviada.

Al efecto, propongamos el siguiente problema:

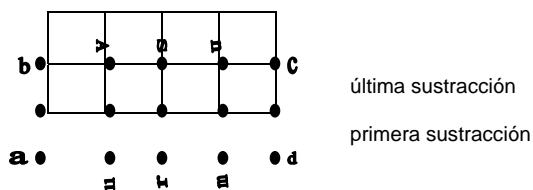
124. Se han distribuido *quince* naranjas entre *cinco* niños, por iguales partes: ¿*Cuántas* ha recibido cada uno?

125. Aquí, procediendo como la Sustracción (*art. 104*), hay que fijarse, desde luego, en que el *restador constante* debe constar de cinco unidades, que habrán de sustraerse sucesivamente del *restando quince* hasta que *nada* quede.

Terminada la operación, resulta la siguiente

(\*) Es preciso no olvidar que, en la operación de dividir, el llamado *dividendo* no es otra cosa que el *producto* de la multiplicación.

FIGURA D



Se vé, pues, por la figura, que habiendo sido preciso hacer *tres* sustracciones, el número de suman dos fué tres ó, lo que es lo mismo, que á cada unidad del restador corresponden *tres* (naranjas).

126. Si, por vía de comprobación, queremos someter el mismo problema á la División, hablándole en su lenguaje, esto es: *Quince* es el dividendo, *cinco* el divisor; ¿cuál será el cociente? -ella contestará súbitamente:

«Quince entre cinco, á tres»

R.- Aquí hay algo que me causa confusión, y voy á decir lo que es.— El cociente *tres* expresa que el dividendo *quince* se ha descompuesto en *tres* porciones iguales al divisor *cinco*, y yo me pregunto: «¿qué se hace con esas tres porciones?» Si se distribuyen en porciones, tres de los niños recibirán á cinco (naranjas), y los otros dos se quedarán sin parte; ó bien, si se quiere dar tres naranjas á cada *uno*, habrá de hacerse una nueva división, en cuyo caso era inútil la división en tres porciones iguales.

P.- Toda la dificultad está en saber hacer la distribución. He aquí un modo de hacerla:

127. Tomando una porción, doy *una* naranja á cada uno de los individuos representados por el divisor (cinco niños); tomando otra porción, doy *otra* naranja á cada individuo; tomando por fin la última porción, doy *otra* naranja á cada cual. De esta suerte, al terminar la tercera distribución, cada uno de los interesados habrá recibido su parte completa, sin que haya sido preciso hacer más división que la ejecutada en el *art.* 126.

Otro modo.

128. Tomando una naranja de cada porción, tengo *tres* naranjas, que las doy al primer individuo del divisor; tomando otra naranja de cada porción, tengo otras *tres* naranjas, que las doy al segundo individuo del divisor; y así sucesivamente, hasta que *nada* quede de las tres porciones.

129. Se comprende que, una vez hecha la distribución, por cualquiera de los dos modos, la Figura D tiene de quedar *definitivamente* vacía, por el hecho de pasar todas las naranjas á manos de los interesados.

En resumen:

130. La Figura D, que se ha formado bajo los auspicios de la Sustracción, pone en evidencia, y esto es lo esencial que aun en el caso de tomarse como divisor al que fué *multiplicador* (en la multiplicación), la división no es otra cosa que una especie de sustracción abreviada, quedando así plenamente comprobado el principio establecido en el *artículo* 96.

## § 2.

Volvamos ahora á seguir operando en el *Armario*.

131. PROBLEMA.- *En una caja de ahorros hay, en billetes, siete mil cuatrocientos ocho \$, pertenecientes á ocho individuos, por iguales partes: ¿Cuántos \$ corresponden á cada uno?*

Fórmula de la División:

«Siete mil cuatrocientos ocho: ocho»

132. Operando en nuestro Armario con sujeción á las reglas de la *División*, pondré desde luego las dos cantidades conocidas, es decir, el *dividendo* y el *divisor*:

a	b	c	d	r
siete	cuatro		ocho	ocho

En seguida, empezando la repartición (según la índole de la División), por las unidades de mayor importancia, diré: *siete* billetes de á mil entre *ocho* individuos, *no puede... ser* tomo entonces por primer dividendo parcial las dos primeras casillas de la izquierda del dividendo y, convirtiendo los siete billetes de á mil en billetes de á ciento, tengo *setenta* billetes de á ciento, los cuales, agregados á los cuatro que existían en la casilla de centenas, hacen *setenta y cuatro*. Y bien: *setenta y cuatro* billetes de á ciento, entre *ocho* individuos, pueden *cabere* á nueve por cada individuo. Pongo *nueve* en el cociente, (*casilla x*) (\*) [  ], y digo (multiplicando el divisor por el cociente): «nueve veces ocho son setenta y dos; *pongo* este producto —parcial, en calidad de *primer* restador, al pie del *primer* dividiendo parcial (*casillas e, f*), en esta forma» [  ].....

a	b	c	d	r
siete	cuatro	...	ocho	ocho
e	f			x
siete	dos			
	g	h		nueve
	dos	cero		

Deduciendo estas setenta y dos centenas de setenta y cuatro, *quedan* dos centenas (ó sea dos billetes de á ciento), que coloco debajo del restador (*casilla g*) [  ].

Viendo que esas dos centenas no pueden ser distribuidas entre ocho individuos, las convierto en decenas, ó sean billetes de á diez, que entonces valen por veinte; y, como nada hay arriba, en la casilla de decenas (*c*), *bajo* el equivalente de su valor, es decir, *cero*, al lado del *dos*...

R.- Y ¿qué significa, papá, eso de decir «bajo el cero»?

133. P.- Es que el *dos*, estando sólo, no valdría más que dos centenas. Para que se lea como *veinte* decenas, es indispensable que, á su derecha, haya un signo que indique su valor en unidades del orden inmediatamente inferior, que es el de decenas (\*\*).

134, Ahora bien: siguiendo la operación que hemos dejado interrumpida en el *art.* 132 (y que se ha hecho necesario reproducirla *aquí*\*\*\*), decía yo «*bajo* el cero», y ahora lo ejecuto en el Armario— de este modo [  ]

A favor de tal maniobra, tengo veinte decenas (ó veinte billetes *de á diez*), que las tomo como *segundo* dividendo parcial (*casillas g, h*), y digo: «veinte billetes de á diez entre ocho individuos, corresponden á dos, que *los pongo en el cociente* á la derecha del nueve. (*casilla y*) [  ].

Multiplico el divisor por el dos del cociente (que representa *dos decenas*.), y tengo por producto, ó sea *segundo* restador, diez y seis decenas (billetes de á diez), que los coloco debajo del *segundo* dividendo parcial. (*casillas i, j*).

Deduciendo esas diez y seis decenas del *segundo* dividendo parcial, quedan cuatro decenas, que *las pongo* (*casilla k*).

Como esas cuatro decenas no pueden ser distribuidas entre ocho individuos, las cambio en unidades del orden siguiente, es decir, en cuarenta unidades simples. *Bajo* en seguida las ocho unidades simples de arriba (esto es, de la casilla *d* á la casilla *1*) [  ], y tengo (como *tercer* dividendo parcial) cuarenta y ocho unidades simples (billetes de á *un* \$), las

(\*) Es de advertir que ese *nueve*, que tiene la apariencia de unidades simples, por hallarse solo en el cociente, ha de convertirse luego en *centenas*, merced á los otros números que tienen que venir á su derecha, como pronto lo veremos. ,  
 (\*\*) En lo sucesivo, siempre que haya necesidad de hacer figurar en el Armario una casilla vacía, porque así lo exija el Cálculo, la señalaremos con una cajita marca *cero*.  
 (\*\*\*) Ha sido necesario rehacer aquí la figura anterior y completarla á fin de facilitar la explicación.

cuales divididas entre ocho individuos, corresponden á seis unidades simples, que *pongo* en el cociente (*casilla z*).

Multiplicando el divisor .por esas seis unidades del cociente, me dan cuarenta y ocho unidades simples, que las coloco debajo del *tercer* dividendo parcial (esto es, en las casillas m, n), como *tercer* restador.

Haciendo en seguida la sustracción; nada queda; lo cual expreso poniendo *cero* en la casilla ñ [  $\square$  ] .

Terminada ahí la operación, la División ha resuelto el problema, manifestando en el cociente: que á cada individuo corresponden *novecientos veinte y seis* \$.

a siete	b cuatro	c . . . h cero	d ocho	r ocho		
e siete	f dos			x nueve	y dos	z seis
.....	g dos una	j seis	l ocho n ocho			
		k cuatro m cuatro				
			ñ cero			

§ 3.

135. Resuelto ya el problema, coloquemos frente á frente la figura M, que representa una multiplicación, y la figura P, que acabamos de formar:

**FIGURA M**

U	c	d	u	
	nueve	dos	seis	= multiplicando
			ocho	= multiplicador
		cuatro	ocho	= primer pro- ducto parcial.
	una	seis		= segundo id. id.
siete	dos			= tercero id. id.
siete	cuatro		ocho	= Producto.

**FIGURA P**

	U	c	d	u	
Dividendo.	siete	cuatro	ocho		ocho (divisor)
primer restador	siete	dos			(nueve dos seis) = cociente
segundo id.		dos	cero		
tercero id.		una	seis		
		cuatro	ocho		
		cuatro	ocho		
			cero		

Haciendo una comparación detallada entre las partes de ambas figuras, llegaremos á las siguientes

**CONCLUSIONES**

136. *Primera:* que la División ha empezado por donde acabó la Multiplicación;

137. *Segunda:* Que la División ha sustraído, ante todo, con el nombre de *primer restador*, el último producto parcial de la Multiplicación, y así sucesivamente, en sentido diametralmente contrario á la marcha que ésta observó;

138. *Tercera*: que la importancia de las *sustracciones* está en razón inversa de la importancia de los *productos parciales* de la Multiplicación, esto es: que, habiendo la Multiplicación formado primero el producto *de las unidades simples*, después el de las *decenas* y, por último, el *de las centenas* — la División, al contrario, ha sustraído primero el valor *de las centenas*, después el *de las decenas* y, últimamente, el *de las unidades simples*... ¡Admirables contrastes! y ¡admirable simetría!...

R.- ¿Cuál de las dos te gusta más, papá: la Multiplicación ó la División?

P.- ¡Oh! ya comprendo el alma de la pregunta, Generalmente gusta más la Multiplicación, porque es de trato afable, graciosa y coqueta (como los franceses llaman á las muchachas que se esmeran por parecer bien); al paso que 1a División es adusta, áspera en su trato y varonil en sus movimientos...

J.- Y cuál de ellas es mejor, papá?

P.- Eso de *mejor*... Es como si me preguntaseis si es mejor el día que la noche, el verano que el invierno... pues esos armoniosos contrastes son, precisamente, los que constituyen la belleza de la obra de Dios — el UNIVERSO - de que tantos beneficios reporta el hombre, sin que á éste le sea dado apreciar cuál es la mejor de entre las partes componentes de ese maravilloso conjunto.

#### CUESTIONARIO

¿Cuántas especies de problemas resuelve la Multiplicación y cuantas la División? (117 al 121 inc.)- Haga Vd. ver nuevamente cómo se resuelve en el Armario un problema de División (131 al 134 inc.) - ¿Qué conclusiones fluyen de las figuras que se ven en el *art.* 135? (136 al 138 inc.)

#### CONFERENCIA

P.- Exponed vuestras dudas acerca de la última lección.

R.- Aunque sea tal vez inoportuna la pregunta que me ocurre, voy sin embargo, á manifestarla, porque tú nos has encargado que te consultemos sobre cualquier duda, por insignificante que parezca. He aquí mi pregunta: ¿por qué razón, en el curso de las lecciones, se ha escrito unas veces *adición*, *substracción*, *multiplicación* y *división*, con minúsculas solamente, y otras veces *Adición*, *Substracción*, *Multiplicación* y *División*, con iniciales mayúsculas? Yo creo comprender la razón, pero no sabría explicarla.

139. P.- Se ha escrito con minúsculas siempre que esas palabras han sido empleadas en el sentido de *operación*, y con iniciales mayúsculas, toda vez que ha querido uno referirse á las partes de la Aritmética que enseñan y explican la manera de efectuar esas operaciones. Así, se ha escrito con minúsculas, por ejemplo, en estas frases: «la *multiplicación* es una especie de *adición* abreviada»; «la exactitud de una *división* puede comprobarse por medio de la correspondiente *multiplicación*». Mas, se ha escrito con iniciales mayúsculas, por ejemplo, en esta frase: «Después de haber recorrido los dominios de la *Adición*, la *Substracción* y la *Multiplicación*, vamos á entrar en el de la *División*».

En los dos primeros casos se ha hablado de las operaciones puramente mecánicas, por decirlo así; mientras que en el último caso la Adición, la Substracción, la Multiplicación y la División, han sido consideradas como si fuesen personas que tuvieran la facultad de resolver ciertas cuestiones... Y de paso sea dicho: á esa manera de considerar las cosas y los seres puramente ideales, llaman los literatos *personificación*.

## DÉCIMACUARTA LECCIÓN

(Continúa la División de números enteros)

### § 1

Como no os sería fácil encontrar por vosotros mismos las definiciones de los términos que se emplean en la operación de *dividir*, voy á dáoslas, y son como sigue:

140. *División*: se llama así la operación aritmética que tiene por objeto dividir en porciones iguales una cantidad llamada *dividendo* (la cual se supone, siempre, ser el *producto* de una multiplicación).

141. *Dividendo*: es la cantidad que tiene de ser dividida ó distribuida en porciones iguales.

142. *Divisor*: la cantidad que indica las unidades de que debe constar cada una de las porciones en que ha de descomponerse el dividendo.

143. *Cociente*: el resultado final de la operación de dividir, y que indica *cuantas* porciones pueden formarse del dividendo, debiendo ser cada una de ellas igual al divisor; ó, en otros términos, cuántas veces contiene el dividendo al divisor.

### PREGUNTAS Y RESPUESTAS

*Pregunta.*- El dividendo ¿á qué cantidad de la multiplicación corresponde?

144. *Respuesta.*- Al *producto*.

*P.*- ¿El divisor?

145. *R.*- Unas veces corresponde al *multiplicando* y otras al *multiplicador*.

*P.*- Y el *cociente*?

146. *R.*- Viceversa.

*P.*- Aclarad el sentido de las dos últimas respuestas, recordando al efecto lo que se estableció en los artículos 118 á 121.

147. *R.*- Hay que tener en cuenta que el *divisor* es siempre una cantidad conocida, lo mismo que el *dividendo*; al paso que el *cociente* se encarga de dar á conocer la cantidad que se busca; de suerte es que, si el divisor señala al *multiplicando*, el cociente tendrá que señalar forzosamente al *multiplicador*; al contrario, si el divisor indica al *multiplicador*, el cociente dará á conocer al *multiplicando*.

### § 2

Hablando de la *Prueba de la multiplicación*, dijimos (en la *Nota* del artículo 95): que, al tratar de la División, daríamos á conocer otro medio de comprobar la exactitud de aquélla. Helo aquí:

148. *Dividiendo el producto por uno de los factores de la multiplicación, debe encontrarse necesariamente el otro factor como cociente; y si no, es prueba de que la multiplicación ha sido mal hecha y que es menester rehacerla.*

Esa verificación la hemos hecho ya en el curso de las dos lecciones precedentes.



149. Viceversa: la prueba de la división puede hacerse por medio de la multiplicación.

En efecto: supongamos que nos propusiéramos comprobar la exactitud de la *división* terminada en el artículo 134. Para ello bastaría multiplicar el divisor *ocho* por el cociente *novcientos veintiséis*, y comparar el resultado de esta multiplicación con el valor del dividendo, que es *siete mil cuatrocientos ocho*. Si no es igual, hay que dar por mal hecha la división, y hacerla de nuevo.

PROBLEMAS, <15> (pág. 5, Ap.) *que deben resolverse en los próximos ejercicios y conferencias*

*Primero.*- Se han dividido por iguales partes *mil ochocientos setenta y cinco \$* entre varias personas: cada persona ha recibido *setenta y cinco \$*. ¿Cuántas personas había?

*Segundo.*- ¿Cuántos metros de género se tendrán por *cientos ochenta \$*, á razón de *doce \$* el metro?

*Tercero.*- Un zurrón contiene *veinticuatro mil seiscientos reales* que se quiere convertir en *pesos* de á *ocho reales*. ¿Cuántos *pesos* se tendrán?

#### COMPROBACIONES

En primer lugar, comprobar, por medio de la multiplicación, el resultado de cada uno de los problemas que acaban de ser propuestos.

En segundo lugar, verificar, por medio de la división, el resultado de los problemas indicados en la página 74 del tratado de Multiplicación.

#### CUESTIONARIO

¿Qué es división? (140).- ¿Qué es dividendo? (141).- ¿Qué es divisor? (142).- ¿Qué es cociente? (143).- El dividendo ¿a qué cantidad de la multiplicación corresponde? (144).- ¿El divisor? (145).- ¿Y el cociente? (146).- Aclarad el sentido de las dos últimas respuestas (147).- ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación por medio de la división? (148).- ¿Cómo se hace la prueba de la división? (149).

#### FIN DE VOLUMEN 1