VOLUMEN III **TERCER GRADO DE INSTRUCCIÓN**

CUADRAGÉSIMA LECCIÓN

§ 1

Nociones preliminares acerca de las proporciones

550. Se llama *razón*, en general, el resultado de la comparación de dos cantidades. Estas cantidades se llaman los dos *términos de la razón*.

Cuando se comparan dos cantidades para saber en cuánto sobrepasa la una á la otra, se obtiene su *razón por diferencia*, y si se busca cuántas veces la una contiene á la otra, se tiene su *razón por cociente.* Así:

en 12 - 4, hay una razón por diferencia;
en 12 : 4, hay una razón por cociente.

551. Comúnmente se designa la razón por diferencia con el nombre de *razón aritmética*, y la razón por cociente con el de *razón geométrica*, por ser ésta de un uso continuo en Geometría.

552. Se llama *proporción* la reunión de dos razones iguales; y así como hay dos especies de razones, hay también dos suertes de proporciones: *la proporción por diferencia y la proporción por cociente*.

553. La PROPORCIÓN POR DIFERENCIA ó simplemente *equidiferencia, es la reunión de dos razones por diferencia, Iguales entre sí.* Así, la diferencia de los números 12 y 7, siendo igual á la diferencia de los números 25 y 20, los cuatro números 12,7, 25 y 20 forman una equidiferencia.

Se escribe 12. 7 :20. 25,

y se pronuncia «12 menos 7 es igual á 25 menos 20, ó «12 es á 7 como 25 es á 20,»

554. La PROPORCIÓN POR COCIENTE ó simplemente *proporción, es la reunión de dos razones por cociente, iguales*. Puede decirse también que es la *reunión de dos expresiones fraccionarias iguales ó de dos fracciones Iguales*. Así el cociente de 21 por 7, siendo igual al cociente de 60 por 20, los cuatro números 21, 7, 60 y 20 forman una proporción por cociente(*).

Se enuncia: «21 dividido por 7, igual á 60 dividido por 20»;
ó «21 séptimo, igual á 60 vigésimos»;
ó también: «21 es á 7, como 60 es á 20»;
y se escribe: $\frac{21}{20} = \frac{60}{20}$, ó 21 : 7 : : 60 : 20.

Es evidente que en una proporción hay cuatro términos, dos antecedentes y dos consiguientes: el primero y el tercer términos son los antecedentes; el segundo y el cuarto son los consiguientes.

555. Se llaman TÉRMINOS EXTREMOS el *primero y el último,* y MEDIOS *el segundo y el tercero.*

556. Se llama PROPORCIÓN CONTINUA *aquella cuyos medios son iguales*, como:

12-8= 8 – 4 y 18 : 6 :: 6 : 2

(*) A este respecto, he aprovechado de los trabajos de Mr. Adhemar y de MM, Dumouchel et Dupuis, si bien coordinándolos de muy diverso modo, y dándoles otro aspecto"

557. En la proporción continua por diferencia, el medio 8 se llama *media diferencial* entre los extremos 12 y 4, y en la proporción continua por cociente, el medio 6 se llama *media proporcional* entre los extremos 18 y 2.

§ 2

Propiedades de la equidiferencia

558. *En toda equidiferencia la suma de los extremos es igual á la suma de los medios*. Así, por ejemplo, en la equidiferencia:

12 .7 : 25 .20

tendremos:

Suma de los extremos 12 +20=32
» » » medios 7+25=32.

559. *Recíprocamente, si se tienen cuatro cantidades tales que la suma de los extremos sea igual á la de los medios, estas cuatro cantidades forman una equidiferencia.*

560. De los principios que acaban de establecerse resulta que, si se conociesen tres términos de una equidiferencia, sería fácil calcular el cuarto. En efecto, supongamos que se tenga:

$$25 . 20 : 12 . x$$

Se pondrá (art.558):

$$25 + x = 20 + 12$$

sustrayendo 25 de cada lado, á fin de aislar ó dejar sola la incógnita (lo que evidentemente no alterará la equidiferencia), se obtiene:

$$x = 20 + 12 - 25 = 7$$

De ahí fluye la siguiente

561. REGLA.- Se obtiene el valor de un término extremo *formando la suma de los medios y sustrayendo de ella el otro extremo*.

Siendo la incógnita uno de los medios, se obtendrá su valor *formando la suma de los extremos y sustrayendo de ella el valor del medio conocido*.

562. Cuando la equidiferencia es *continua,* la suma de los medios *es igual á 2 veces el término medio*.

Si el término medio fuese incógnito, como en esta equidiferencia,

$$7. \ x : x . 29$$

Se pondrá ……..$2x = 7 + 29$
lo que dará…….. $x =$

563. Así el término medio de la equidiferencia continua, *es igual á la mitad de la suma de los extremos*. Es lo que se llama una media aritmética ó simplemente una media, que no debe confundirse con la *media proporcional*, de que hablaremos después.

564. He omitido algunas explicaciones dadas por Mr. Adhémar, respecto á la teoría de la equidiferencia, porque, á juicio del mismo Mr. Adhémar, «*la razón por cociente sirve de base d todas las combinaciones matemáticas*», y porque los señores Dumouchel et Dupuis asientan más terminantemente todavía que: «*siendo las equidiferencias poco empleadas, han tenido á bien no exponer sino la teoría de las proporciones geométricas.*»

Así, diré con el maestro Adhémar, toda vez que en adelante se hable de la razón de dos cantidades, ha de entenderse por el cociente, que proviene de la división de una de estas cantidades por la otra.

§3

Propiedades de la proporción

565. Por lo que se dijo al principio de la 18ª. lección, y lo que en la presente se ha expuesto, la expresión $\frac{12}{4}$ puede tomar indiferentemente el nombre de fracción, de cociente ó de razón. Si la consideramos como *fracción*, 12 es el numerador y 4 el denominador; si le damos el nombre: de *cociente*, 12 es el dividendo y 4 el divisor; en fin, si la llamamos *razón*, 12 será el antecedente y 4 el consiguiente. En general, el antecedente es aquel de los dos términos que se supone dividido por el consiguiente.

566. Resulta de lo que acabamos de decir: que los principios establecidos (art. 383 y siguientes) relativamente á los dos términos de una fracción, se aplican igualmente á los dos términos de una razón: así, *se multiplica una razón, multiplicando el antecedente ó dividiendo el consiguiente; se dividirá la razón, al contrario, dividiendo su antecedente ó multiplicando su consiguiente; en fin, el valor de una razón no se alterará cuando se multipliquen ó se dividan sus dos términos por un mismo número.*

567. La más simple de todas las razones es la de un número entero á la unidad, por ejemplo:

$$7:1 = 7.$$

Una razón puede reducirse á esa forma cuando el antecedente contiene un número exacto de veces al consiguiente. Así:

$$12 : 4 = 3 : 1 = 3.$$

568: Cuando los dos términos no tienen factores comunes, la razón conserva la forma fraccionaria.

$$12 : 5 = \frac{12}{4}$$

Cualquiera que sea la forma de los términos que componen una razón, se puede siempre, por transformaciones .análogas á las de las fracciones, convertir esos términos en números enteros: es lo que se llama *reducir una razón á su más simple expresión.*

EJEMPLO

$$\left(7 + \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) : \left(8 + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{171}{20} : \frac{47}{6} = \frac{171 \times 6}{20 \times 47} = \frac{513}{470}$$
$$= 513 : 470.$$

569. Algunas veces la razón se enuncia bajo la de una ecuación. Por ejemplo:

5 130 740 toesas = 10 000 000 de metros.

Se saca de ahí, que 5 130740 X 1 toesa = 10 000000 X 1 metro.

Suprimiendo del primer miembro de la ecuación el factor 5130740, y dividiendo el segundo miembro por el mismo número, y, al mismo tiempo, suprimiendo en este miembro el factor 1 metro, y dividiendo por este mismo factor el primer miembro de la ecuación, resulta:

$$\frac{1 \text{ toesa}}{1 \text{ metro}} = \frac{10\,000\,000}{5\,130\,740}$$

que es como si se dijese: 1 toesa contiene 1 metro tantas veces, cuantas 10 000 000 contiene 5 130 740, ó, en otros términos la razón de la toesa al metro es $\frac{10\,000\,000}{5\,130\,740}$.

570. Mas es preciso no olvidar que *no se pueden comparar dos cantidades para obtener su razón, sino en tanto que esas dos cantidades sean de la misma naturaleza, como dos longitudes, dos pesos, etc*. Así, la razón de 20 metros á 5 metros es igual á 4, es decir, que 20 metros contienen 5 metros *cuatro veces*.

La razón de 20 metros á 5 kilogramos, no tendría sentido.

La PROPIEDAD FUNDAMENTAL de las proporciones es esta:

571. *En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.* Sea, por ejemplo:

$$21 : 7 :: 39 : 13$$

Producto de los extremos 21 X 13=273.
Producto de los medios 7 X39 = 273.

No podía ser de otro modo, porque, si bien se examina, en toda proporción los extremos han de contener los mismos factores simples que los dos términos medios.

En efecto, contrayendo la atención á los dos precedentes productos, y descomponiendo el número 39 (consiguiente de la segunda razón), y el número 21 (consiguiente de la primera razón), se tiene:

Producto de los extremos 7 X 39 = 7 X (3X 13).
Producto de los medios 21 X 13 = (7 X 3) X 13.

572. *Recíprocamente, toda vez* que el producto de dos números sea igual al producto de otros dos, se podrán tomar los dos primeros por extremos de una proporción en que los otros dos serán los medios.

Sea, por ejemplo:

$$12 \times 5 = 20 \times 3.$$

Si se dividen los dos miembros por 5 X 3,

se tendrá: $\frac{12 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 3} = \frac{20 \times \cancel{5}}{5 \times \cancel{3}}$;
de donde $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$, se puede escribir en forma de proporción, diciendo:

$$12 : 3 :: 20 : 5.$$

Aquí la razón es la misma que en el caso anterior; pero la igualdad es más evidente, porque 12 contiene á 3 cuatro veces, lo mismo que 20 á 5.

573. Del principio que acabamos de enunciar, se deduce esta consecuencia: que si se combinan los términos de una proporción de manera que el producto de los extremos quede igual al producto de los medios, habrá siempre proporción.

Así, en la proporción 12: 3 :: 20 : 5,
se puede cambiar el lugar de los medios, entre sí; lo que dará:

$$12 : 20 :: 3 : 5.$$

Se pueden poner los extremos en lugar de los medios. Así, 20 : 12 :: 5 : 3

—cambiar de nuevo el lugar de los medios:

20 : 5 :: 12 : 3

—poner de nuevo los extremos en lugar de los medios:

5 : 20 :: 3 : 12, etc.

NOTA.- Después de la octava permutación de este género se encontrará la proporción primitiva.

Un gran número de otras combinaciones resulta del mismo principio. Por ejemplo:

574. Si en cada razón se aumenta al antecedente una, dos ó más veces el consiguiente, se habrá aumentado la razón en otras tantas unidades, y habrá siempre proporción.

EJEMPLO

12 : 3 : : 20 : 5 (*aquí la razón es* 4).
(12+3):3:: (20+5) : 5(').
12 + (3 veces 3) : 3 : : 20 + (3 X5) : 5 (².).

575. Por consecuencia: si en cada razón se disminuye del antecedente una, dos ó más veces el consiguiente, la razón disminuye en otras tantas unidades.

576. *La suma de los dos primeros términos es al segundo, como la suma de los dos últimos es al cuarto.*

La suma de los dos primeros términos es al primero, como la suma de los dos últimos es al tercero;

577. Asimismo: *la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la diferencia de los dos últimos es al cuarto;*

La diferencia de los dos primeros términos es al primero, como la diferencia de los dos últimos es al tercero.

NOTA.- Como consecuencia evidente, los principios que acaban de establecerse, se hacen extensivos á las sumas y diferencias de los antecedentes y consiguientes.

En fin, en toda combinación tal que el producto de los extremos sea igual al producto de los medios, habrá proporción.

578. Si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones serán iguales: y se podrá hacer de ellas una proporción.

Así, de las proporciones: $\left\{\begin{matrix} 5 : 15 : : \ \ 7 : 12 \\ 5 : 15 : : 11 : 33 \end{matrix}\right\}$ se puede decir que: 7 : 21 : 11 : 33.

579. *Si dos proporciones tienen los mimos antecedentes, los consiguientes formarán proporción. En efecto*, dadas las dos proporciones:

5: 7 :: 15 : 21
5: 11 :: 15 : 33

(¹) Simplificando la proporción, se tiene: 15: 3 : : 25: 5 II tazón = 4 + 1.
(²) Simplificando la proporción, se tiene: 21: 3 : : 35 : 5 II razón = 4 + 3.

cambiando los medios de lugar, resulta:

$$5 : 15 :: 7 : 21$$
$$5 : 15 :: 11 : 33$$

De ahí, á causa de la razón común, se deduce:

$$7 : 21 :: 11 : 33$$

580. *Dadas dos ó más proporciones, se las puede multiplicar término por términos*; y entonces, los cuatro productos que se obtengan, formarán todavía una proporción. Dadas estas dos proporciones:

$$\begin{array}{c} 5 : 15 :: 7 : 21 \\ \underline{11 : 33 :: 8 : 24} \end{array}$$

se deduce:

$$55 : 495 :: 56 : 504$$

En efecto, en la primera proporción se tenía:

$$5 \times 21 = 15 \times 7$$

en la segunda:

$$11 \times 24 = 33 \times 8$$

multiplicando, resulta:

$$5 \times 21 \times 11 \times 24 = 15 \times 7 \times 33 \times 8$$

ó bien:

$$5 \times 11 \times 21 \times 24 = 15 \times 33 \times 7 \times 8$$

en fin:

$$55 \times 504 = 495 \times 56$$

que se puede escribir como sigue:

$$55 : 495 :: 56 : 504$$

581. Cuando se multiplican así dos proporciones, término por término, y un mismo número se encuentra como antecedente en la una y como consiguiente en la otra, él se hace, en el producto de ambas proporciones, factor común al término extremo que ha de servir de divisor, y al término medio que ha de figurar como numerador, en cuyo caso debe suprimírsele.

$$\text{Sea...}\begin{cases} 7 : \cancel{21} :: 5 : 15 \\ \underline{\cancel{21} : 42 :: 3 : 6.} \end{cases}$$

Suprimiendo, queda $$7 : 42 :: 5 : 90.$$

582. Cuando los dos términos medios son iguales, la proporción tiene el nombre de *continua*.

$7 : 21 :: 21 : 63$, es una proporción continua.

En efecto: $$7 \times 63 = 21 \times 21.$$

583. Si se tuviese tres términos de una proporción, sería fácil encontrar el cuarto.
Sea:

$$7 : 21 :: 5 : x$$

Según el principio fundamental (art. 571}, se tendrá:

$$7x = 21 \times 5;$$

de donde x =

584. Algunas veces hay dos incógnitas; mas, disponiendo convenientemente los términos, se puede desaparecer la una de ellas. Sea, por ejemplo:

$$3 : 5 :: 12 : x,$$
$$7 : 8 : : x : y;$$

multiplicando las dos proporciones, término por término, y suprimiendo el factor *x* (art. 581) resulta:

$$3 \times 7 : 3 \times 8 : : 12 : y;$$

de ahí:

$$y = \frac{5 \times 8 \times 12}{3 \times 7} = \frac{160}{7}.$$

CUESTIONARIO

¿Qué se entiende por *razón* y por *término de la razón?* (550).- ¿Cómo se obtiene la *razón por diferencia* y la *razón por cociente?* (551).- ¿Qué se entiende por *proporción* y cuantas clases hay? (552).- ¿Qué es proporción por diferencia? (553).- ¿Qué es proporción por cociente? (554).- ¿Qué se entiende por *términos extremos y términos medios?* (555).- ¿Qué es *proporción, continua?* (555).- ¿Cómo se llama el término medio en la proporción continua por diferencia y en la proporción continua por cociente? (557).- ¿Cuales son las propiedades principales de la equidiferencia? (558 y 559).- ¿Cómo se obtiene el valor de un término extremo y el de un término medio? 1561).- Cuando la equidiferencia es continua, ¿á qué es igual la suma de los medios? (562).- ¿A qué es igual el término medio de la equidiferencia continua? (663).- ¿Qué denominaciones puede darse á una expresión tal como $\frac{12}{4}$? (565).- Qué resulta de lo que acaba de decirse? (566).- ¿Cuál es la más simple de todas las razones? (567).- Cuando los dos términos no tienen factores comunes, ¿qué forma conserva la razón? (568).- Ponga V, un ejemplo en que la razón se enuncie bajo la forma de una ecuación (569).- ¿Qué condición es necesaria para que dos cantidades formen razón? (570).- ¿Cuál es la propiedad fundamental de las proporciones por cociente? (571 y 572).- ¿Qué se deduce del principio que acaba de enunciarse? (573).- Si en cada razón se aumenta el antecedente una, dos ó más veces; el consiguiente, ó viceversa, ¿qué sucede con la razón? (574 y 575).- Qué relación guarda la suma de los dos primeros términos con la suma de los dos últimos? (576).- ¿Qué relación guarda la diferencia de los dos primeros términos con la diferencia de los dos últimos? (577).- Si dos proporciones tienen una razón común, ¿qué relación guardan entre ellas las otras dos razones? (578).- Si dos proporciones tienen los mismos antecedentes, ¿qué sucede con los consiguientes? (579).- Dadas dos ó más proporciones, si se las multiplica término por término, ¿qué sucede con los productos? (580).- Cuando se multiplican dos proporciones, término por término, y un mismo número se encuentra como antecedente en la una y como consiguiente en la otra, ¿qué viene á ser este número? (581).- Cuando los dos términos medios son iguales, ¿qué nombre lleva la proporción? (582).- Cuando se tiene tres términos de una proporción, ¿cómo se obtiene el cuarto? (583).- ¿Cómo se procede cuando hay dos Incógnitas? (584).

CUADRAGÉSIMA-PRIMERA LECCIÓN

De la regla de tres

Hay diversas operaciones que tienen distintos nombres, pero que, bien examinadas, son aplicaciones de un mismo principio, y que sólo difieren en la manera de disponer el cálculo. Tales son: la llamada *regla de tres, la reducción á la unidad, la regla de interés, etc., etc.;* pues todas estas cuestiones se resuelven por medio de la teoría de las proporciones, como vamos á verlo.

REGLA DE TRES SIMPLE

585. En otro tiempo, esto es, cuando la teoría de las proporciones se hallaba en estado embrionario, es probable que el inventor de la *regla* de *tres,* habiendo observado que en las transacciones comerciales, el *precio* debía aumentar proporcionalmente á la cantidad pedida, formuló su pensamiento, diciendo:

« *Si* 9 *onzas* de *azúcar,* por ejemplo, *valen* 4 *ducados, 108 onzas, ¿cuántos ducados valdrán?»;* y teniendo en cuenta que la fórmula así establecida, contenía tres cantidades numéricas, concluyó dándole el nombre de REGLA DE TRES.

586. Sea de ello lo que fuere, la llamada *regla* de *tres* no es otra cosa que una proporción, con sólo la circunstancia de que el cuarto término no se halla expresado

numéricamente, pero sí de una manera sobreentendida bajo la designación *cuánto,* equivalente de x ó de cualquiera otra de las letras que hoy se emplean para designar una cantidad no conocida.

Algo más: en la *proporción* rigurosamente tal, el *consiguiente* debe ser de la misma especie que su *antecedente;* y conforme á este principio, la enunciación del ejemplo que acaba de proponerse, debería ser ésta:

587. 9 *onzas son á 108 onzas, como 4 ducados son á x ducados;* mientras que, en la regla de tres, el segundo término, (que hace de consiguiente), es de distinta especie que el primer término (que hace las funciones de antecedente); pero eso sólo quiere decir que la *regla de tres* ha sido una proporción que nació dislocada, esto es, con los *medios* cambiados, lo cual es permitido en el cálculo (art.573), como es permitido cambiar el lugar del multiplicando por el del multiplicador y *viceversa,* cuando ello conviene.

588. En suma: siendo la *regla de tres* una verdadera proporción, y hallándose sujeta en todo á las mismas condiciones que ésta, no hay razón para hacer de ella una distinta entidad.

Media por diferencia

589. Se llama así el resultado que se obtiene, tomando el término medio, entre los valores de una misma cantidad sujeta á variaciones.

590. Supongamos un trozo de metal de plata, cuya ley se quiere determinar. Al efecto, se toma un pedacito del metal, se le ensaya, y se ve que contiene, por ejemplo, 490 miligramos de plata. Se toma en seguida otro pedacito del mismo metal, pero de la parte opuesta á la de que se sacó el primero; se le ensaya también, y se ve que da 480 miligramos de plata. Comparados los dos ensayos, se toma la mitad de la diferencia que hay entre ambos, es decir, la mitad de 10, que es 5; y sustrayendo 5 del primer ensayo, ó agregando 5 al segundo, se concluye: que la *ley media* de dicho metal es de 485 miligramos de plata por 1000 miligramos de metal.

En el caso de ser necesario hacer muchos ensayos, en lugar de tomar la media entre el resultado de los dos primeros ensayos y el tercero, entre este resultado y el cuarto ensayo, etc., se hace la suma de los valores arrojados por todos los ensayos, se divide la suma por el número de éllos, y el cociente da la *ley media.*

OTRO EJEMPLO

591. Para conocer el alcance de un cañón de por ejemplo, se dan muchos tiros con el mismo cañón, se hace la suma de las distancias recorridas por los proyectiles, se divide la suma por el número de los tiros, y el cociente señala el *alcance medio del cañón.*

Disposición del cálculo

tiros alcance		*productos*
20 á 1200m. por tiro, hacen		20 X 1200 = 24000m.
15 á 1180m.	»	15X 1180 = 17700m.
10 á 1220m.	»	10 X 1220 = 12200m.
30 á 1210m.	»	30 X 1210 = 36300m.
25 á 1190m.	»	25 X 1190 = 29750m.
Total = 100 *tiros*		*Distancia total* = 119950m.

Alcance medio $\frac{119950}{100}$ = 1199,m. 50

592. En este género de cálculo (dice Mr. Adhémar), es la MEDIA tanto más *exacta,* cuanto que es el resultado de un mayor número de hechos particulares.

NOTA.- He creído oportuno tratar aquí de esta cuestión, porque, si bien se examina, ella pertenece á la *regla de tres simple,* En efecto:

100 (tiros) : 1 (tiro: : 119950 (metros) : x (metros)

PROBLEMAS

sobre *regla de tres simple* <36> pág, 23, Ap.

1º. Una pieza de paño, que tiene 22 varas de largo, ha costado 176 $ (*); ¿cuántas varas tendrá otra pieza que ha costado 284 $?

2º. Un batallón, que tenía que caminar 96 leguas, ha caminado 24 en 3 días; ¿en cuántos días caminará las leguas que faltan?

3º. ¿Cuántos pesos cuestan 168 manzanas, siendo 1 $\frac{1}{2}$ real el precio de cada docena?(**).

4º. 25 metros de paño han costado 612f.50, y proponen compra de 10 metros; ¿en cuánto será menester vender los 10 metros para ganar 3f. 75 por metro?

5º. Una fortaleza contiene 1,200 hombres, que tienen víveres para 4 meses; ¿cuántos hombres será preciso retirar para que los mismos víveres puedan durar 6 meses?

6°. 4 ¹. 5 de vino han costado 3f., 60; ¿cuántos litros se tendrían por 6f., 40?

7°. Han sido necesarios 72 metros de paño, de ancho de 1m.50c., para hacer cierto número de vestidos; ¿cuántos metros serían menester para el mismo número de vestidos, si el paño no tuviese sino 1 m. 20 de ancho?

8.° Una persona ha economizado 12,000 f en 9 años; ¿ en cuánto tiempo tendrá 54,000 f, haciendo igual economía?

9º. Una guarnición, compuesta de 360 hombres, tiene víveres para 15 días; ¿de cuántos hombres podrá ser aumentada para que, siendo una misma la ración, los víveres se consuman en 12 días?

REDUCCIÓN Á LA UNIDAD

593. Esta operación, que no es sino una especie de matiz de la, *regla de proporciones,* y que consiste en tomar la *unidad* por término de comparación, tiene la ventaja de ser más fácilmente comprensible, más natural, por decirlo así, que la proporción propiamente dicha, si bien puede considerarse ésta como más científica.

Voy á explicárosla, por medio del mismo ejemplo de que me he servido, para daros á conocer lo que se ha llamado *regla de tres.*

Siendo 4 *ducados el valor de* 9 *onzas de plata, se quiere saber cuánto valdrían 108 onzas del mismo metal.*

(*) El signo $ quiere decir *pesos.*

(**) 8 reales hacen 1 $.

Solución por medio de la reducción á la unidad

Para resolver la cuestión, preparo el cálculo y razono y opero como sigue:
opero como sigue:

Empiezo por reducir las onzas á la unidad, diciendo: *«9 onzas divididas por 9 dan 1 al cociente, que lo pongo bajo el* 9 » ……………………………………..

Y á fin de tener el valor de una onza en ducados, *«divido también por* 9 *los cuatro ducados, y tengo* $\frac{4}{9}$, *que los pongo bajo el* 4. » ………………..

«*Pero no es el valor de* 1 *onza lo que yo he menester, sino el valor de 108 onzas. Para obtener 108, y multiplico la* 1 *onza por 108, y tengo 108 onzas, que las pongo.*» ………………………………..

Para no alterar la relación anteriormente establecida, multiplico también por 108 la fracción correspondiente á los ducados, y $\frac{4 \times 108}{9}$ tengo que los pongo en la respectiva casilla……………………………………………..
quedando así resuelto el problema, pues lo que falta por hacerse es operación puramente mecánica. En efecto:

CÁLCULO

onzas	*ducados*
9	4
1	$\frac{4}{9}$
108	$\frac{4}{9}$ X 108

$$\frac{4}{9} \text{ X } 108 = \frac{482}{9} = 48 \textit{ ducados}$$

(NOTA.- En la práctica, como no se escribe el razonamiento, el cálculo se hace como aparece aquí al margen)…

Por vía de verificación, y para mejor fijar las ideas, resolvamos el mismo problema valiéndonos de la regla de proporciones………………

9	4
1	$\frac{4}{9}$
108	$\frac{4}{9}$ x 108

594. Damos á la regla de proporciones el nombre de *método directo,* para diferenciarlo de la reducción á la unidad, que llamaremos *método indirecto.*

Solución por el método directo (ó proporción propiamente dicha)

9 : 10 8: *:* 4*: x*

De ahí………………….. $x = \frac{108 \times 4}{9} = \frac{4}{9}$ X 108.

No podía ser otro el resultado; porque, bien examinados ambos métodos, sólo difieren en que, por este último, se ha resuelto la cuestión de un solo golpe, esto es, con una sola proporci6n, mientras que por el de la *reducción á la unidad,* se han establecido dos proporciones, que podemos llamar *proporciones indirectas,* por cuanto la comparación no se hace directamente entre las cantidades dadas, sino por intermedio de la *unidad.* En efecto, fijándonos en la precedente figura, que aparece al margen, podemos leerla de este modo:

(Primera proporción) 9 *onz.:* 1*onz.* : : 4 *duc.* : $\frac{4}{9}$ *de duc.*

(Segunda proporción) 1 *onz,* : 108 *onz,* : : $\frac{4}{9}$ *de duc.:* $\frac{4}{9}$ *de duc.* X 108.

Quedando demostrado que la *reducción á la unidad* no es más que un matiz de la *proporción propiamente dicha,* podemos deducir de ahí, como corolario, que: procediéndose por el *método indirecto* (reducción á la unidad), hay que emplear doble número de proporciones, que procediéndose por el *método directo* (proporción propiamente dicha).

REGLA DE TRES COMPUESTA

595. Se ha dado este nombre á las cuestiones de proporción en que se hallan expresadas varias *razones,* descomponibles en dos ó m*ás reglas de tres simples* (valiéndome de la expresión usual).

1ª. cuestión

596. 48 *obreros han hecho en* 15 *di as* 32 *metros de trabajo;* 27 *obreros, trabajando 20 di as, ¿cuántos metros harán del mismo trabajo?*

Este problema, como todos los de su género, puede resolverse por cualquiera de los dos métodos que acaban de estudiarse.

Queriendo proceder con arreglo al

Método indirecto

§ 1

se dispondrá el cálculo como se ha hecho precedente, escribiendo desde luego las cantidades conocidas, por el mismo orden en que se han enunciado, y cuidando de poner aisladamente la razón que se busca.

obreros	*días*	*32 : x* metros
48	15	32
		$\frac{32}{48}$
1		$\frac{32 \times 27}{48}$
27		
	1	$\frac{32 \times 27}{48 \times 15}$
	20	$\frac{32 \times 27 \times 20}{48 \times 15}$

En seguida se dirá: «Suponiendo que, en vez de 48 obreros no hay más que 1, pongo este 1 bajo de 48 (expresando así que se ha dividido este número por él. mismo)*;* pero entonces tengo que dividir también por 48 el número de metros . Mas si en lugar de 1 obrero hay 27 , éstos deben hacer 27 veces otro tanto; por, consiguiente, debo multiplicar también por este número la fracción $\frac{32}{48}$ lo que da $\frac{32 \times 27}{48}$, que escribo en la respectiva casilla.»

Quedando demostrado que el trabajo de 27 obreros, en 15 días, corresponde á $\frac{32 \times 27}{48}$ metros, paso á ocuparme en los días , y digo:

Suponiendo que estos 27 obreros han trabajado 1 solo día (que lo anoto bajo 15 como resultado de la división de 15 por 15), para no alterar la relación establecida, divido también por 15 el número de metros, y tengo la expresión fraccionaria $\frac{32 \times 27}{48 \times 15}$ que la pongo al lado de 1 día. Mas, como lo que yo busco es el trabajo correspondiente á 20 días, multiplico 1 por 20, y tengo el producto 20, que lo escribo debajo de un día; y, para no alterar la relación establecida, multiplico también por 20 la expresión fraccionaria, lo que da por producto $\frac{32 \times 27 \times 20}{48 \times 15}$, que lo escribo al lado 20, quedando así resuelto el problema».

§ 2

Solución el mismo problema
por el Método directo

48 obreros: 27 obreros:: 32 metros: *m*
15 días : 20 días : : *m* » : *x*

Razones
Obreros 48 : 27
Días 15 : 20

Metro 32 : x

La contestación depende aquí, no solamente de la razón que existe entre los obreros y los metros, sino también de la razón que hay entre los días.

Se podría sacar de la primera proporción el valor numérico de *m* y substituir con este valor el de *m* de la segunda proporción, quedando así convertida esta última en una proporción ordinaria con una sola incógnita, y fácil, por consiguiente, de resolverse; pero es más elegante (usando de la expresión de MM. Dumouchel et Dupuis) multiplicar las dos proporciones, término por término, suprimiendo *m,* por hallarse de antecedente y también de consiguiente (art. 584), y obtener por este medio la siguiente proporción:

$$48 \times 15 : 27 \times 20 :: 32 : x$$

de donde…………………….. $x = \frac{32 \times 27 \times 20}{48 \times 15}$;

resultado igual al que obtuvimos por el método indirecto, y que, reducido á su más simple expresión, es x = 24 *metros.*

Por lo que acaba de verse, podemos sentar como regla: que en cualquiera de las cuestiones conocidas con la denominación de regla de tres,

597. Se *puede operar primero por el* MÉTODO INDIRECTO *y después por el* MÉTODO DIRECTO, ó viceversa, como comprobante de la primera operación.

598. También puede hacerse la prueba por el mismo método que se hubiese empleado para resolver el problema, pero cambiando de incógnita. Así, después de haber resuelto el precedente problema, por cualquiera de los dos métodos, podía tomarse por incógnita el número de días (ó de obreros), diciendo:

48 *obreros han hecho* en 15 *días* 32 *metros* de *trabajo; 27 obreros ¿cuántos días habrán menester para hacer* 24 *metros del mismo trabajo?*

Si el cálculo diese por resultado *20 días,* se darán por bien hechas ambas operaciones; caso contrario, será preciso revisar ambas, hasta descubrir el error y corregirlo donde se le encuentre.

M.- Me ocurre hacer una observación, y es que: el empleo de m en la primera proporción no guarda consonancia con la tercera de las *razones* concernientes al problema que acaba de resolverse; pues en la tercera razón se escribió 32: x, mientras que en la primera proporción se ha puesto 32 :m. ¿Por qué, pues, se ha cambiado x con *m* de repente?

P.- La observación es muy justa ó, á lo menos, tiene todas las apariencias de tal; pero va á desvanecerse fácilmente.

599. En el problema, y consiguientemente en el cuadro de las razones, el valor de x está relacionado no sólo con los *metros,* sino también con los *días.* Ahora bien, como en la primera proporción sólo se obtiene el número de metros que trabajarían 27 obreros, en el concepto de haber estado en el trabajo durante 15 días, se sigue que ese valor no es el que se buscaba, pues el problema dice que los nuevos trabajadores han de estar á jornal *20 días.* Es por este motivo que se ha dado á ese valor el nombre de *m* (como incógnita que viene á suplir accidental y momentáneamente á x, y que habrá de desaparecer al fin del cálculo, sirviendo entre tanto de auxiliar para encontrar el valor buscado). A fin de determinar con precisión ese valor ha sido necesario establecer una segunda proporción combinando la razón de los metros con la de los días, es decir, haciendo entrar *m* como antecedente, y x como consiguiente, en la segunda razón, con lo que se ha precisado el valor de x.

2ª. *cuestión* (3ª. de Mr. Ad.)

600. 72 *obreros, trabajando durante 120 días,* 8 *horas por día, han hecho 720 metros de trabajo. Se pregunta: 60 obreros, trabajando* 64 *días,* 9 *horas por día, ¿cuántos metros harán del mismo trabajo?*

Razones

Obreros........................ 72 : 60
Días .... 120 : 64
Horas .... 8 : 9
Metros .... $\boxed{720 : x}$

Procediendo por el MÉTODO INDIRECTO, se tendrá sucesivamente:

Obreros	días	horas	metros	
72	120	8	720	
1			$\frac{720}{72}$	
60			$\frac{720 \times 60}{72}$	
	1		$\frac{720 \times 60}{72 \times 120}$	
	64		$\frac{720 \times 60 \times 64}{72 \times 120}$	
		1	$\frac{720 \times 60 \times 64}{72 \times 120 \times 8}$	
		9	$\frac{720 \times 60 \times 64 \times 9}{72 \times 120 \times 8}$ =	360 *metros*.

Solución del mismo problema por el método directo

$$72 : 60 :: 720 : \cancel{m}$$
$$120 : 64 :: \cancel{m} : \cancel{n}$$
$$\underline{8 : 9 :: \cancel{n} : x}$$

$$72 \times 120 \times 8 : 60 \times 64 \times 9 :: 720 : x$$

De ahí, x= $\frac{60 \times 64 \times 9 \times 720}{72 \times 120 \times 8}$ = 360 *metros,*

Explicación

Respecto al empleo de m en la primera y segunda proporciones, nada hay que decir, porque ya está ello explicado en el artículo 599; y sólo falta algo que decir respecto al empleo de n en la segunda y tercera proporciones.

Como en la primera y segunda no se obtuvo el valor incógnito sino con relación á los 60 obreros y á los 64 días, sin haberse tenido en cuenta las *horas* que debía durar el trabajo, es evidente que el valor arrojado por esas proporciones no es el buscado, y por eso se le ha dado el nombre de n (como incógnita que no es más que auxiliar de x, y que tiene que desaparecer al fin del cálculo). Para precisar el valor buscado, ha sido necesario formar una tercera proporción, combinada la razón de las horas (8 : 9) con la de los metros ($n : x$), quedando así precisado el valor de x en la proporción final, en la que han sido refundidas las tres que le preceden, en virtud de la multiplicación.

3ª. *cuestión.*

601. Hallándose resuelto el precedente problema y conocido el número de metros, podemos tomar como i*ncógnita* los 60 obreros, y formar con las demás cantidades el siguiente problema:

72 obreros, trabajando 120 días, 8 *horas por día, han hecho 720 metros de trabajo. ..Se pregunta: ¿cuántos obreros se necesitarían, trabajando* 64 *días,* 9 *horas por día, para hacer 360 metros?*

RAZONES

Obreros.. $\boxed{72 : z}$

días…… 120 : 64
horas…. 8 : 9
metros…720 : 360

INDIRECTO

Escribiendo, desde luego, en las respectivas casillas, los antecedentes 72, 120,8 y 720, se dirá.

Obreros	d.	h.	m.
$\frac{72 \times 120 \times 8 \times 360}{64 \times 9 \times 720}$	120 1 64	8 1 9	720 1 360

«Si en lugar de hacerse la obra en 120 días, hubiera de m, ejecutarse en un solo día, (que lo anoto bajo 120*)*, es claro que, á fin de compensar la estrechez del tiempo*,* debe aumentarse proporcionalmente el número de obreros multiplicándolo por 120 . Más, si en lugar de 1 día, tiene que durar el trabajo 64 días , el número de obreros deberá disminuir en proporción; por consiguiente, hay que dividir por 64 la cantidad 72 X 120 ; de modo que $\frac{72 \times 120}{64}$ expresa el número de obreros correspondiente á 64 días de trabajo, en el concepto de que la duración era 8 horas por día; mas como el problema expresa que han de ser 9 horas por día, tengo que modificar el resultado tenido. Al efecto, pasando á la casilla de las horas, digo: « Si en vez de 8 horas sólo se trabajase.1 hora (que la anoto bajo el 8), sería menester, para hacer todo el trabajo en una sola hora, aumentar proporcionalmente el numero de obreros, esto es, multiplicar $\frac{120 \times 72}{64}$ por, cual daría $\frac{72 \times 120 \times 8}{64}$; mas, siendo 9 las horas prescriptas en el problema, disminuyo proporcionalmente el número de obreros, dividiendo por 9 la fracción últimamente obtenida , que entonces vale $\frac{72 \times 120 \times 8}{64 \times 9}$, como expresión del número de obreros correspondientes á 9 horas de trabajo.» Por fin, pasando á la casilla de los metros, digo: «El resultado que acaba de obtenerse, expresa el número de obreros que han sido necesarios para trabajar 720 metros; pero como, según el problema, son 360 los metros que hay que trabajar, reduzco los 720 metros á la unidad, poniendo 1 bajo de 720 y, para no alterar la relación establecida, divido también el número de obreros por 720 , resultando de ahí la expresión fraccionaria ..$\frac{72 \times 120 \times 8}{64 \times 9 \times 720}$..; mas, siendo 360 los metros por trabajarse, multiplico por este número el metro y también el número de los obreros , lo que da por resultado la expresión fraccionaria $\frac{72 \times 120 \times 360}{64 \times 9 \times 720}$, quedando así resuelto el problema.

Reducido este valor á su expresión más Simple, resulta:

$$z = \frac{72 \times 120 \times 8 \times 360}{64 \times 9 \times 720} = 60 \text{ obreros.}$$

602. *Solución del mismo problema por el* MÉTODO DIRECTO

$$\begin{array}{c} 64 : 120 : : 72 : \cancel{m} \\ 9 : \quad 8 : : \cancel{m} : \cancel{n} \\ \underline{720 : 360 : : \cancel{n} : z} \\ 64 \times 9 \times 720 : 120 \times 8 \times 360 : : 72 : z \end{array}$$

$$z = \frac{120 \times 8 \times 360 \times 72}{64 \times 9 \times 720} \; 60 = \text{obreros.}$$

§ 4

Las cuatro precedente soluciones (referentes á las cuestiones 2ª. y 3ª.), dan lugar á las siguientes

OBSERVACIONES

603. 1ª. Cuando se procede por el método indirecto, hay que reducir á la unidad, sucesivamente, cada uno de los *términos de comparación* de las razones establecidas, excepto el de la incógnita.

604. 2ª. Las *cantidades dadas* no se reducen á la unidad sino en ciertos casos que veremos después; ellas sirven tan sólo para multiplicar ó dividir el valor que se busca.

605. 3ª. «Se ve *(dice Mr. Adhémar)* que en este género de cuestiones (3ª. *cuestión),* el tiempo influye sobre el resultado de una manera inversa, pues que, para mayor cantidad de tiempo, se necesita menor número de obreros, lo cual había hecho dar á este caso el nombre de *razón inversa;* expresión poco exacta, porque no es la razón la inversa, sino la manera en que ésta ha sido empleada.» <*y*> (ver Ap., pág. 34).

606. 40ª. En todo caso conviene tener presente que: cual- quiera que sea el método que se elija, *la piedra de toque,* por decirlo así, desde el principio hasta el fin de la operación, tiene que ser la razón en que figura la incógnita, sea m, n, x ó z, pues que cada una de las otras razones se toca con ella sucesivamente.

Como quiera que sea, tal manera de expresar las razones de una proporción da lugar, frecuentemente, á que el aprendiz se perturbe al plantear la cuestión. Para allanar esa dificultad conviene transcribir aquí las importantes reglas dadas para semejante caso, por MM. Dumouchel et Dupuis, y que deben aprenderse de memoria, á saber:

607. «En general, en toda regla de tres simple, hay dos números dados de la misma especie, y un tercer número de diferente especie que aquéllos, pero de la misma especie que el número buscado, *Se llaman, frecuentemente,* TÉRMINOS PRINCIPALES, á *los dos números dados de la misma especie, y* TÉRMINOS RELATIVOS, á *los otros dos números. Cuando los términos relativos crecen ó decrecen al mismo tiempo que los términos principales, se dice que los términos relativos son* DIRECTAMENTE *proporcionales á los términos principales; y cuando, al contrario, los términos relativos decrecen al mismo tiempo que los términos principales crecen* (ó viceversa), *se dice que los términos relativos son* RECÍPROCAMENTE *proporcionales á los términos principales.* En cada caso, para poner en proporción los números *propuestos,* basta examinar, desde luego, si el término incógnito debe de ser más grande ó más pequeño que el término conocido de la misma especie, y proceder como á continuación se *prescribe:*

608. *Regla* 1ª. Si el término incógnito debe de ser más grande que el término conocido de la misma especie, se planteará la proporción, teniendo presente que:

«El más pequeño término de la primera especie
es al más grande término de esta especie,,
como el más pequeño término de la segunda especie
es al más grande término de esta especie».

609. *Regla* 2ª. «Si el término incógnito debe de ser más pequeño que el término conocido de la misma especie, se establece la misma proporción, pero con la circunstancia de que la incógnita queda como término medio».

EJEMPLO

Suponiendo que 30 obreros han hecho cierto trabajo en 8 días, se pregunta: ¿qué número de obreros serán necesarios para hacer el mismo trabajo en 10 días?

8 *días :* 10 *días* :: x *obreros:* 30 *obreros;*

ó bien, si se quiere que la incógnita quede siempre al fin, se planteará la proporción, teniendo presente que:

> «El más grande término de la primera especie
> es al más pequeño término de esta especie,
> como el más grande término de la segunda especie
> es al más pequeño término de esta especie».

EJEMPLO

10 *días* : 8 *días* :: 30 *obreros : x obreros.*

4ª. *cuestión* (5ª. de Mr. Ad.)

610. *60 obreros, trabajando 7 $\frac{1}{2}$ días, 5 $\frac{1}{3}$ horas cada día, han hecho 360 metros. Se pregunta:* 48 *obreros, trabajando* 15 $\frac{2}{3}$ *días,* 9 $\frac{3}{4}$ *horas por día, ¿cuántos metros harán del mismo trabajo?* »

Razones dadas		*Razones reducidas*
Obreros…	60 : 48	60 : 48
Días…….	$(7 + \frac{1}{2}) : (15 + \frac{2}{3})$	$\frac{45}{6} : \frac{94}{6}$
Horas…..	$(5 + \frac{1}{3}) : (9 + \frac{3}{4})$	$\frac{64}{12} : \frac{117}{12}$
Metros…	$\boxed{360 : x}$	$\boxed{360 : x}$

$$x = \text{metros } \frac{360 \times 48 \times 94 \times 117}{60 \times 45 \times 64} = \frac{5499}{5} = 1099{,}8$$

Empleando el método de *reducción á la unidad,* cuando se llegue á la razón de los días, se dirá: « Si en vez de trabajar $\frac{45}{6}$ de día, no se trabajase sino $\frac{1}{6}$ de día, no se haría sino la 45ª. parte del trabajo; será preciso, pues, dividir por 45. Se ve por ahí que, tomando $\frac{1}{6}$ por término de comparación, se obtiene por razón el número entero 45, y se evita el ingreso del denominador 6 en el cálculo; así podría suprimírsele, y decirse que el número de jornales está en razón de 45 á 94, lo que vendría á ser lo mismo que multiplicar por 6 los dos términos de esta razón (art. 566). Por lo mismo, la razón de las horas sería 64 : 117.»

611. Para verificar la operación preceden te, se escribirá:

Razones

obreros …………………..	$\boxed{60 : x}$
Días………………………	45 : 94
Horas ……………………	64 : 117
Metros …………………..	360 : 1099,8

$$x = \text{obreros } \frac{60 \times 45 \times 65 \times 10998}{94 \times 117 \times 3600} = 48.$$

Explicación

En el valor de x se ha reemplazado 360m por 360m,0; en seguida, suprimiendo las comas, la razón entre las cantidades de trabajo, ha venido á ser:

3600 : 10998.

5ª. *cuestión* (6ª. de Mr. Adh,)

612. *60 obrero, trabajando* 8 $\frac{2}{3}$ *días, han hecho 360 metros de trabajo. Se pregunta: 72 obreros, trabajando* 11 $\frac{3}{4}$ *días, ¿cuántos metros harán del mismo trabajo?*

Razones dadas	*Razones reducidas*
Obreros ……… 60 : 72	*60 : 72*
Días …… (8 + $\frac{2}{3}$) : (11 + $\frac{3}{4}$	104 : 141
Metros.. $\boxed{360 \ : \ x}$	$\boxed{360 : x_1}$

X = metros = 585,69…..

613. Para hacer la prueba de esta operación, es preciso no reemplazar la incógnita por el valor decimal que acaba de obtenerse, porque el error proveniente de la aproximación, combinándose con los términos de otras razones, cambiaría su valor y, por consiguiente, el del resultado. Para evitar eso, se tomará por x la expresión fraccionaria $\frac{7614}{13}$; de suerte que la razón entre las cantidades de trabajo, será:

$$360 : \frac{7614}{13} = \frac{360 \times 13}{13} : \frac{7614}{13} = (360 \text{ X } 13 : 7614).$$

Tomando como incógnita el número de obreros, se tendrá:—

Razones

Obreros ………… $\boxed{\ldots 60 : x}$
Días ……………….104 : 141
Metros …… (360 X 13) : 7614

$$x = \text{obreros } \frac{60 \times 104 \times 7614}{141 \times 360 \times 13} = 72.$$

La transformación de $\frac{7614}{13}$ en decimales, no debe hacerse sino cuando se haya verificado la exactitud de esta expresión.

614.. NOTA.- Me abstengo de consignar otros problemas concernientes á la llamada *regla de tres compuesta,* porque en las Lecciones subsiguientes hemos de pasar en revista diversas operaciones que, aunque toman distintos nombres, según la clase de negocio ó especulación á que se refieren, no son otra cosa que la aplicación de la regla de tres, sujeta á los procedimientos que hemos denominado *reducción d la unidad y proporción propiamente dicha.*

CUESTIONARIO

¿Qué se entiende por *regla de tres?* (586).- ¿A qué se da el nombre de *media por diferencia?* (589).- Sírvase V., aclarar, con un ejemplo, la precedente definición (590 ó 591).- ¿Qué es *reducción á la unidad?* (593).- Tratándose de la regla .de tres, ¿qué llama V., *método directo* y qué *método indirecto?* (594).- ¿A qué se ha dado el nombre de regla de tres compuesta? (595).- Sírvase resolver el problema del articulo 596 por el método indirecto y en seguida por el directo.- ¿Cómo puede comprobarse cualquiera cuestión resuelta por la regla de tres? (597 y 598).- ¿Cuáles son los términos que hay que reducir á la unidad, cuando se procede por el método indirecto? (603).- Si el término incógnito ha de ser más grande que el término conocido de la misma especie ó viceversa, ¿de qué modo se planteará la proporción? (608 y 60).

CUADRAGÉSIMA-SEGUNDA LECCIÓN

Regla de interés

615. *Se llanta* INTERÉS *la suma que el prestamista conviene en dar al prestador del dinero, en compensación del beneficio que pudo éste haber obtenido empleando su dinero de otra manera.*

616. La cantidad prestada se llama EL CAPITAL.

617. Se toma ordinariamente por término de comparación *el interés* de *100* monedas durante *un año,* y es lo que se llama la *tasa* del interés. Así, cuando se conviene en que 100 pesos, por ejemplo, darán la utilidad de 5 pesos por año, se dice que el dinero se ha prestado al 5 por 100.

618. Hay dos especies de interés: el interés *simple* y el interés *compuesto. Se dice que el interés es simple, cuando el interés de cada año no se agrega al capital prestado; de suerte que permanece éste siendo el mismo hasta el fin del préstamo.*

La cuestión

619. Supongamos que se haya preguntado cuáles son los intereses de 6000p.s ([1]) *prestados por* 4 *años, al 8 por 100 al año.*

Solución por el *método indirecto* (reducción á la unidad) :

Razones:

capitales ……….	100 : 6000
intereses ……….	$\boxed{8 : x}$
tiempos …………	1 : 4

capitales	años	intereses	
100	1	8	
1		$\frac{8}{100}$	
6000		$\frac{8 \times 6000}{100}$	(a)
	4	$\frac{8 \times 6000 \times 4}{100}$	(b)

De ahí…………………… $x = \frac{8 \times 6000 \times 4}{100}$

Explicación. Obtenida la expresión fraccionaria $\frac{8 \times 6000}{100}$ se ha pasado á determinar en la siguiente línea, los intereses correspondientes á 4 años, diciendo: «Si en vez de 1 año han corrido 4 años, los intereses deben ser 4 veces tan grandes como el interés de 1 año; por consiguiente, multiplico por 4 esa expresión, quedando así resuelto el problema.»

OBSERVACIÓN

Nótese de paso que, de las expresiones (a) y (b), se pueden deducir dos importantes fórmulas, á saber:

620. 1ª. «*Para ajustar los intereses de un año, basta multiplicar el capital* (prestado) *por el* TIPO *del interés, y dividir el producto por 100.*

621. 2ª. *Para obtener* los intereses correspondientes á un tiempo mayor *ó* menor que 1 año, hay que multiplicar el capital por el número que expresa EL TIPO, multiplicarlo además por el del TIEMPO, y dividir todo el producto por 100. [Se entiende que, cuando el tiempo es menor que un año, hay que expresarlo en forma de fracción de año, por ejemplo: si el tiempo transcurrido fuere 3 meses, se le expresará por $\frac{1}{4}$ *(de año).* Si hubiese días, por ejemplo, 21 días, se expresará el tiempo en esta forma: $\frac{21}{360}$.]

----

(1) Abreviatura de *pesos.*

622. *Solución del mismo problema por el método directo* (proporción propiamente dicha)

$$100 : 6000 :: 8 : \cancel{m}$$
$$\underline{.\qquad 1 : \quad 4 :: \cancel{m} : x}$$
$$100 \times 1 : 6000 \times 4 :: \; 8 : x$$

De ahí, $x = \frac{6000 \times 4 \times 8}{100}$

2ª. *cuestión* (Dum., pág. 168)

623. Se quiere saber, *¿á qué tasa se han prestado 6000 francos para producir 120 francos de intereses en* 3 *meses?*

Solución por el método indirecto

Prevención. Como en el presente caso falta el término de comparación de los intereses, que es el *tanto* por ciento, en vez de encabezar el cálculo con los términos de comparación (como se hace ordinariamente) (*), vamos á encabezarlo con las cantidades dadas y reducir éstas á la unidad, razonando y operando como sigue:

Razones:

Capitales ………… 6000 : 100
Tiempos …………. 3 : 12
Interés ………… $\boxed{120 : x}$

6000 f., en 3 meses, deben producir . 120f de interés……………………......
luego 1f., en 3 meses, producirá sólo.. ..$\frac{1}{6000}$....de esos intereses
1f., en mes, producirá la $\frac{1}{3}$ parte de $\frac{120}{6000}$ ……………………………….
100f., en 1 mes, producirá 100 veces otro tanto…………………………..
120f., en 12 meses, producen 12 veces ese último valor……………………….
De ahí x = $\frac{120 \times 100 \times 12}{6000 \times 3}$ =8f.(tipo de interés).

Capitales	Tiempo	Intereses
6000	3	120
1		$\frac{120}{6000}$
	1	$\frac{120}{6000 \times 3}$
100		$\frac{120 \times 100}{6000 \times 3}$
	12	$\frac{120 \times 100 \times 12}{6000 \times 3}$

ADVERTENCIA.- Para entendernos más fácilmente en lo, sucesivo, al tratar de cuestiones análogas á las que nos ocupan, adoptaremos las siguientes

Denominaciones:

624. *Tipo del capital* = 100 monedas.
« « *interés* = el tanto por ciento.
« « *tiempo* = (12 meses ó 360 días).

625. Solución del precedente problema por el método directo:

$$6000 : 100 :: 120 : \cancel{m}$$
$$\underline{.\quad 3 : \; 12 :: \; \cancel{m} \; : \; x}$$
$$6000 \times 3 : 100 \times 12 :: 120 : x$$

De ahí, $x = \frac{100 \times 12 \times 120}{6000 \times 3}$ = 8f *(tipo del interés).*

OBSERVACIONES

De cualquiera de las dos precedentes soluciones, se pueden deducir las siguientes fórmulas:

(*) Véanse los artículos 603 y 604.

626: 1ª. Dado el capital, los meses que ha permanecido en préstamo y los intereses producidos, *para encontrar el* TIPO *del interés, se multiplicarán los intereses por 100 X 12, y se dividirá este producto por el número del capital* X *el número de los meses.*

627. 2ª. Si en la cuestión sólo se trata de años, entonces *bastará multiplicar los intereses por 100, y dividir el producto por el capital* X *el número de años.*

3ª. *cuestión* (3me probo Dum., p. 168).

628. *¿Cuál es el capital que produce 120 francos de intereses, en* 3 *meses, al* 8 %*?* (*).

Razones dadas…..

Capitales …………	$\boxed{x : 100}$
Intereses …………..	8 : 120
Tiempos …………	12 : 3

Solución por el método indirecto.

8 f. de interés, en 12 meses, son producidos por un capital de 100 f…..
por $\frac{1}{8}$ parte de dicho capital ……..
1f., de interés, en 1 mes, lo sería por un capital igual á $\frac{100}{8}$ X 12 ……..
120 f. de intereses, en 1 mes, lo serían por dicho capital multiplicado por 120 ………………………
120 f. de intereses, en 3 meses, lo son por igual capital dividido por 3………………………………
De ahí, x = $\frac{100 \text{ X } 12 \text{ X } 120}{8 \text{ X } 3}$ =6000f. (capital buscado).

Intereses	Tiempos	Capitales
8	12	100
1		$\frac{100}{8}$
	1	$\frac{100 \times 12}{8}$
120		$\frac{100 \times 12 \times 120}{8}$
	3	$\frac{100 \times 12 \times 120}{8 \times 3}$

Solución del mismo problema por el método directo

$$\begin{array}{l} 8 : 120 :: 100 : m \\ \underline{\quad 3 : \ 12 :: \ m : x \quad} \\ 8 \times 3 : 120 \times 12 :: 100 : x = \frac{120 \times 12 \times 100}{8 \times 3} = 6000 \end{array}$$

4ª. *Cuestión*

629. *¿En cuánto tiempo 6000 francos dan 120 francos de intereses al* 8 *%* ?

Razones ……….

Capitales …………..	100 : 6000
Intereses …………..	8 : 120
Tiempos ……………	$\boxed{12 : x}$

(*) El signo %, equivale á decir *por ciento.*

Solución indirecta.

	Capital	Interés	Tiempos
100 f. capital, dan 8 f. de interés en 12 meses…………………………….	100	8	12
1 f. para dar 8.f. de interés necesita 100 veces 12 meses………………	1		12 x 100
1 f. para dar 1 f. de interés necesita menos tiempo, esto es……………..		1	$\frac{12 \times 100}{8}$
6000f, para dar 1f. de interés sólo necesita $\frac{1}{6000}$ de $\frac{12 \times 100}{8}$……….	6000		$\frac{12 \times 100}{8 \times 6000}$
6000 f, para dar 120 f, de interés necesita mayor tiempo, esto es, 120 veces otro tanto que el anterior……		120	$\frac{12 \times 100 \times 120}{8 \times 6000}$

12 x 100 X 120

De ahí, $x = \frac{12 \times 100 \times 120}{8 \times 6000}$ =meses.

Es de advertir que en el presente caso el tiempo obra en sentido inverso que el capital, esto es, haciendo que la duración del contrato disminuya de su tipo, á medida que el capital dado ha aumentado sobre el suyo.

Solución directa

$$6000 : 100 :: 12 : m$$
$$\underline{8 : 120 :: m : x}$$
$$6000 \times 8 : 100 \times 120 :,: 12 : x = \frac{100 \times 120 \times 12}{6000 \times 8} = 3$$

PREVENCIONES

630. Cuando se diga *capital,* simplemente, ha de entenderse que se habla del capital 100 (que es cantidad fija), á diferencia del *capital dado* (cantidad variable), que se refiere á la suma prestada ó colocada á intereses.

Cuando se diga el *interés,* simplemente, se ha de entender que se habla del interés legal ó convencional, correspondiente al capital 100, á diferencia de los *intereses,* que representan el beneficio producido por el capital dado.

Cuando se diga *el tiempo,* simplemente, ha de entenderse que se trata del término de 1 *año,* ó de sus equivalentes 12 meses ó 360 días (cantidad fija), á diferencia del *tiempo dado* (cantidad variable), que se refiere al período de tiempo que el capital dado ha permanecido ó debe permanecer á intereses.

Finalmente, cuando se diga que *«el Tiempo influye* en el cálculo en taló cual sentido», no ha de comprenderse que se habla del término de comparación 1 *año* (12 meses ó 360 días), ni del tiempo durante el que los fondos han estado ganando intereses, sino del encadenamiento de los instantes y momentos, personificándose así, en cierto modo, la entidad abstracta llamada *tiempo.* Igual personificación ha de sobrentenderse siempre que se hable de *la influencia* que ejerce el Capital ó el Interés en las operaciones del cálculo; pues entonces estos nombres significan entidades abstractas, ideales solamente, como cuando, hablando de la guerra, se dice: «La Victoria es caprichosa».

Nota.- Para fijar más la atención, esas personificaciones se han expresado con iniciales mayúsculas, en el presente tratado.

CUESTIONARIO

¿Qué es *interés?* (615).- ¿Qué es *capital?* (616).- ¿Qué es lo que se llama *tasa del interés?* (617).- ¿Qué se entiende por interés simple? (618).- Sírvase usted poner un ejemplo en que los *intereses* sean la incógnita 1619 y 622).- ¿Cómo se ajustan los intereses corridos en un año? (620).- Y, cuándo el tiempo es mayor ó menor que un año? (621).- Sírvase poner un ejemplo en que la *tasa* sea la incógnita (628 y 625).- Qué entiende usted por *tipos* del capital, del interés y del tiempo? (624).- ¿Qué se hace para encontrar el tipo del interés? (626 y 627).-Sírvase poner un ejemplo en el que la incógnita sea el *capital* (62S).- Otro ejemplo en que el *tiempo* sea la incógnita (629).

CONFERENCIA SOBRE LA 42ª. LECCIÓN

R. Hablando de las *Razones,* en la 1ª. Cuestión se hallan colocados los *términos de comparación* á la izquierda de las *cantidades dadas,* y en la 2ª. Cuestión están á la derecha. ¿Cuándo deben estar al uno y cuándo al otro lado?

P. Hija mía, esos son detalles de poca ó ninguna importancia, y el detenerse en pequeñeces es perder el tiempo.

R. Pero, papá, tú mismo nos has dicho ¡tantas veces! que, por lo regular, los maestros y profesores, olvidando los tropiezos y quebraderos de cabeza que experimentaron cuando fueron aprendices, los pasan por alto, y se explican frecuentemente como para quien entiende la materia y no como para enseñar al que no sabe.

P. Cierto; y ya que tu pregunta nos lleva á ese terreno, debo empezar por darte la razón, y continuar diciendo que:-

631. *los términos de comparación, con tal de que estén en una misma columna, pueden colocarse á la derecha ó á la izquierda de las cantidades dadas, según uno quiera, como sucede con el multiplicando y el multiplicador, que no tienen puesto fijo.* M.r Adhémar acostumbraba establecer las razones de modo que la incógnita quedase en la columna de la derecha; nosotros, sin embargo, contando con la benevolencia de M.r Adhémar, convendremos para lo sucesivo en dar á los *términos de comparación,* por vía de preferencia, la primera columna (la de la izquierda), aun cuando en dichos términos se encuentre la incógnita.

M. A mí se me presenta más de una dificultad respecto á la manera como se han planteado las proporciones relativas á la 2ª. Cuestión, arto 625. Desde luego no puedo darme cuenta cabal de por qué se ha puesto *m* como término medio en la segunda proporción, siendo así que en la primera se hallaba como término extremo; después, no puedo explicarme claramente la relación que existe (segunda proporción) entre la razón de los tiempos y la de los intereses.

632. P. Desde un principio se tuvo el propósito de colocar la incógnita al extremo derecho y, con tal mira, en la primera proporción, se puso m como consiguiente de los intereses 120; pero nada más que como lugarteniente de x, y ésto porque el valor de m no es, ni con mucho, el valor buscado, que hemos querido llamar x (*). En efecto, la primera proporción sin tener en cuenta la acción del Tiempo, *sólo* ha considerado *los intereses* que corresponden al capital 100f en el término de ordenanza por decirlo así, esto es, *en* 12 *meses.* Es como si se dijera: «Si á 6000f *(capital dado)* han correspondido 120f de i*ntereses,* á 100f de capital ¿qué intereses corresponderán?»

Resolviendo esta proporción, se tiene:—

$$6000 : 100 : : 120 : m = 2\text{f} \textit{ (intereses).}$$

Aquí conviene hacer una importante observación, y es: que si bien este resultado es exacto, no satisface á la cuestión. Es exacto, porque, no habiéndose hecho mención del tiempo, se sobrentiende que está rigiendo el término de ordenanza, es decir 12 meses (=1 año).

(*) Véase, para mayor claridad, el art.599.

Por vía de digresión, hagamos la prueba de ver qué intereses producen 6000f al 2 por ciento al año, sirviéndonos al efecto de la fórmula A (art. 620):—

$$\frac{6000 \times 8}{100} = 120 \textit{ (intereses).}$$

Mas, fijándonos en la condición impuesta en el problema —de que el beneficio 120f ha de ser producido no en 1 *año* sino en 3 *meses—,* resulta que el tipo *m* (= 2f) no satisface á la cuestión, y que debe ser más grande para haber de dar dicho beneficio en *sólo* el trascurso de 3 meses (= $\frac{1}{4}$ de año). Y ¿en qué proporción deberá crecer el valor de *m* para dar 120f de intereses en este breve término? La segunda proporción responde á esta pregunta, diciendo que *m* debe estar contenida en *x* (tipo buscado) tantas veces, cuantas veces los 3 meses dados están contenidos en 12 meses *(tipo del tiempo).* Ahora bien; como 3 está contenido en 12 *cuatro veces,* se sigue que *m* ha de estar también contenido en *x* cuatro veces ó, en otros términos, que, *multiplicando por* 4 *el valor numérico de* M, *se ha de obtener el valor numérico de* x.

Refundidas ambas proporciones en una sola, multiplicándose aquéllas término por término, se tiene como resultado final *x* = 8f .

Para convencerse de que éste es el tipo buscado, hágase la prueba.

Según la fórmula *a,* se tiene $\frac{6000 \times 8}{8}$ =480f intereses…..

Según la fórmula *b,* se tiene $\frac{6000 \times 8 \times \frac{1}{4}}{100}$ = 120f, intereses en 3 meses = $\frac{1}{4}$ de año.

En resumen:—

633. Las operaciones conducentes á resolver la 2ª. Cuestión, contienen dos partes, á saber:

1ª. parte: buscar el *tanto* por ciento al año, para que el capital 6000 produzca 120f de beneficio *en* 1 *año.*

2ª. parte: buscar el *tanto* por ciento al año, para que dicho capital produzca el mismo beneficio (120f) en el término de 3 meses.

NOTA.- Las operaciones conducentes á resolver las Cuestiones1ª. 3ª. y 4ª. contienen también dos partes, que se hallan ejecutadas en las dos proporciones del caso. Conviene, por tanto, ejercitarse en explicar el sentido ú objeto de cada proporción.

634. Es de notar que, en la presente cuestión, el Capital y el Interés (ver la primera proporción, arto 625) han obrado en contradicción, pues que siendo 100 el término de comparación (ó *tipo del capital),* ha subido el capital á 6000; al paso que los intereses han bajado de 120f á 2f .

Es de notar igualmente que, en la segunda proporción, el Tiempo y el Interés han obrado también en contradicción; pues que el tiempo ha hecho bajar el término del contrato, de doce meses *(tipo)* á 3 meses *(tiempo dado);* y que el Interés ha hecho subir los intereses 2f, representados por *m,* á 8f representados por x (interés tipo).

No sucedió lo mismo en la 1ª. Cuestión, porque en ella se trataba de buscar, no el *tipo de interés,* sino los intereses producidos por el capital dado. Examinando las dos proporciones del caso (art. 622), se vé: que el Capital y el Interés, el Tiempo y el Interés, han obrado en perfecta armonía,' haciendo en ambas proporciones que las *cantidades dadas* vayan en aumento comparativamente á sus respectivos tipos (*).

Ahora podéis ya comprender, hijos míos, por qué me he empeñado en hacer una distinción, no de número gramatical, sino de sentido, entre el *interés* y los *intereses.*

R. Respecto á las dos proporciones de la 4ª. Cuestión, desearía yo algunas explicaciones; pues no alcanzo á comprender el motivo de haberse puesto, al principio de la primera proporción, 6000 : 100, y no 100 : 6000, que parece lo más natural; tampoco puedo darme cuenta de cómo se sabe, á primera vista, que el valor de m es inferior á 12 meses.

635. P. Podría, ciertamente, haberse puesto 100: 6000; pero entonces la incógnita m habría tenido que ser *término medio,* y yo quería que fuese *término extremo.* En cuanto al valor de m, está casi á la vista que él debe ser más pequeño que 12 meses, por la sencilla consideración de que, los *intereses producidos* son pequeños para ser el producto de 1 *año* (= 12 meses). En efecto; recurriendo á la fórmula A, se tiene $\frac{6000 \times 8}{100}$. Ahora, para dividir por 100 el valor de esta expresión fraccionaria, basta suprimir dos ceros en el numerador, é instantáneamente se vé que 60 X 8 son .480, que importarían, los intereses de un año; y como los *intereses dados* en el problema no son más que 120f, he concluido que *el tiempo* que los ha producido es más pequeño de 12 meses (**). Por otra parte, siempre que se trata de obtener un beneficio determinado, con capitales desiguales, el capital mayor debe producir ese beneficio en menos tiempo que el capital menor. Para hacer palpable esta afirmación, supongamos que:

100f producen un beneficio de 8f en	1 año
200f producirían él mismo beneficio de 8f en	$\frac{1}{2}$ »
300f » » » » » » »	$\frac{1}{3}$ »
400f » » » » » » »	$\frac{1}{4}$ »

Sin ir más lejos, puede concluirse que: —

636. Para un capital 2, 3, 4….. veces tan grande como el *capital tipo,* basta una $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$...... te del *tiempo tipo.*

Eso establecido, salta á la vista que el capital 6000f, para haber de producir el mismo beneficio que el capital 100, ó sea para dar 8f de intereses, no ha menester sino un tiempo muy breve, de donde se sigue que m (tiempo referente al capital 6000) tiene de ser mucho menor que 12 meses; y á la prueba,

$$6000 : 100 :: 12 : m = \frac{1}{5} \quad \textit{de mes.}$$

(*) Se dice «*ha aumentado*» *ó* «*ha disminuido*» el capital, cuando, comparado el capital dado con el capital tipo (que es constantemente 100), resulta aquél más grande ó más pequeño que éste. Verbigracia: si el capital dado es 200, se dice que *ha aumentado* otro tanto de lo que es el capital tipo; si el capital dado es 50, se dice que *ha disminuido* á una $\frac{1}{2}$. Es por eso que el capital 100 se llama *tér1nino de comparación.*
De igual modo ha de entenderse siempre que se diga que aumenta ó que disminuye el tiempo ó el interés.

(**) Si la cantidad dada no terminase por ceros, verbigracia 6547, se podría (para facilitar el cálculo mental) reforzar la cifra de la izquierda con una unidad desechando todas las demás cifras de la derecha, y hacer la multiplicación por el *tipo de interés,* esto es, $\frac{7000 \times 8}{100}$ = 70 x 8 = 560 (*intereses aproximativos).*

Para acabar de cerciorarnos, veamos el beneficio de 6000f al 8%, en $\frac{1}{5}$ de mes, reduciendo previamente esta fracción á su expresión más simple:

1 mes tiene 30 días,
» » 6 » ;

y como el ario consta de 360 días, seis días vienen á ser $\frac{6}{360}$.

Introduciendo este valor ($\frac{6}{360}$) en la fórmula B ya citada ella da, $\frac{6000 X 8 X 6}{100 \text{ X } 360}$ =8f *(intereses)*

J. Y ¿para qué ocuparse en averiguar el tiempo necesario á efecto de que 6000f produzcan el mismo beneficio que 100f, siendo así que de lo que se trata en la cuestión, es de saber en qué tiempo 6000f darán 120f de beneficio?

637. P. Es que por el hilo se saca el ovillo. En la reducción á la unidad, por ejemplo, se ocupa uno, de pronto, en averiguar cuánto tiempo se necesita para que 6000f de capital den 1f de intereses; obtenido el resultado, para saber en cuánto tiempo darán esos 6000f el beneficio de 120f, basta multiplicar por 120 ese resultado. Así también, la primera de las dos proporciones que nos ocupan, sólo nos da el tiempo necesario para que los 6000f de capital produzcan el *tipo de interés* (8f); mas, con ese descubrimiento, ya se tiene hecha media tarea, pues lo que falta es asunto de una simple regla de tres, que se halla formulada en la segunda proporción, la que puede traducirse de este modo: —

«Si para tener 8f *de intereses se necesita un tiempo* m, *para obtener 120f de intereses, ¿cuánto tiempo será menester* ?»

Es de notar (y fijaos bien, hijos míos, en lo que voy á decir); es de notar, digo: que la *reducción á la unidad* obtiene el resultado final por una simple multiplicación (ó división en su caso), esto es, multiplicando el tiempo correspondiente á 1f de intereses, por 120; pero lo hace así á mérito de reducido el *tipo 8* á la unidad, en tanto que la *regla de tres,* habiendo conservado ese tipo intacto, ha resuelto la cuestión arreglando las razones de la segunda proporción, de tal modo que x *(consiguiente)* contenga á. m *(antecedente)* tantas veces cuantas 120 *(consiguiente)* contiene á 8 *(antecedente).*

638. A mayor abundamiento, ahora que conocemos que m es igual á $\frac{1}{5}$ de mes, y que x es igual á 3 meses, veamos, si las razones de la primera y segunda proporciones están conformes.

Primera proporción:

Razón de los capitales, 6000 : 100 = $\frac{6000}{100}$ = 60
» » » tiempos 12 : $\frac{1}{5}$ = 12 X $\frac{5}{1}$ = 60

Segunda proporción:

Razón de los intereses, 8 : 120 = $\frac{8}{120}$ = $\frac{1}{15}$

» » » tiempos, $\frac{1}{5}$: 3 = $\frac{1}{5 \text{ X } 3}$ = $\frac{1}{15}$

En resumen

Planteadas las dos proporciones como queda dicho, se obtienen dos ventajas, á saber:

639, 1ª. *Que la verdadera* incógnita, que es x (y que, según se ha visto, tenía que ser más grande que m) venga á su *consiguiente* de m en la segunda proporción, y obligar por este medio á que el más grande de los intereses (que en la cuestión es 120) sea también *consiguiente;*

640. 2ª. (y ésta es la principal ventaja): que, por ese medio, se ha conseguido que desaparezca *m,* cuyo valor provisional, si bien era muy útil para el cálculo, no podía ni debía aparecer en el resultado final; y, á efecto de que desapareciera, se la hizo figurar como consiguiente en la primera proporción, y como antecedente en la segunda…..

R. Quisiera que nos hicieras palpar ¿cómo así, cuando una cantidad figura como antecedente en una de las proporciones y como consiguiente en la otra, llega á desaparecer?

641. P. Para demostrarlo, pongamos en las dos proporciones el valor numérico *m* (que ya hemos visto es $\frac{1}{5}$), y tendremos:—

$$6000 : 100 :: 12 : \tfrac{1}{5}$$

$$8 : 120 :: \tfrac{1}{5} : x.$$

Refundiendo ambas proporciones en una sola, por la multiplicación, término por término, resulta: —

$$6000 \times 8 : 100 \times 120 :: 12 \times \tfrac{1}{5} : \tfrac{1}{5} \times x.$$

Ahora bien; siendo, en toda proporción, el producto de los medios igual al de los extremos, se obtiene: -

$$6000 \times 8 \times \tfrac{1}{5} \times x = 100 \times 120 \times 12 \times \tfrac{1}{5}$$

$$\text{de donde } x = \frac{100 \times 120 \times 12 \times \frac{1}{5}}{6000 \times 8 \times \frac{1}{5}}$$

Sabemos, por otra parte (art. 412), que, para reducir una fracción á su expresión más simple, hay que desembarazar el numerador y el denominador de sus factores comunes, entre los cuales es aquí el más visible el factor $\frac{1}{5}$ (equivalente de *m* en ambas proporciones), y, por cierto, que era mejor habernos desembarazado de él, á tiempo de efectuar la multiplicación de las dos proporciones.

M. ¿Por qué reglas ó principios podremos guiarnos para plantear debidamente las proporciones concernientes á la Regla de interés?

P. La cosa es ardua, y no hay reglas fijas, que yo sepa, establecidas sobre el particular. Mas, en su defecto, voy á manifestaros lo que yo hago.

Sea, por ejemplo, la 2ª. *cuestión* (art.623):

642. Enunciado el problema (*) (pongo desde luego la razón de los intereses, colocando como antecedente 120 (*intereses dados)* y como consiguiente *m (interés tipo*): —

:: 120 : *m.*

En seguida, para colocar convenientemente los dos términos de los capitales, me digo: «6000 *(capital dado)* debe contener á 100 *(capital tipo)* tantas veces cuantas veces 120 (*antecedente)* contiene á *m* (*consiguiente*); luego debo poner en ese mismo orden los capitales, es decir, de mayor á menor:—

6000 : 100 ::

(NOTA - Colocándose esta segunda razón en la misma línea que la de los intereses, se tendría;
—6000 : 100:: 120: *m),*

(*) *¿A qué tasa se han prestado 6000*f *para producir 120*f *de beneficio, en* 3 *meses?*

643, Para establecer la segunda proporción, pongo resueltamente $m : x$ debajo de la razón de intereses, establecida ya en la primera proporción:—

$$:: m: x$$

En seguida digo: m expresa el valor *del tipo,* en el concepto de que el préstamo ha durado 12 meses; pero el problema anuncia que la duración ha de ser 3 meses; luego, para que, en este tiempo, se obtenga el mismo beneficio (120f de intereses), es menester que el *verdadero tipo* (representado por x) sea más grande que m, Según esto, si x *(consiguiente)* debe ser *más grande* que m *(antecedente),* preciso es que el *consiguiente* de los tiempos sea también más grande que su *antecedente;* por tanto, debo poner 3: 12».

[NOTA - Colocándose en una sola línea las dos razones, resultaría: —

$$3 : 12 :: m : x]$$

644. Bueno es grabar en la mente que, en la primera proporción, el Capital y el Interés han obrado en sentido inverso, esto es: que el Capital ha hecho subir el *capital tipo* 100f, á 6000 f *(capital dado),* mientras que el Interés ha hecho bajar el *beneficio dado,* 120f, á m. (= 2f), como *beneficio* correspondiente á cada 100f del capital dado, ó sea *tipo de interés* (accidental);

Que, en la segunda proporción, el tiempo y el interés han obrado también en sentido contrario; pues que, para un tiempo de 3 meses, *menor* que su tipo (=12 meses), se ha asignado un interés x (= 8 f), *mayor* que el *tipo accidental* m (= 2f).

OTRO EJEMPLO

Sea el de la 4ª. *cuestión* (*):

645. *Pongo, desde luego, la razón de los tiempos, esto es,* 12 meses como antecedente y m como consiguiente, previendo ya que el tiempo buscado ha de ser necesariamente más pequeño que 12 meses, por el consabido fenómeno de que el capital mayor (aquí *6000, capital dado)* ha menester un tiempo menor para haber de producir el mismo beneficio que el capital menor (aquí 100, *capital tipo)* [art. 636].

En seguida, para colocar convenientemente los dos términos de los capitales, me digo: «6000 es mucho *mis grande* que 100; luego, 6000 debe ser aquí *antecedente* y 100 *consiguiente;* de modo que

$$6000 : 100 :: 12: m$$

Para establecer la segunda proporción, pongo resueltamente $m : x$ debajo de la razón de los tiempos, establecida en la primera Proporción,

$$: : m : x$$

En seguida, digo: «m expresa el valor del tiempo, en el concepto de que el beneficio del capital 6000 hubiera sido 8f solamente; pero el problema anuncia que el beneficio ha sido 120 f; luego, para que esta cantidad haya sido producida por el mismo capital 6000, es menester que el tiempo buscado, x, sea *más grande* que *m;* luego, si *m (antecedente)* es *más pequeño* que x *(consiguiente),* debo colocar en el mismo sentido los dos términos relativos á los intereses, esto es, como *antecedente* el tipo de interés 8f (cantidad *menor),* y como *consiguiente* los intereses dados (cantidad *mayor*).

[Conviene hacer notar que en la primera proporción, el capital y el tiempo han obrado en sentido inverso, ó bien. el tiempo ha hecho disminuir la duración respecto á su tipo, cuando

----

(*) *¿En cuánto tiempo 6000 f. dan 120 f.. de intereses, al* 8 %?

el capital ha hecho subir el *capital dado* sobre su tipo; y que, en la segunda proporción, el interés y el tiempo han obrado en armonía; pero el interés *ha aumentado* el beneficio 8f (que representaba tácitamente en la primera proporción) á 120 f; y el tiempo, que en la primera proporción valía $\frac{1}{5}$ de mes), ha aumentado á 3 meses.]

Me he extendido tal *vez* demasiado; pero á ello me han inducido, por una parte, las observaciones que me habéis hecho y, por otra, la necesidad de llenar cierto vacío; pues ni el maestro Adhémar ni los señores Dumouchel y Dupuis han dado bastante luz sobre los puntos que habéis tocado, ya sea por no abrumar la mente del discípulo á fuerza de explicaciones, ya sea porque hubiesen considerado que la reducción á la unidad era preferible al procedimiento que yo me he permitido llamar *Método directo,* Sea de ello lo que fuere, es el hecho que, tanto Mr, Adhémar como los otros señores, han resuelto todas las cuestiones de *Regla de tres* de *Regla de interés, de sociedad.* etc" por el método de *reducción á la unidad.* Aparte de esto, á más de un aficionado á Matemáticas he oído decir que «se pueden establecer reglas fijas para haber de combinar dos ó más proporciones.» Sin embargo, he afrontado yo ese trabajo, estimulado por los mismos señores Dumouchel y Dupuis, quienes, proponiendo como de paso un ejemplo sobre la materia, han dicho que «ese procedimiento (el *método directo)* es más *elegante»…* y agregaré, por mi parte: *más científico* y *más valiente y breve.*

¡Ojalá, hijos míos, que las advertencias y aclaraciones precedentes puedan serviros de algún provecho: será mi mejor recompensa!

Las cuatro cuestiones que hemos dilucidado últimamente, pueden servir de pauta para resolver toda otra cuestión concerniente á la Regla de interés simple; pues cualquiera que ésta sea, se relacionará con algunas de aquéllas, como luego lo veremos. Conviene entre tanto establecer aquí algunas reglas, como consecuencia de los cálculos hechos en dicha Lección y de las demostraciones contenidas en la última Conferencia.

REGLAS

646, 1ª. Cuando la incógnita representa llanamente *los, intereses* producidos por una *suma dada,* en un lapso de tiempo determinado, el capital, el interés y el tiempo ejercen su acción en armonía, esto es, bajan ó suben uniformemente, como se ve en la 1ª. cuestión (art. 619).

647. 2ª. Cuando la incógnita expresa *el tipo de interés, el capital y el tiempo obran en sentido inverso que el interés (2ª. cuestión, art. 623).*

648. 3ª. Cuando la incógnita entraña *el capital que se solicita,* entonces el interés obra en armonía con el capital, y el tiempo en desacuerdo con el capital (3ª. cuestión, articulo 628).

649. 4ª. Cuando la incógnita recae sobre *la duración del tiempo,* el capital obra en sentido contrario que el tiempo, y el interés en armonía con éste (4ª. cuestión, art. 629). Ahora, por vía de ejercicio, vamos á ocuparnos en resolver algunas otras cuestiones que atañen á la *Regla de interés.*

5ª. *cuestión* (5.me Probleme de Dumouchel et Dupuis)

650. *600* $, *colocados al* 6 $\frac{1}{2}$ %, *¿qué suma formarán al cabo de* 15 *días, reuniendo los intereses al capital?*

Solución. Hay que buscar, desde luego, los intereses que tienen haber producido en 15 días los 600 $; y, procediendo al efecto, como en la 1ª. *cuestión,* resulta 1 $\frac{5}{8}$ de intereses que, agregados al capital, hacen 601 $\frac{5}{8}$ $.

6ª. *cuestión* (6,me Probo de Dumouchel, p, 160)

Como comprobante del resultado que antecede, sea:

651, *600* $, *¿á qué tipo de interés han debido formar en* 15 *días el valor de 601* $\frac{1}{5}$ $?

Solución. Deduciendo, desde luego, de la suma total el capital (601 $\frac{5}{8}$ - 600), se tiene 1 $\frac{5}{8}$ como intereses, Falta averiguar á qué tasa 600 $ han debido producir 1 $\frac{5}{8}$ de intereses en 15 días. Procediendo como en la 2ª. *Cuestión, se encuentra 6* $\frac{1}{2}$ *por ciento. En efecto:*

$$600 : 100 :: \frac{13}{8} : m$$
$$15 : 360 :: m : x$$
$$600 \times 15 : 100 \times 360 :: \frac{13}{8} : x$$

De ahí: $x = \frac{100 \times 360 \times 13}{600 \times 15 \times 8} = \frac{13}{2} = 6\ \frac{1}{2}$.

7ª. *cuestión* (7 eme Probleme de MM. Dum. et Dup., pág. 69)

652. *¿Cuál es el capital que con sus intereses al* 6 $\frac{1}{2}$ % h*a venido á convertirse en 601* $\frac{5}{8}$ $, *en el transcurso de 15 días?*

OBSERVACIÓN. Aunque el presente caso parece, á primera vista, que perteneciera á la 3ª. cuestión, no es así en realidad. En efecto, en la 3ª. cuestión el capital dado es completamente desconocido, mientras que aquí se halla contenido en la enunciación, aunque encubiertamente, por habérsele mezclado con los intereses. Por otra parte, en la 3ª. cuestión la acción del interés respecto al tiempo, estaba por buscarse, mientras que en el presente caso, ella se encuentra embebida en los intereses agregados al capital dado, los cuales no son otra cosa que el resultado de la combinación de la razón de los intereses con la razón de los tiempos. Así es que la operación debe reducirse aquí á agregar *al capital tipo,* el interés que produciría en el transcurso de 15 días, y á establecer en seguida una sola proporción entre los capíta1es *compuestos* y los capitales *netos.*

Solución (*). Se puede buscar, desde luego, el interés que producen 100 $ en 15 días, al 6 $\frac{1}{2}$ %, (procediendo como en la *1ª. cuestión),* lo que da $\frac{13}{48}$. En seguida, agregándose este interés al capital 100, puede resolverse el caso por una simple regla de tres, haciéndose innecesarias las dos proporciones establecidas en la 3.a cuestión, á saber:

$$\left(100 + \frac{5}{8}\right) : 601\ \frac{5}{8} :: 100 : x.$$

$$\frac{4813}{48} : \frac{4813}{8} :: 100 : x.$$

De ahí, $x = \frac{4813 \times 100 \times 48}{8 \times 4813} = \frac{48 \times 100}{8} = 600$ $.

8ª. *cuestión*

653. ¿En *cuánto tiempo 600* $, *puestos á intereses,* al 6 $\frac{1}{2}$ %, *habrán de convertirse* en *601* $\frac{5}{8}$ $?

Solución. 600 $ han producido 601 $\frac{5}{8}$ -600, ó sea 1 $\frac{5}{8}$. Preciso es buscar en qué tiempo 600 $ han debido producir el interés de 1 $\frac{5}{8}$, al 6 $\frac{1}{2}$ % al año, procediendo al efecto como en la 4ª. *cuestión.*

(*) Esta solución es distinta de la de los señores Dum. y Dup.

Método indirecto

CAP.	INT.	DIAS
100	$\frac{13}{2}$	360 : x
1	....	360 X 100
600	....	$\frac{360 \times 100}{600}$
	1	$\frac{360 \times 100 \times 2}{600 \times 13}$
	$\frac{13}{8}$	$\frac{360 \times 100 \times 2 \times 13}{600 \times 13 \times 8}$

Razones

Capitales.. 100 : 600

Intereses.. $6\frac{1}{2} : 1\frac{5}{8}$

Días .... $\boxed{360 : x}$

$$= \frac{360 \times 100 \times 2 \times 13}{600 \times 13 \times 8}$$

$$= \frac{60}{4} = 15 \text{ (días).}$$

Método directo

$$600 : 100 :: 360 : \cancel{m}$$

$$\frac{13}{2} : \frac{13}{8} \qquad \cancel{m} : x$$

$$600 : \frac{12}{2} = 100 \times \frac{13}{8} :: 360 : x = \frac{100 \times 13 \times 360 \times 2}{600 \times 8 \times 13} = 15$$

PROBLEMAS PARA RESOLVERSE EN LAS PRÓXIMAS

CONFERENCIAS <4> (Apéndice nº 2, pág, *a*)

1. *¿Qué suma forman 1920* $, *con sus intereses,* en $2\frac{1}{2}$ *meses, al 2,25 %?*

2. ¿A *qué tasa 3840 francos hacen, con sus intereses, 4480 f,* al *cabo* de 3 *anos* y 4 *meses?*

3. ¿*Cuál es* el *capital que, con sus intereses, al* 6.60%, *hace* en $4\frac{1}{2}$ *años la suma* de *1634f, 22c?*

4. *¿En cuánto tiempo 2380 francos hacen, con sus Intereses, 2701f, 30* c al *5,40* %?

5. (*) *Un deudor* no *puede pagar sino 60* % d *dos acreedores suyos. Debe al primero* 835 *francos* y al *segundo* 648 f. *¿Cuánto recibirá cada uno* de *ellos?*

6. *Un acreedor tiene dos deudores, que le han pagado* 36 % *de su respectiva deuda. El primero le ha entregado, 1281 f, 60* c *y el segundo* 986 f, *40* c, *¿Cuánto le debía cada uno?*

7. *Un negociante compra, por* el *valor* de *2500* f, *una mercadería que él la vende ganando* 15 %. *¿En cuánto la vende?*

8. *Un deudor no puede dar sino 40 % á tres acreedores. Debe al primero 8000 f, al segundo 15000 f y al tercero 24000 f. ¿Cuánto recibirá cada uno de ellos?*

9. *6000 francos han dado 80* f de *intereses* en 4 *meses. ¿Cuál es* el *capital que da 150f en 10 meses, al mismo tipo que los 6000 han dado 80* f *de intereses?*

10. ¿Qué *es más ventajoso: colocar 2400 francos á 5 %, ó colocar una tercera parte de dicha suma á* 6 % y el *resto á* $4\frac{1}{2}$ % ?

(*) El presente problema y los que le siguen han sido tomados de los señores Dumouchel y Dupuis, si bien reservándonos la libertad de hacer, respecto á algunos de ellos, ciertas observaciones á su tiempo, es decir, en las Conferencias.

PROGRAMA PARA LAS RÓXIMAS CONFERENCIAS

Para la 1ª. Conferencia: resolución de los cuatro primeros problemas precedentes <37> (Apéndice, pág. 25).

Para la 2ª. Conferencia: resolución de los seis problemas restantes <38> (Apéndice, pág. 28).

CUADRAGÉSIMA-CUARTA LECCIÓN

Interés compuesto

654. Sabido ya que *interés* significa, en general, el beneficio que produce el capital, diremos que ese beneficio *se llama* INTERÉS COMPUESTO *cuando al fin de cada año se agrega el interés al capital colocado, para que esa suma produzca en el ano siguiente el mismo interés establecido.*

655. Para satisfacer á una cuestión de interés compuesto, hay que resolver varias cuestiones de interés simple.

Sea, por ejemplo:—

8000 $ *colocados al* 5 % *de interés al año, ¿qué suma formarán al cabo de* 3 *años,* 2 *meses y* 12 *días?*

Solución:—

capitales	*intereses*
8000 $ producen en un año (art. 620),	400
8000 + 400 = 8400 producen en un año (art. citado),	420
8400 + 420 = 8820 producen » » » »	441
8820 + 441 = 9261 íd. en 2 meses y 12 días (art. 621),	92,61
9261 + 92,61 = 9353,61……………… Totales………………….	: 1353,61

Según se vé, los intereses producidos ascienden á 1353 $ 61,c, y el capital 8000 se ha convertido, al cabo de 3 años, 2 meses y 12 días, en 9353 $ 61,c *(de peso),* A mayor abundamiento, deduciendo de este nuevo capital el total de intereses, resulta: —

9353,61 -1353,61 = 8000 $ *(capital primitivo)*

NOTA - Como el ejemplo que precede puede servir para resolver toda cuestión de interés compuesto, nos dispensamos de proponer problemas respectivos.

REGLA DE CAMBIO

656. El objeto de la regla de cambio es el de saber *qué cantidad de moneda de un país se necesita para hacer cierta cantidad de moneda en otro país.*

EJEMPLO

Una casa de comercio, establecida en Lima, tiene una sucursal en la ciudad de La Paz (capital del Departamento de este nombre en Bolivia), y aquella casa tiene además relaciones comerciales con otra de París. En ese concepto, se pregunta: *¿cuántos pesos bolivianos se necesitan en La Paz para obtener en Paris tina letra sobre Londres por el valor de* 864 *libras esterlinas?*

Se sabe que —

Equivalencias

1 lib, est, vale 25 franc.s
4 francos valen 1 S (*)
100 Ss »140 p,s

Solución, por el método indirecto: —

Razón
140 : x

657. Cuando se ha adquirido alguna práctica *en el procedimiento que hemos llamado método indirecto* (reducción á la unidad), puede uno dispensarse de las casillas verticales de que hasta aquí nos hemos servido para hacer el cálculo, y contraerse á formar inmediatamente la ecuación final, escribiendo los numeradores y denominadores del segundo miembro de la ecuación final, en vista de las *equivalencias,* y á medida que lo pida el razonamiento, de este modo: —

Pes. 8
$$x=\frac{140 \times 25 \times 864}{100 \times 4}$$

Razonamiento: –

«Siendo lo que busco *(me he dicho)* un cierto número de *pesos,* escribo desde luego, como primer numerador del valor buscado, 140 p,s (*). En seguida, para el valor de 1 S, divido 140 por 100, lo que da la expresión fraccionaria $\frac{140}{100}$. Ahora, como 1 S vale 4 f, según la enunciación del problema, he menester expresar el valor de 1 f en p.s; para ello, divido la fracción por 4. Así obtenido el equivalente de 1 f, multiplico la fracción por 25, lo que me da el valor de 25 f ó sea el valor de 1 libra en ps. No teniendo más que hacer con los francos, paso á las libras esterlinas; y, como acabo de reducir éstas á la unidad, para obtener el valor de 864 *lib.,* me basta multiplicar por este último número la expresión fraccionaria, quedando resuelto el problema.»

Reducida la fracción á su expresión más simple, se obtiene:—

$$x = \$\ \frac{140 \times 25 \times 864}{100 \times 4} = 7560.$$

Solución del mismo problema por el método directo

100 S	:	1	: :	140 : $\cancel{m}$
4f	:	25	::	$\cancel{m}$: $\cancel{n}$
1 lbr.	:	864	: :	$\cancel{n}$: x
100 X 4	:	25	: :	140 : x

$x = \$\ \frac{25 \times 864 \times 140}{100 \times 4} = 7560$ $ (Igual al anterior resultado).

Para saber cuántos $ cuesta cada *lib. est.,* no 'hay más que dividir 7560 por 864, de que resulta $\frac{7560}{864} = 8\ \frac{3}{4}$ $ por lib.

OTRO EJEMPLO [1]

658. Se tiene frecuentemente á la mano tablas, en que los valores de las monedas extranjeras se hallan avaluadas en moneda del país donde uno reside, supongamos en Francia; en este caso, no hay necesidad de relaciones intermedias. Así, por ejemplo, se sabe que —

1 guinea = 26f, 47
1 $ de España = 5 43

(*) S, Abreviatura de *Sol* (moneda peruana).

(**) Es oportuno hacer notar que: siempre que se procede por el método de reducción á la unidad, el primer numerados del valor buscado viene a ser el término correlativo de x, que aquí es 140 p.s. equivalente de 100 S.

(¹) Tomado de Mr. Adhémar.

Se pregunta: *¿cuántos pesos son necesarios para hacer 200 guineas?*

$$X = \$ \frac{1 \times 26,47 \times 200}{5,43} = 974,95\ldots$$

Escribiendo 1 peso, se ha tenido el valor de 5 f, 43; dividiendo por este último número, se ha obtenido el valor de 1f; este valor, multiplicado por 26,47, ha dado el de 1 guinea; de suerte que ya no ha faltado sino multiplicar por 200, para tener igual número de *guineas* avaluadas en *pesos.*

REGLA DE DESCUENTO

659, Un PAGARÉ A LA ORDEN *es una obligación escrita, por la que se compromete uno á pagar cierta cantidad de dinero, llamada* MONTO (ó *principal), en un plazo determinado.*

660. El DESCUENTO es la rebaja hecha sobre el *monto* de un pagaré, que se verifica antes de vencido el plazo.

661. *Llamaremos* VALOR ACTUAL *de un pagaré la suma de dinero que se recibe en cambio del pagaré; de suerte que el monto de este documento es igual á su valor actual, aumentado del descuento.*

662. *El* DESCUENTO *usado en el comercio es el interés del monto del pagaré, contado este interés desde el día en que se hace el descuento hasta el día del vencimiento.*

EJEMPLOS

1º. *Se quiere descontar una obligación valor de 3024* \$, *pagadera d* 4 *meses, con el descuento de* 5 %.

Solución (directa) $x = \frac{3024 \times 4 \times 5}{100 \times 12} = 50,40$ I *Id.* (indirecta)

$x = \frac{5 \times 3024 \times 4}{100 \times 12} = 50,40.$

2º. *¿Cuales el monto de una obligación, pagadera á* 4 *meses, por la que se han descontado 50* f, *40 al* 5 %?

Solución. Buscando, por cualquiera de nuestros dos *métodos,* el capital que en 4 meses produce 50 f, 40, se encuentra 3024 f.

3º. *¿Cuál ha si do el monto de una obligación pagadera á* 4 *meses, descontada al* 5 %, *y por cuyo valor se han recibido 2973,60 francos?*

Solución (*)

El presente problema puede ser resuelto en una sola proporción, razonándose de la manera siguiente:—

No sabemos cuánto importan los intereses descontados del monto que se busca; pero conocemos el tipo de ellos, y sabemos por otra parte que, entre las cantidades que constituyen el tipo y las demás cantidades expresadas en el problema, hay una perfecta correspondencia, Esto entendido, veamos qué intereses produce el capital 100 en 4 meses, al 5 %. Puesto que 5 es el interés correspondiente á 100 en un año, en 4 meses (que son $\frac{1}{3}$ de año), el capital 100 producirá una tercera parte de 5= $\frac{5}{3}$ (¹).Ahora, si deducimos de ese capital los de intereses,

----

(*) Esta solución es muy distinta de la de los señores Dum. y Dup., 3.me Probleme, pág. 176.

(¹) J. En el presente caso, se ve fácilmente que 4 meses son $\frac{1}{3}$ parte del año, porque 4 es la $\frac{1}{2}$ meses, ¿cómo se sacará el interés de 100 francos?

P. Por un sencilla operación, que ya hemos indicado precedentemente, esto es, reduciendo los meses á días, y diciendo con la *Regla de tres*: «Si en 360 días hay 5f de interés, en 135 días cuánto?», ó arreglando los términos en rigurosa proporción.—

360 (*días*): 135 (*días*) :: 5f (*interés tipo*): *m* (interés de 100f.)

$$m= \frac{135 \times 5}{360} = 1f, 875$$

quedará como diferencia $100 — \frac{5}{3} = \frac{295}{3}$,cantidad que se halla en la misma condición que 2973,60 (diferencia del monto que buscamos).

Así las cosas, la solución del problema se reduce á una simple proporción. En efecto:—

Razones dadas:			*Razones reducidas:*	
capitales ……….	100	: x	…….. 100	: x
diferencias …….	100	: 2973.60	………	: 2973,60

$$\frac{295}{3} : 2973,60 :: 100 : x$$

$$x = \frac{100 \times 2973,60}{295} = \frac{297360 \times 3}{295} = 3024f \ (\textit{capital buscado})$$

PROBLEMAS PARA. LAS PRÓXIMAS CONFERENCIAS

<39> pág. 30, Ap.

1º. Se trata de comprar por 1800 $ de mercaderías, pagaderos en 9 meses, y se propone pagar al contado dicho importe, si se hace una rebaja de $3 \frac{1}{2}$ %: ¿Cuánto se tiene que pagar?

2º. Un comerciante ha ganado un 16 % sobre el precio de compra de una mercadería que ha vendido en 3161 $. Se pregunta: ¿cuánto le costó?

3º. Se han comprado 12 piezas de paño, de 25 metros cada una, á 18 francos el metro; se paga al contado $\frac{2}{3}$ del importe total, y por el resto se da un pagaré con el plazo de 3 meses y al 6 % de intereses. ¿Cuánto importa este pagaré?

4º. ¿Cuales el monto de una obligación pagadera á los 4 meses y $\frac{1}{2}$ descontada á 5f,50 %, y por la que se han recibido 6268f? 5.0

5º. ¿A qué tipo de interés se habrán descontado 31 f ,95 del vale que á continuación se expresa, pagadero á los 3 meses?: «Vale por la suma de 2130 f por precio de dos caballos, pagadero al portador del presente, valor recibido en caballos».

6º. Se compran mercaderías pagaderas en 3 meses, y se paga al contado, aprovechando de un descuento de 6 f, 75 al 5%. ¿Cuál es el precio de las mercaderías?

7º. ¿A qué época serían pagaderos 900 francos de mercaderías que se han abonado dando al contado 85.2 f, aprovechando de un descuento de 8 % al año?

8º. Se ha comprado mercaderías pagaderas al término de 6 meses. Se pagan 1764 francos al contado, utilizando de un descuento de 4 % al ano. ¿Cuál es el precio de las mercaderías?

9º. Un negociante gana 108 francos vendiendo una mercadería en 708f. ¿Cuánto gana por 100?

10º. Un negociante ha comprado mercaderías á fardo cerrado, á razón de 2 francos 50 centavos el kilogramo en peso bruto, pero á condición de que se le haga una *rebaja* de 7 f, 50 por la tara. Le ha costado el negocio 277 f, 50. Se pregunta: *¿por cuántos kilogramos ha pagado?*

CUESTIONARIO

¿Que significa, en general, la palabra *interés?* (654).- ¿Cuando se le llama *interés compuesto?* (654).- ¿Cual es el objeto de la *regla de cambio?* (656).- ¿Qué es un *pagaré a la orden?* (659).- ¿Que es *descuento?* (660).- ¿Qué es lo que se llama *valor actual* de un pagaré? (661).- ¿Cuál es el descuento usado en el comercio? (662).

CUADRAGÉSIMA-QUINTA LECCIÓN

Rentas sobre el estado

663. En Francia, por ejemplo, cuando el Gobierno tiene necesidad de levantar un empréstito, se compromete á pagar un interés fijo, al tipo de 5 por 100 al ano, supongamos. Una vez realizado el empréstito, el Gobierno da á cada prestamista el título correspondiente, cuyo valor entra desde luego en circulación. Dicho valor sube ó baja según el crédito de que goza el Gobierno y según que abunda ó escasea el dinero, siendo aquí de notar una circunstancia particular, y es: que *no varía el interés* (puesto que está fijado por el Gobierno), sino el capital. Llámase á esta fluctuación *el curso de la renta:* así, cuando se dice que *la renta está al curso de* 85 *francos,* verbigracia, se entiende que, por 5 francos de renta, el comprador del título paga 83 francos. Se dice que *la renta está á la par,* cuando por 5 francos de renta se pagan 100 francos.

664. Por lo que acaba de exponerse, *las rentas sobre el estado* son los intereses que éste paga por el dinero que se le ha prestado.

Sea: *Primer ejemplo*

665. *Para adquirir 400 francos de renta* 5 %, *al curso de 80* f, *¿cuánto se tendría que desembolsar?*

Soluciones:—

Por el método directo

$5 : 400 :: 80 : x$

$X = \frac{32000}{5} = 6400f$ ……………….

Por el método indirecto

Capitales	Intereses
80	5
$\frac{80}{5}$ X 400 =	1
= 6400f	400

Segundo ejemplo

666. Poseyéndose 6400 francos en títulos de renta 5 %, *al curso de 80 francos, ¿qué entrada tendrá?*

Soluciones

Método directo

80 : 6400 : : 5 : *X* 1 80

$X = \frac{6400 \times 5}{400} = 400$ f ………………………………………………

Método indirecto

capitales	Intereses
80	5
1	$\frac{5}{80}$
6400	x 6400 =
	= 400f

Tercer ejemplo

667. *400 francos de renta* 5 %, *cuestión 6400f, ¿Cuál es el curso de la renta?*

Soluciones

Método directo	*Método indirecto*
	Renta Costo
	400.........cuestan…… 6400
400 : 5 : : 6400 : x	1……... » …….$\frac{6400}{400}$
$X = \frac{6400 \times 5}{400}$ =80f	5……… » … … $\frac{6400}{400}$ X5=80f

[NOTA.- Antes de ahora se daba el nombre genérico de *Regla de falsa posición,* á aquella por la que se principiaba haciendo una operación sobre números supuestos, pero que conduce, con el auxilio de las proporciones, á descubrir el número ó números que se busca. Nosotros la clasificaremos en regla de *Partición,* de *Mezclas,* de *Aligación* y *Cuestiones diversas.]*

REGLA DE PARTICIÓN

668. *Se llama así la que tiene por objeto partir una cantidad proporcionalmente á ciertos números dados.*

J. ¿No bastan, acaso, las reglas contenidas en el tratado de la *División*?

P. Aquí viene, á propósito, lo que dice el Maestro Adhémar en su Curso de Matemáticas [1].

669. «Si se pregunta (dice) á los que por primera vez tocan la materia en cuestión, lo que significa la palabra *partir,* no vacilarán en responder que eso expresa una división por hacer. Este error proviene de que no se han dado cuenta cabal de la acepción en que debe tomarse dicha palabra, que no expresa una división propiamente tal, sino cuando se trata de dividir una cantidad en partes iguales, como, por ejemplo, dividir por 5, por 8, etc.; mas, en la presente cuestión, la palabra *partir* importa descomponer un todo en partes desiguales, sujetas á ciertas condiciones, pero cuya *suma* sea igual á la cantidad que se trata de partir.

Acabaréis de comprenderlo, hijos míos, al favor de los ejemplos siguientes.

Primer ejemplo

670, Partir 3015 $ en partes proporcionales á los números 3, 5 y 7.

Solución (método directo)

Haciendo la suma de los tres números dados, se tiene:

$$3 + 5 + 7 = 15$$

----

(1) Algèbre. Pág. 83

Observación.- Si bien se examina, este caso de la regla de partición es análogo á la *regla de interés.* En efecto, el número 15 puede ser considerado como equivalente del *capital tipo* 100; los números 3, 5 y 7, como otros tantos *tipos de interés* (pues que representan la acción *ó* beneficio que ha de corresponder á cada uno de los partícipes), y la cantidad 3015, que debe repartirse, puede considerarse como el capital dado. Según eso, para resolver el problema, se empleará el mismo procedimiento que en la regla de interés, planteándose al efecto las siguientes proporciones:

Razones

15 : 3015 : : 3 : x = $\frac{3015 \times 3}{15}$ = 603 — 15 : 3015; 3 : x

15 : 3015 : : 5 : y = $\frac{3015 \times 5}{15}$ =1005 — 5 : y

15 : 3015 : : 7 : z $\frac{3015 \times 7}{15}$ =<u>1407</u> — 7 : z

Suma =<u>3015 $</u> 349 <40> p. 38, Ap.

Solución (por el método indirecto)

Razones

15 : 3015

$\boxed{3 : x}$

Razonamiento

A 15 acciones corresponden 3015 $, pero, si en lugar de 15 sólo se tuviese 1 acción, su valor sería la décima-quinta parte de aquella cantidad…….. mas, si se tienen 3 acciones, el valor sería tres veces otro tanto ……………

15	3015;
1	$\frac{3015}{15}$;
3	$\frac{3015}{15}$.

Razonando del mismo modo, respecto á y y z, se obtendrá:

$y = \frac{3015 \times 5}{15}$ $z = \frac{3015}{15}$

(*)

Segundo ejemplo

671. *Distribuir* 445 *en tres partes proporcionales á los números* $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

Solución

Tomando como términos de comparación las fracciones dadas, empiezo por darles un común denominador, que aquí será 60,

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} \; ; \; \frac{3}{4} = \frac{45}{60} \; ; \; \frac{2}{5} = \frac{24}{60}$$

En seguida formo la suma de los numeradores (como se hizo en el ejemplo anterior), y tengo:

20 + 45 + 24 = 89.

Hecho eso, establezco y resuelvo sobre la marcha las proporciones del caso:

89 : 445 :: 20 : x = =………………………….100

89 : 445 :: 45 : y = =……………………….225

89 : 445 :: 34 : z = = ……….................<u>..120</u>

Suma <u>= 445</u>

(*) Los ejemplos que siguen, así como los respectivos problemas, han sido tomados de los señores Dumouchel y Dupuis.

R. ¿Cómo así las cantidades 100, 225 y 12, están en proporción á las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$?

P. Vais á verlo, y esto os probará que la operación ha sido bien hecha.

672. Al tratar de las fracciones ordinarias, resolvimos una cuestión análoga á tu pregunta (art. 464) Cuaderno 11, pág. 23). Pues bien, tu pregunta importa esta otra: *«¿De qué número* 445 *es* $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$?»

Operando como entonces, tenemos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}x = 445,$$

$$\left(\frac{20}{60} + \frac{45}{60} + \frac{24}{60}\right)x = 445;$$

De ahí:

$x = 445 : \frac{89}{60} = \frac{445 \times 60}{89} = 300$ (*numero buscado*).

Ahora también:

$\frac{1}{3}$ parte de 300 = 100

$\frac{3}{4}$ partes de 300 = 225 *J*

$\frac{2}{5}$ partes de 300 = 120

Suma = 445 351 <41> Ap., pág. 41

Tercer ejemplo

673. *Distribuir 3540 pesos entre cuatro personas, de manera que la parte de la primera sea á la de la segunda, como* 2 *es á* 3; *que la parte de la primera sea á la de la tercera, como* 4 *es á* 5, *y que la parte de la primera sea á la de la cuarta, como 6 es á 7*.

Solución

Partiendo del principio de que 1 peso, por ejemplo, se descompone en cuatro partes iguales, llamadas pesetas, la relación que hay entre las fracciones 2 pesetas y 3 pesetas es la misma que la que existe entre los enteros 2 pesos y 3 pesos.

.Expresando ahora los cuatro interesados por A, B; C y D, pasemos á resolver el problema.

Como hay varias cantidades que dependen unas de otras, vamos á tomar la primera (esto es la correspondiente á A) como unidad arbitraria, para expresar en esa medida, por decirlo así, los valores de las demás partes.

Dando al derecho de A el valor de uno, éste comparado con él mismo, sin variar, es igual á 1.

Convirtiendo en $\frac{2}{2}$ el derecho de A, hay que expresar por $\frac{3}{2}$ el derecho de B; pues así se hallan en relación de 2 á 3.

Del mismo modo, expresando el valor 1 por $\frac{4}{4}$ y el derecho de C por $\frac{5}{4}$, se satisface á la condición de estar ambos valores en relación de 4 á 5.

Igualmente, expresando el derech6 de A por $\frac{6}{6}$ y el de D por $\frac{7}{6}$, ambas partes estarán en relación de 6 á 7.

De las relaciones establecidas resulta el siguiente cuadro de razones:

A= $1 : 1$

B= $\frac{2}{2} : \frac{3}{2}$

C= $\frac{4}{4} : \frac{5}{4}$

D= $\frac{6}{6} : \frac{7}{6}$

Dando así á todas estas expresiones fraccionarias un denominador común, que en el presente caso será 12 (como el más pequeño), se tiene:

$$\frac{12}{12}, \frac{18}{12}, \frac{15}{12}, \frac{14}{12}.$$

Prescindiendo por el momento del denominador común, resulta:

12, 18, 15, 14, cuya suma es =………….. 59

Procediendo, por lo demás, como en el Ejemplo anterior, se tiene por resultado final: — 720, 1080, 900, 840.

Cuarto ejemplo

674. Dis*tribuir 8400* f *entre cuatro personas, de manera que la parte de la primera sea á la de la segunda, como* 2 *es á* 3; *que la parte de la segunda sea á la de la tercera, como* 4 *es á* 5 , y *que la parte de la tercera sea á la de la cuarta persona, como* 6 *es á* 7.

Solución

Siendo la primera parte como 1, la segunda es $\frac{3}{2}$, la tercera $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$ (ósea $\frac{15}{8}$) y la cuarta $\frac{7}{6}$ de $\frac{15}{8}$ ó $\frac{35}{16}$; luego, es preciso distribuir 8400f proporcionalmente á las fracciones que acaban de expresarse, las cuales, reducidas á un común denominador (que aquí conviene el 16), se convierten en:

$\frac{16}{16}$, $\frac{24}{16}$, $\frac{30}{16}$ y $\frac{35}{16}$, ó sea 16, 24, 30, 35 (prescindiendo del denominador común).

Por la demás, operando como en los precedentes ejemplos, se obtiene:

1280, 1920, 2400, 2800.

PROGRAMAS

PARA LAS PRÓXIMAS CONFERENCIAS

Primera parte: Ejercicios sobre la Lección precedente. *Segunda parte:* Resolución de los siguientes

PROBLEMAS <42> pág. 41, Apénd.

1º. *Tres obreros han trabajado una misma obra: el primero ha trabajado 4 días, el segundo 5 día y el tercero 6 días. Hall recibido* 48f, 75. *¿Cuánto corresponde á cada uno?*

2º. *Tres agrupaciones de obreros han ganado* 7875 *francos por un trabajo hecho en común; el primer agrupamiento se componía de 12 obreros, el segundo de 15 y el tercero de 18. Se trata ahora de distribuir la ganancia entre esas tres agrupaciones.*

3º. *Un hombre lega á un amigo, á tiempo de morir, la mitad de sus bienes, avaluados en 57.500* f, *los dos tercios á su hijo y los tres cuartos á su viuda. ¿Cuál es la parte de cada uno?*

4ª. *Dos aturdidos, el uno de 14 años y el otro de 16, han hecho el gasto de 45 francos en un hotel. ¿Cuánto deberá pagar cada uno, si el pago ha de hacerse en proporción á su Edad?*

5º. Un tío deja al morir 21.0600 f *para que se distribuyan entre dos sobrinos* y *dos sobrinas, de manera que la parte del primero sea á la del segundo, como* 1 *es á* 2; *que la parte del segundo sea á la de la primera sobrina, como* 2 *es á* 3, *y que la parte de la primera sobrina sea á la de la seguida, como* 3 *es á* 4. *Se pregunta: ¿qué cantidad corresponde á cada sobrino,* y *cada sobrina, si se tiene en cuenta que los gastos de la sucesión se elevan á* $2\frac{1}{2}$ %?

CUESTIONARIO

¿Qué se entiende por *rentas sobre el Estado?* (664).- ¿Qué se llama *regla de partición?* (668).

CUADRAGÉSIMA-SEXTA LECCIÓN

Regla de sociedad

675. Es así llamada la operación que vamos á explicar, porque *ella tiene por objeto determinar la parte que ha de corresponder á cada socio en las ganancias ó pérdidas resultantes del negocio ó de la empresa acometida.*

676. *La cantidad que cada cual suministra á la sociedad se llama* CAPITAL *Ó* ACCIÓN.

677, *Llámase* DIVIDENDO *el beneficio que ha producido el negocio ó la empresa.*

678. A menos de convención contraria, *la parte de beneficio ó de pérdida de cada asociado es proporcional á su capital, cuando los capitales han permanecido el mismo tiempo en la sociedad; y proporcionalmente al tiempo, cuando los capitales son iguales.*

679. *En las grandes empresas, como las de ferrocarriles, el* FONDO COMÚN *se divide en porciones iguales, que se llaman* ACCIONES.

Se llama ACCIONISTA *á cada propietario de acción ó acciones.*

680, *La Regla de sociedad no es sino un caso particular de la Regla de partición.*

EJEMPLOS (*)

PRIMER EJEMPLO

681. *Los capitales de tres socios son 1200* f, *700* f y *500* f y *se pregunta: ¿cuánto corresponde á cada cual sobre el beneficio, que es de 3600 francos?*

(*) Tomados, en su mayor parte, del maestro Adhémar y de los señores Dumouchel y Dupuis; pero resueltos de distinto modo.

Solución

Capitales 1200 + 700 + 500 = 2400 f
Beneficio = ……………………………………………3600 f

$2400 : 1200 :: 3600 : x = 1200 \times \frac{3600}{2400} = 1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ f

$y = 700 \times \frac{3}{2}$ = ……………...1050

$z = 500 \times \frac{3}{2}$ = ……............ 750

SEGUNDO EJEMPLO

682. *Los capitales de dos asociados son 4000*f y *5000* f; *el primero ha recibido, por su parte, 1600f de beneficio ¿Cuál es el beneficio total?*

Solución

x (beneficio del primero) = …………1600
4000 : 5000 :: 1600 : y (íd. del segundo) =…………
$= 5000 \times \frac{1600}{4000} =$

$= 5000 \times \frac{2}{5}$ =…………2000

Total de beneficio.….. 3600

TERCER EJEMPLO

683, *Dos asociados han obtenido un beneficio de 3600* f; *el primero ha recibido, por su parte, 1600* f *de beneficio. La suma de los capitales ha sido de 9000* f, *¿Cuál es el capital de cada uno?*

Solución

Suma de capitales = 9000f

Total de beneficios………..3600
Beneficio del 1º……………1600
Id. del 2º……………2000

De ahí las siguientes proporciones:

3600 : 1600 :: 9000 : x = (capital del 1º.)……………………4000
3600 : 2000 :: 9000 : y = (íd. del 2º.)…………………...5000
$x + y$ = …………………………………… 9000

CUARTO EJEMPLO

684, *Los capitales de cinco asociados son* 8000f, *7000* f, *4000* f, *9000* f y *3000* f, y *han tenido* 48392 f, 75 *de beneficio. ¿Cuánto cabe á cada uno de beneficio* ?

Solución

Capital del 1º. socio	= 8000	Beneficio del 1º.	= x
» del 2º. »	= 7000	» del 2º.	= y
» del 3º. »	= 4000	» del 3º.	= z
» del 4º. »	= 9000	» del 4º.	= w
» del 5º. »	= 3000	» del 5º.	= w
Fondo total………..	=31000	Total de benefi.s	= 48392 f, 75

31000 : 8000 :: 48392,75 : x = 8000 X $\frac{48392{,}75}{31000}$ = (*) 12488,45

y = 7000 X $\frac{48392{,}75}{31000}$ = 10927,39

z = 4000 X íd, = 6244, 22
v = 9000 X íd. = 14049, 50
w = 3000 X íd. = 4683, 17

Total de beneficios = 48392, 73

685. Sucede ordinariamente, que los capitales no han permanecido en la sociedad un mismo espacio de tiempo; entonces la regla de sociedad se dice *compuesta;* por ejemplo:

Dos asociados han tenido un beneficio de 1250 francos; pero sus capitales, que han sido 3000 f del 1º. y 4000 f *del 2º., han estado colocados en cierta especulación durante* 6 *meses el del 1º. y durante* 8 *meses el del* 2º. *Se pregunta: ¿qué parte del beneficio corresponde á cada cual, proporcionalmente al capital* y *al tiempo?*

Solución

Debe admitirse que 3000 f en 6 meses producen el mismo efecto que 6 veces 3000 f = 18000 f, en 1 solo mes; y que 4000 f en 8 meses, producen el mismo resultado que 8 veces 4000 f = 32000 f, en un solo mes. Se puede hacer, por este medio, que ambos capitales se refieran á una misma unidad de tiempo.

Y bien; siendo ahora los capitales 18000 t + 32000 f, la suma de ellos es….. = 50000 f
Beneficio del 1º. = x | Total de beneficio….. 1250
» » 2°. = y

50000 : 18000 : : 1250 : x = 18000 X $\frac{1250}{500}$ = 18000 X $\frac{1}{0}$ = 450

y = 32000 X $\frac{1}{40}$ ………………… 800
Suma de beneficios = 1250

R. Decías poco ha, papá, que, multiplicando cada capital por el número respectivo de meses, se consigue que todos los capitales se refieran á *una misma unidad de tiempo,* y yo no comprendo lo que esto quiere decir, ni qué .ventaja pueda resultar de tal suposición.

P. Sí, necesita ello una explicación, que hela aquí:

686. Cuándo en la *Regla de interés,* por ejemplo, se halla el tiempo reducido á la unidad tipo, que es 1 año (ó sus equivalentes 12 meses ó 360 días), tratándose de encontrar los intereses, se limita uno á buscar la relación *que existe entre los capitales y los intereses, como en la Cuestión* 1ª. (art. 619), desentendiéndose completamente del tiempo, por hallarse

----

(*) *Advertencia,* -Dividiendo por 1000 el numerador y el denominador de la expresión fraccionaria $\frac{48{,}39275}{31}$ resulta $\frac{48392{,}75}{31000}$ convirtiendo esta fracción en decimales, se tiene 1,561056… millonésimos, que, multiplicados por 8000, dan 124884,448…; es decir, que los 6 millonésimos de dicho numero decimal se han convertido en 8 milésimos, que valen más de la mitad de 1 centésimo. Ahora, teniéndose en cuenta que hay todavía un capital más fuerte que el que examinamos, como es el 4º. socio, se comprende que, para haber de obtener los beneficios parciales á menos de un centésimo, es preciso apurar la división por 31 (en cada incógnita) la sexta cifra decimal.

Preciso es también, para hacer la prueba, tener en cuenta la decimal que aquí reforzado, convirtiendo los 448 milésimos en 45 céntimos, y las que hubieren forzarse ó descuidarse en los valores de y, z, v y w, con sujeción al artículo 291, pues de este modo quedarán compensados los errores frecuentemente.

éste reducido á la unidad. Del mismo modo, habiéndose reducido todos los tiempos, en la presente cuestión, á una misma unidad, *1 mes,* no hay para qué inquietarse del tiempo, porque dicho *mes* no puede aumentar ni disminuir el beneficio correspondiente á tal ó cual capital (pues que para todos es el mismo); no dependiendo, por consiguiente, el beneficio, sino de la mayor ó menor importancia de los capitales que han entrado en la sociedad.

SEXTO EJEMPLO

687. *Tres individuos pusieron iguales capitales para cierto negocio; el capital del 1º. Ha permanecido 3 meses, el del 2º. 4 meses y el del 3º. 5 meses; el beneficio que han reportado es 750 francos. Se pregunta: ¿qué parte de parte beneficio toca á cada uno, proporcionalmente al tiempo?*

Solución

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ meses} \times 3 = 9 \\ 4 \quad » \quad \times 4 = 16 \\ 5 \quad » \quad \times 5 = 25 \end{array}\right\} \quad \text{Suma} = 50. \qquad \text{Total de beneficios} = 750\text{f}$$

$$50 : 9 :: 750 : x = 9 \times \frac{750}{50} = 9 \times 15 = 135\text{f}$$

$$y = 16 \times 15 \; = \ldots\ldots\ldots\ldots 240\text{lf}$$

$$z = 25 \times 15 \; = \ldots\ldots\ldots\ldots 375\text{f}$$

R. En las operaciones que acaban de hacerse, me confunden varias cosas. Noto, en primer lugar, que en el Ejemplo anterior se multiplicó cada capital por su respectivo número de meses, y que aquí se han multiplicado los meses, por el mismo número de meses; en segundo lugar, que en el Ejemplo anterior se trató de reducir los meses á la unidad de tiempo, mientras que aquí nada de eso se ha hecho. En una….. palabra me encuentro á obscuras.

P. Cierto; si el procedimiento es justo, el *porqué* no es muy claro. Voy, pues, á ver de ilustrarlo. .

688. En el Ejemplo anterior, los capitales, aunque diferentes, eran conocidos y, por lo mismo, podía operarse sobre ellos; no así en el presente Ejemplo, porque se ignora su valor efectivo. Por tanto, ha sido forzoso operar sobre los tiempos, que están numéricamente enunciados en la cuestión.

En aquél podían reducirse á la unidad los capitales ó los tiempos, á elección, y se prefirió lo segundo, por una especie de miramiento; pero, en el presente Ejemplo, no existiendo esa alternativa, se ha hecho forzoso operar sobre los tiempos, tanto más, cuanto que, bien examinado, los capitales están ya reducidos á la unidad por sí mismos; he aquí cómo:

689. La *unidad* no significa siempre un solo objeto, pues en muchos casos significa el *conjunto* de varios objetos de una misma especie; por ejemplo, 1 kilómetro (que vale 1000 metros); 1 año (que es igual á 12 meses); 1 Luís (que importa 20 francos); un capital ó acción (que puede valer 100, 1000 ó más monedas de plata ó de oro), etc., etc. Y bien; contrayéndonos á la cuestión: desde que los capitales son iguales, cada uno de ellos representa nada más que 1 capital, y los tres capitales representan 1 unidad + 1 unidad + 1 unidad de capital; y es de notar que, en ese estado las cosas, el capital no puede aumentar ni disminuir, por sí sólo, el beneficio que ha de corresponderle; pues ello depende de la acción del tiempo, que es aquí á quien corresponde señalar á cada capital su respectivo beneficio, proporcionalmente á la duración de su permanencia en la sociedad…

R. Ya empiezo á comprender; mas, para acabar de esclarecer mis ideas, quiero que me digas, contrayéndonos, por ejemplo, al 1er. capital, ¿cómo hay que razonar para multiplicar los meses por el mismo número de meses?

690 P. De este modo: «Si para obtener *tanto* de beneficio, es menester que permanezca 1 capital durante 3 meses, para obtener el mismo beneficio en 9 meses (que es 3 veces 3 meses), bastará la tercera parte, ósea $\frac{1}{3}$ de capital ». Y es claro que, razonando del mismo modo, se han multiplicado por 4 los 4 meses que ha permanecido el 2º. capital, y por 5 los 5 meses concernientes al 3er. capital, quedando así convertido los capitales en $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{5}$ de capital.

Para disipar otras dudas que pudieran asaltaros, hijos míos, diré á prevención: que así como en el Ejemplo anterior no figuraron en la ecuación final los meses reducidos á la unidad ($\frac{6\text{ meses}}{6}$.)= 1 mes; $\frac{8\text{ meses}}{8}$ = 1 mes), así también, en el Ejemplo que discutimos, as expresiones .$\frac{1}{3}$. ,. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ de capital, tampoco deben figurar en la ecuación final; porque estos valores ficticios, por decirlo así, no han entrado sino como auxiliares en la operación principal, ni más ni menos que nuestra m en la combinación de dos proporciones, *ó* como el 1 en la Reducción á la unidad, que es tan sólo un valor hipotético.

En suma: en casos análogos al 5º. Ejemplo, quien discierne el beneficio es el Capital: en casos parecidos al del presente Ejemplo, el juez de la causa es el Tiempo.

691. NOTA (*).- «*Se llama* CONTRIBUCIÓN, *la suma que cada ciudadano paga anualmente al Estado, en proporción á sus rentas, para los gastos gubernamentales».*

«Se determina, por verdaderas reglas de sociedad, las *contribuciones prediales,* es decir, las contribuciones sobre las rentas de las propiedades (casas, tierras, pastales, quintas, etc.)».

«Supongamos conocida, en, efecto, la contribución predial l del gobierno francés, por ejemplo. El territorio de aquella república se divide (poco más *ó* menos) en 86 departamentos; cada departamento se divide en varios distritos, y cada distrito se compone de varias *comunas.* Ahora bien; conociendo las presuntas rentas de todas las propiedades de cada comuna, se deducirá de ahí la presunta renta de cada una de ellas; después, la de cada distrito, la de cada departamento y, por fin, la renta del Estado».

«Se reparte, en el ministerio de finanzas, entre todos los departamentos, la contribución financiera exigida, proporcionalmente á las presuntas rentas de esos departamentos. Después se reparte la contribución de cada departamento, ó capital de departamento, entre todos los distritos que lo componen, proporcionalmente á las presuntas rentas de esos distritos. En seguida se reparte la contribución de cada distrito, entre todas las comunas que lo componen, proporcionalmente á las presuntas rentas de esas comunas. En fin, se reparte la contribución de cada comuna, entre todos los propietarios de la comuna, proporcionalmente á sus presuntas rentas ».

CUETIONARIO

¿Qué es lo que se llama *Regla* de *sociedad?* (675).- ¿Qué se entiende por *capital* ó *acción:? (676).-* ¿A qué se llama *dividendo* en lenguaje comercial? *(677).*

PROBLEMAS PARA LAS PROXIMAS CONFERENCIAS

<43> pág. 43 Ap.

1º. Una persona acomete cierta empresa con 2000f; 5 meses después admite un socio, que trae 3000f. Al cabo de un año obtiene la sociedad un beneficio igual á 3600*f.* ¿Cuánto corresponde á. cada socio?

(*) Debida á los señores Dumochel y Dupuis.

2º. Una persona emprende un negocio con 25000f; 4 meses después un capitalista le suministra 7500f; 2 meses después de ese suministro, otro capitalista le da 1500f. Al cabo de un año, hay un beneficio de 18450f. ¿Cuánto corresponde á cada uno, habiendo retenido el empresario una prima á razón de 8 %?

3º. Dos negociantes se han asociado; el capital del primero, que es el triple del segundo, ha permanecido en la sociedad 5 meses, y el del segundo 10 meses. Sufren una pérdida de 800 f. ¿Cuánto de pérdida toca á cada uno?

4º. La suma de los capitales de dos socios es 32760f, y el del primero excede al del segundo en 15980 f. Tienen un beneficio igual al $\frac{1}{4}$ de su capital. ¿Cuánto corresponde á cada uno?

5º. Tres socios han obtenido un beneficio de 2250f; el primero ha recibido por su parte 625f; el segundo 750f, y el tercero nada ha recibido todavía por la parte que le toca. La suma de los tres capitales ha sido 18000 f. ¿Cuál es el capital de cada uno?

6º. Los capitales de dos socios son 20000 f y 25000 f. El primero ha permanecido 3 meses en la sociedad, y el segundo 4 meses. El primero recibe, por su parte, 4687 f, 50 de beneficio. ¿Cuánto es el beneficio total?

7º. Una persona deja, al morir, 90000f á tres herederos, con la condición de dar una pensión anual de 600f á un antiguo servidor. El primer heredero recibe 24000f y el segundo 30000 f. ¿Qué parte de la pensión debe pagar cada heredero?

CUADRAGÉSIMA-SÉPTIMA LECCIÓN

Regla de (mélange) mezclas (*) (1)

692. Se llama así la que tiene por objeto dar á conocer el valor de un litro, un kilogramo ú otra medida cualquiera, de dos ó más especies de distinto precio, mezclados entre sí; tales como vinos, granos, harinas, etc. Esta regla es análoga á la *Regla de partición.*

PRIMER EJEMPLO

693. *Se ha mezclado* 25 *litros de vino, al precio de 80 céntimos el litro, con* 75 *litros de otro vino valor de 60 céntimos el litro. ¿Cuál es el precio de 1 litro de esa mezcla?*

Solución

Vinos	Costos	
1ª. clase 25 litros á 80 c.	……….. 20 f	Valor de 1 litro mezclado = $\boxed{x}$
2ª. clase 75 » á 60 »	……….. 45 »	
Suma, 100	Suma, 65 »	

100 : 1:: 65 : x = 0f.65c.

Nota. Queriendo resolver la cuestión por el —

Método indirecto,

se puede disponer el cálculo y operar como sigue: —

(*) Consultar.

(1) En esta regla, como en la de Aligación, he seguido á los señores Dumouchel y Dupuis, si bien resolviendo las cuestiones de distinto modo.

Vinos	*Precios* 1ª. clase	2ª. Clase
Si 1 litro de 1ª. clase vale	0,80	
25 litros » valdrán 25 X 0,80 =	20,	
Si 1 litro de 2ª. clase vale………………………………	…………	0,60
75 litros » valdrán	.	45,
Si 100 litros mezclados valen ………………………	20 + 45 = 65 f	
1 litro » valdrá $\frac{65}{100}$ = [1]	………… 0,65.	

SEGUNDO EJEMPLO

694. *¿En qué proporción debe mezclarse un vino de 80 céntimos el litro con otro de 60 céntimos, para poder darlo á* 65 *cents. litro?*

Solución

Fijándonos en los precios, se advierte: que, dándose 1 litro de vino de 1ª. clase por 65 céntimos, se sufriría un quebranto de 15c; y que dándose el de 2ª. clase por 65c, se obtendría una utilidad de 5c. Hecha esa observación, la cuestión se reduce á buscar qué número de litros de 2ª. clase sería menester mezclar con 1 litro de 1ª. clase, para que el quebranto quedase compensado con la utilidad. He aquí cómo:

Vinos	Pérdidas	Ganancias
En 1 litro de 1ª. clase se pierden……….	15c	
En 1 litro de 2ª. clase se ganan 5c……..		
En 3 litros de 2ª. clase se ganan 3 x 5c =	……………..	15c
En 4 litros de mezcla……………………..	15c	15c

Quiere decir que por *1 litro* de 1ª. clase se deben poner 3 *litros* de 2ª. con lo que se tiene 4 *litros* de vino mezclando, que puede darse á 0f,65 el litro, sin que de ello resulte alteración alguna en los primitivos precios.

Verificación

1 litro de 1ª. clase, á 0f,80c vale …………………..0f,80c
3 litros de 2ª. clase; á 0f ,60 c valen 3 X 0f ,60….. 1,80
Suma….. 2,60
4 litros de vino mezclado, á 0f ,65 c valen igualmente……………………………………………… 2,60

TERCER EJEMPLO

695. *¿Cuánto litros de vino de á 80 céntimos y cuántos de á 60 céntimos deben ponerse, para tener 120 litros de mezcla, que pueda darse á 65 céntimos el litro?*

Solución

Considerando que en el presente caso, para tener vino de á 65 céntimos el litro, debe mezclarse 1 litro de vino de 1ª. clase con 3 litros del de 2ª. clase (como .queda demostrado en el *Ejemplo* anterior), la cuestión se reduce á componer 120 litros, de manera que cada 4 litros de vino mezclado, contenga 1 litro de vino de 1ª. clase y 3 litros del de 2ª. clase, esto es:

4 : 1 :: 120 : x = $\frac{120}{4}$ = 301 de 1ª. clase.

----
[1] Las dos precedentes operaciones hacen ver la incontestable ventaja del *Método directo* sobre el *Método indirecto.*

4 : 3 :: 120: $y = \frac{3 \times 120}{4} = \underline{90^{1}}$ de 2ª. clase.
120 *litros de vino mezclando.*

Puede operarse de otro modo:

Puesto que la medida ó término de comparación para la mezcla, es 1 litro de á 0,80 y 3 litros de á 0f,60, estos cuatro litros pueden tomarse como unidad de mezcla; en este caso, el 1 litro de á 0f,80 viene a ser $\frac{1}{4}$ de la unidad, y los tres litros del vino de á 0f,60 son $\frac{3}{4}$ partes de la unidad. Esto establecido, el total de la mezcla, es decir, los 120 litros, deben contener forzosamente $\frac{1}{4}$ parte de vino de á 0f,80 y $\frac{3}{4}$ del vino de á 0f,60. De ahí:

parte de 120 = $\frac{120}{4}$ 30 lit. de á 0f,80 (que valen 24f)

partes de 120 = $\frac{120 \times 3}{4}$ = 90 lit. de á 0f,60 (que valen <u>54)</u>
1 vez 120 = 120 lit. de vino mezclado
(que valen…………..78f)

Verificación

120 litros de vino mezclado, á 0f,65=78f. *(Suma igual á la anterior).*

CUARTO EJEMPLO

696. *120 litros de mezcla de vino de á 80 céntimos y de otro de á 60 céntimos, han costado* 78 *francos. Se pregunta: ¿cuántos litros de cada clase de vino contiene esa mezcla?*
<44>
Esta cuestión tiene, á primera vista, la apariencia de un enigma, debido esto á la circunstancia de haberse callado en la enunciación del problema el precio del vino mezclado, es decir, el valor de 1 litro de mezcla. Por tanto, hay que principiar el cálculo por llenar ese vacío, lo cual es muy sencillo. En efecto, para obtener el precio de un litro, basta *reducir á la unidad* los 120 litros, *ó* (lo que es lo mismo) dividirlos por 120, dividiendo al propio tiempo, el importe total por el mismo número. Así:

Solución

120 litros de vino mezclado valen…….. 78 f
11itro de vino mezclado vale $\frac{78}{120}$ = 0,65

Hecho eso, la cuestión se reduce á esta otra: ¿Cuántos litros de vino de á 80 céntimos deben mezclarse con otro vino de á 60 céntimos, para tener 120 litros de mezcla, que pueda darse á 65 céntimos el litro?

Procediendo como en el *Tercer Ejemplo,* se encuentra: que es preciso poner 30 litros de vino de á 0f ,80 y 90 litros de á 0f,60.

Otra solución

696 *bis.* Puede resolverse también el precedente problema (sin necesidad de reducir los 120 litros á la unidad), por el procedimiento llamado en otro tiempo *falsa posición,* esto es, operando sobre números supuestos, á fin de encontrar el número que se busca (lo que hemos hecho ya varias veces, especialmente al servirnos de la regla llamada *reducción á la unidad).*

He aquí el procedimiento:

Formadas las casillas verticales del margen, me digo:

Vinos

	1ª. clase	2ª. clase	importe
«Si tomase los 120 litros del vino de 2ª. clase solamente, tendría…………….		120=	72f
lo que no puede ser; porque, según el problema, el importe tiene que ser 78f y de esta cantidad á la que há salido al margen hay una diferencia de *78-72=6f (1ª. diferencia»>.*			
«Siendo, por tanto, inadmisible la suposición, hago el ensayo de cambiar un litro de 2ª. clase con otro de 1ª. clase, y tengo……………………………..	1	119=	72,20,
lo que tampoco satisface; pues da una diferencia de 78-72,20, que es igual á 5f,80 (2ª. *diferencia*) ».			

En ese estado, comparando las dos diferencias, se ve que en virtud del cambio de un solo litro, se ha ganado 20 céntimos; según esto, la cuestión se reduce ahora á descubrir cuántos cambios será menester hacer para que desaparezca la diferencia. Para saberlo, bastará decir con la *Regla de tres:* «Si en un cambio se ha ganado 20 céntimos, ¿en cuántos cambios se ganará 6f?»; ó (lo que viene á ser lo mismo) bastará dividir la primitiva diferencia (6f) por la 2ª. (0f,20); lo cual da al cociente 30, que quiere decir: que, en treinta cambios, se tendrán 30 litros de vino de 1ª. clase, por otros tantos de 2ª. clase, debiendo éstos quedar reducidos á 120 -30 = 90 *(litros de* 2ª. *clase).*

Verificación

30 litros de 1ª. clase, á 0,80, valen……….. 24f
90 » » 2ª. » » 0,60, » ………. 54
---
120 litros, valen …………………………….. 78f

697. NOTA.- Por un razonamiento análogo al de la precedente Solución, pueden ser resueltas otras muchas cuestiones en que se trate, no ya de *mezclar* líquidos ú otras substancias que hayan de formar un todo homogéneo, sino de juntar *ó* allegar solamente dos *ó* más agrupaciones de objetos de diferente especie, conservando cada cual su naturaleza propia y forma especial, como se verá adelante.

QUINTO EJEMPLO

*¿En qué proporción puede mezclarse un vino de á 0*f ,75 c*on otros de á 0*f ,55 *de á 0*f,45 *y 0*f ,40 *el litro, para tener vino de á 0*f ,60 *el litro?*

Solución

Pueden hacerse varias combinaciones; he aquí la que, á mi juicio, parece más sencilla:

	Perdidas	Ganancias
En 1 litro de 1º. clase se pierde …	15 c.	
» 1 » » 2ª. » se gana ….		5c.
» 1 » » 3ª. » » »		15
» 1 » » 4ª. » » »		20
4 litros…………………………..	15c.	40c.

Siendo en la precedente combinación mayores las ganancias que las pérdidas, hay que compensarlas, lo que puede obtenerse poniendo, verbigracia, 3 litros de 1ª. clase, 2 de 2ª. 1 de 3ª. y 1 de 4ª. clase.

Hecha así la combinación, resulta que:

	Pérdidas	Ganancias
En 3 litros de 1ª. Hay………………………	45c	
» 2 » » 2ª. »……………………….		10c.
» 1 » » 3ª. »……………………….		15
» 1 » » 4ª. »……………………….		20
Sumas iguales …	45c.	45c.

Quedando compensados los quebrantos con las utilidades, se puede establecer que: mezclándose 3 litros de 1ª. con 2 de 2ª. 1 de 3ª. y 1 de la 4ª. clase (=7 litros), esa mezcla vale rigurosamente 0f ,65 c. el litro. En efecto:

	Valores
3 litros de 1ª. Valen 3x0f,75 =	2,25
2 » » 2ª. » 2x0,55 =	1,10
1 » » 3ª. Vale…………………………	0,45
1 » » 4ª. » ………………………	0,40
7 litros de vino mezclado valen………………	4f,20
Consiguientemente: 1 litro vale $\frac{4,20}{7}$ = ………	0f,60 .

CUESTIONARIO

¿Qué es Regla de mezcla? (692).

<45> Pág. 45, apénd.

PROBLEMAS PARA LAS PRÓXIMAS CONFERENCIAS

1º. Se han echado 12 litros de agua en 96 litros de vino de á 0f,90 el litro. ¿Qué vale un litro de esta mezcla?

2ª. Se han mezclado 9 kilogramos de té, de á 6 francos, y 6 kilogramos de té á 7f,20. ¿Qué vale un kilogramo de esta mezcla?

3º. Se ha hecho una mezcla de 5 litros de trigo, á 0f,45 con 15 litros á 0f ,40, y 30 litros á 0f ,35. ¿Cuál el precio de 1 decalitro de esta mezcla?

4º. ¿Cuántos litros se puede mezclar de trigo á 0f,45 con otro de á 0f,40 y otro de á 0f,35 el litro, para tener un hectolitro de trigo por 37f,50?

5º. ¿0Cuántos litros de vino, á 0f,75 se puede mezclar con litros de agua, para tener un hectolitro de mezcla, á 0f,60 el litro?

6º ¿Cuántos litros de vino, á 0f,45, se puede mezclar con otro de á 0f,50 y otro de á 0f,75 el litro, para tener 42 litros de vino á 0f,60 el litro.

7º. 75 litros de mezcla de vino con agua, á 0f,50 el litro de vino, han costado 33f ,75. ¿Cuántos litros de vino y cuántos de agua contiene esa mezcla?

8º. Un vaso A contiene una mezcla de 24 litros de vino y 12 de agua. Otro vaso B contiene una mezcla de 30 litros de vino y 18 de agua. Se tiene otros dos vasos vacíos, C y D, con una capacidad de 14 litros cada uno. Se llena C con la mezcla contenida en A, y D con la mezcla contenida en B; después, se echa en A lo que se ha sacado de B, y en B lo que se ha sacado de A. Se quiere saber qué cantidad de agua y de vino contiene cada uno de los vasos A y B, después de la operación.

CUADRAGÉSIMA-OCTAVA LECCIÓN

Regla de Aligación [1]

698. Los principales *metales,* es decir, los que se emplean más frecuentemente en las artes, son: el *oro,* la *plata,* el *fierro,* el *azogue,* el *estaño,* el *cobre* y el *plomo,* conocidos desde tiempo inmemorial; el *zinc* y el *antimonio,* descubiertos á mediados del siglo dieciséis; la *platina,* descubierta á mediados del siglo pasado, y el *aluminio,* descubierto á mediados del presente siglo.

699. ALIGACIÓN *es el resultado de la combinación de varios metales.* Se hacen las aligaciones., fundiendo reunidos los metales que se quiere mezclar. Se llama *barra, en general, á un pedazo de metal simplemente fundido, ó mezclado con otro ú otros metales; pero especialmente se aplica este nombre á la plata. El pedazo de oro fundido se llama tejo"*

700. Las principales aligaciones son: el *bronce,* formado de cobre y estaño; *el cobre amarillo ó latón,* formado de cobre y de zinc; *la sondure des plombiers,* formada de plomo y estaño; *los caracteres de imprenta,* formados de antimonio y plomo, y las *ligas de oro* ó *de plata,* formadas de oro y cobre ó de plata y cobre.

701. Se llama LEY *de una aligación de oro ó de plata,* la cantidad de *oro ó de plata que contiene un kilogramo de esa mezcla.*

702. La moneda de plata de Francia tiene la ley de 0,900; la vajilla tiene 0,950, y los cubiertos, las alhajas y demás obras de platería, tienen la ley de 0,800.

La moneda de oro tiene la ley de 0,900; la vajilla es de 0,920; y las alhajas son de 0,840 y de 0,750. Como el oro natural contiene siempre un poco de plata, las obras de oro contienen también y forman, por consiguiente, una triple aligación [2].

703. Las reglas de aligación no son sino un caso particular de la *regla de mezcla,* y se resuelven de la misma manera.

PRIMER EJEMPLO

704. *Se ha hecho una aligación llamada cobre amarillo ó latón* [3], *en que han entrado* 75 *kilógs. de cobre y* 25 *kilogramos de zinc: el cobre ha costado á razón de 1f,50 el kilóg., y el zinc á 1f,10 el kilóg. ¿Cuáles el precio de de 1 kilóg. de esa aligación?*

----

(1) Debida á los señores Dumouchel y Dupuis.

(2) Otro tanto puede decirse de las obras de plata, pues este metal contiene, casi siempre, algo de oro.

(3) El cobre y el zinc deben estar siempre en razón de 75 á 25, cualquiera que sea la unidad de peso.

.

Solución

75 kilóg. de cobre, á 1f,50 cuestan 75 X 1,50 = 112f,50
25 » de zinc, á 1f,10 » 25 X 1,10 = 27f,50
100 » de aligación cuestan……………………… 140f
1 » » » » $\frac{140}{100}$ = …………….. 1f,40

SEGUNDO EJEMPLO

705. *Se funden 75 gramos de un tejo de oro, de ley de 0,920 y 25 gramos de otro tejo, de ley de 0,310. ¿Cuál es la ley del nuevo tejo?*

Solución

1 gramo del 1º. contiene 0g ,920
75 gramos » » » 0g,920X75= ….. 69g
1 gramo » 2º. » 0g,840.
25 gramos » » » 0g,840X25=….. .21g
100 » de aligación contiene……………90g

1 gramo » » » $\frac{90}{100}$ =Ley =0g,900

TERCER EJEMPLO

706. *Se funden 200 gramos de una aligación de plata y cobre, de ley de 0,800 con 600 gramos de Plata pura: ¿Cuál es la ley de la nueva aligación?*

Solución

1g de la 1ª. aligación, tiene 0g,800
200g » » » » » 0g,800 X 200= 160g
600g » plata pura, tienen ………………….. 600g
luego; 800g » nueva aligación, tienen……………. 760g
y 1g » » » » =…….. 0g,950

CUARTO EJEMPLO

707. *¿En qué proporción hay que ligar un tejo de oro de ley de 0,920 con otro de ley de 0,750, para tener un tejo de 0,840?*

Solución (1)

Procediendo como en el *Segundo Ejemplo de la Regla de mezcla,* se tiene:

	Pérdidas	*Ganancias*
En 1g del primer tejo (que tiene 0,920)		
Dándolo á 0,840, se pierde………………	0,080	
En 1g. del segundo tejo (que tiene 0,750)		
dándolo á 0,840, se gana ………………….		0,090

Comparando en este estado la pérdida con la ganancia, se nota que, si á la pérdida se agrega 0,010, queda compensada la una con la otra. Y ¿qué viene á ser 0,010 respecto á 0,080? Justamente la octava parte. Pues bien: aumentando $\frac{1}{8}$ de gramo á 1g del 1er. tejo, la cuestión queda resuelta, porque entonces la liga de 1 $\frac{1}{8}$ gramo del 1er. tejo con 1 gramo del 2.°, la nueva liga tendrá la ley de 0,840.

----
(1) Noveaute.

Verificación

1 $\frac{1}{8}$ gramo del 1er. tejo, á 0,920, tiene en oro

1 $\frac{1}{8}$ X 0,920 = ... 1,035

1 gramo del.2º. tejo, á 0,750, tiene en oro...... 0,750

2 $\frac{1}{8}$ g .... *Sumas*........................ 1g,785

De ahí, 1g de nueva liga tendrá 1,785 : 2 $\frac{1}{8}$
= 1,785 X $\frac{8}{17}$ = ... 0,840.

Eso demostrado, pudiera surgir esta observación: que con 2 $\frac{1}{8}$ gramos nada puede hacerse, por ser muy pequeña cantidad. Para desvanecer tal observación, se considera la liga que acaba de hacerse como un ensayo en pequeño, que tiene por objeto establecer nada más que la *medida* (por decirlo así) que ha de servir para poder hacer, sobre esa base, la operación en mayor escala. Al efecto, bastará multiplicar cada uno de los componentes de esa medida por un número conveniente, para que produzca la cantidad deseada. Como en el presente caso figura la fracción $\frac{1}{8}$, lo más natural es tomar 8 por multiplicador, á fin de hacer que desaparezca tal fracción. Así:

1 $\frac{1}{8}$ gramo X 8 = 9
1 » X 8 = 8

Quiere decir, que se tendría una aligación en que los componentes entrarían en razón de 9 á 8, ó sea (poniendo estos números en forma de fracción) $\frac{9}{8}$, esto es, 9g del primer tejo por 8g del segundo.

Si aún no satisficiese esta cantidad, se la podría doblar, triplicar, ó multiplicarla por el número que se creyere conveniente; sea, verbigracia, por 10. Entonces, se tendrá:

9 x 10 = 90
8 x 10 = 80.

Esto es, que, fundiendo 90g del 1er. tejo con 80g del 2º. resultaría un nuevo tejo de peso de 90 + 80 = 170g, que tendría la ley de 0,840 por gramo.

A mayor abundamiento, hijos míos, quiero daros en seguida la *Solución* de los señores Dumouchel y Dupuis, porque, aunque un tanto metafísica, es de más fácil aplicación que la anterior, y, por consiguiente, preferible á ella.

Dice la solución, textualmente traducida:

El nuevo tejo debe tener la ley de 0,840; por consiguien
«te, 1g de liga de ley de 0,920 contiene 0g,920 -0g,840
«0g ,080 de oro excedente; y sobre 1g de liga de la ley
«de 0,750, hay un déficit de 0g ,840 -0g ,750 ó 0g ,090.
«Luego, es preciso tomar 90g del primer tejo y 80g del
«segundo; en efecto, de una parte, habrá de más 90 veces
«0g,080 de oro; de otra parte, faltará 80 veces 0g ,090; más
«si 90 veces 80 es igual á 80 veces 90, habrá compensa-
«ción. La razón de 90 á 80 es igual á la razón de 9 á 8 ;
«luego, es preciso tomar 9 gramos del primer tejo, y 8
«gramos del segundo.»

J.- No comprendo de dónde se ha arrancado la primera conclusión, que dice: «*Luego, es preciso tomar 90g del 1er. tejo y 80 del 2º.* ».

P.- Esa conclusión la, han esclarecido posteriormente los señores Dumouchel y Dupuis, demostrando que los productos de ganancias y pérdidas son iguales; pero, á fin de que dicha solución os sea más comprensible, voy á ver de ponerla al alcance de vuestros débiles conocimientos.

1g del primer tejo, comparado con 1g de la nueva liga que se trate de formar, ofrece una pérdida de 0,080; por otra parte, en 1g del 2º. Tejo, hay la ganancia de 0,090. Ahora bien; si tomásemos de golpe 90g del 1er. tejo y 80g del 2°. tendríamos:

Por una parte la pérdida de *90 veces* 0,080,
y por otra parte la ganancia de 80 *veces* 0,090;

pero 90 X 0,080 es igual á 80 X 0,090; luego hay compensación, y, habiéndola, se puede tomar 90g del 1er. tejo y 80g del 2°. para efectuar la nueva liga.

Mas, si dicha cantidad pareciese excesiva, se remediaría el inconveniente reduciendo á lo preciso cada uno de los componentes, por ejemplo, á una décima parte, es decir, á 9g del 1er. tejo por 8g del 2°.

Verificación:

9 g del 1er. tejo, á 0,920, contienen en oro………………….	9 X 0,920 = 8g, 280
8g del 2°. tejo, á 0.750, contienen en oro………………….	8 x 0,750 = <u>6g</u>
17g de nueva liga, contienen..	14g,280
Luego, 1g » » contiene $\frac{14,280}{17}$	= 0g,840

QUINTO EJEMPLO

708. *¿Cuantos gramos de un tejo de oro, de ley de 0,920 y cuantos de otro tejo, de ley de 0,750, se deben fundir para formar un nuevo tejo, que tenga 850 gramos de peso con ley de 0,840?*

Procediendo como en el precedente Ejemplo, se ve que, para formar una aligación que contenga en oro 0,840 por gramo, de dos tejos, el uno de ley de 0,920 y el otro de 0,750, se necesita poner 9g del 1er. tejo por 8g del 2º. En este concepto, para obtener un tejo de 850g que tenga esta última ley, todo lo que hay que hacer es buscar á cómo cabe en esta cantidad cada uno de los componentes de la base, que aquí son 9 + 8 = 17. Procediendo, al efecto, con arreglo al 1er. Ejemplo de la *Regla de partición* (art. 670), se tienen las proporciones siguientes:

$$17 : 9 :: 850 : x = \frac{9 \times 850}{17} = 450g$$

$$17 : 8 :: 850 : y = \frac{8 \times 850}{17} = \underline{400\ g}$$

Suma = 850 g

Verificación:

450 g del 1er. tejo,	á 0,920,	tienen en oro	414g
<u>400 g</u> del 2º. »	á 0,750	» »	<u>300g</u>
850g de nueva aligación,		tienen »	714 g
1g » »	»	tiene »	0g 840 .

SEXTO EJEMPLO

709. *¿En qué proporción es menester tomar de un tejo de oro, de ley de 0,750, para hacer una liga con oro puro y formar un nuevo tejo que tenga la ley de 0,840?*

Solución:

1g del tejo, comparado con 1g de la liga que se trata de formar, ofrece una ganancia de 0,090; por otra parte, en 1g de oro puro, hay la pérdida de 0,160 (*). Ahora bien: tomando (á la usanza de los señores Dumouchel y Dupuis) 150g del tejo y 90g de oro puro, tendríamos:

Por una parte, la ganancia de 170 *veces* 0,090,
por otra » la pérdida de 90 *veces* 0,160,

y habría compensación; mas, como esas cantidades podrían ser excesivas, nos limitaremos á tomar una décima parte de ellas, esto es, 16g del tejo y 9g de oro puro.

Verificación:

16 g á 0,750, contienen, en oro, 16 X 0,750 = 12g
9 g de oro puro, contienen …………………. 9g
25 g de aligación, contienen, en oro ………… 21g
1 g de » » » $\frac{21}{25}$ = 0g 840

SÉPTIMO EJEMPLO

710. *Un platero tiene 800 g. en un tejo de oro, ley de 0,750. ¿Qué cantidad de oro puro deberá agregar para elevar la ley á 0,840* ?

Solución:

Se puede buscar, desde luego, la proporción en que sea necesario ligar un tejo de oro de ley de 0,750 con oro puro,

para elevar la ley á 0,840, Procediendo, en seguida, con arreglo al 6º. Ejemplo (art.709), se ve que es preciso tomar 16g del tejo por 9g de oro puro.

(¹) Sobre esa base, fácil es calcular qué cantidad de cada especie contendrán los 800g de nueva aligación. Procediendo con arreglo al 1er. Ejemplo de la *Regla de partición* (art. 670), se encuentra que:

Del tejo deben entrar………….. 512g
y de oro puro ……………………288g
Suma…. 800g

Verificación:

512g del tejo, á 0,750, contienen en oro……………… 512 X 0,750 = 384g
288g de oro puro, á 1,000, contienen en oro ………… = 288g
800g de aligación, contienen en oro ……………….. . = 672g
Luego, 1g de aligación, contiene $\frac{672}{800}$ = 0g 840

(*) Bien entendido, que 1g. de oro puro tiene 1g de ley, ó sean 1000 miligramos.
(¹) Nouveauté.

OCTAVO EJEMPLO

711. *Un platero tiene una barra de plata con peso de* 640g *y ley de 0,950. ¿Qué cantidad de cobre debe agregar á dicha barra para bajar la ley á 0,800?*

Solución:

La nueva liga debe tener la ley de 0,800; por consiguiente, 1g de esa plata contiene 0g,950 - 0g,800 á 0g,150 de plata excedente; y sobre 1g de cobre hay un déficit de 0g,800. Luego, es preciso tomar por 800g de barra, 150g de cobre. En efecto, por una parte, habrá de más 800 veces 0g,150 de plata y, por otra parte, faltará 150 veces 0g,800; pero 800 X 0,150 es igual á 150 X 0,800; luego, habrá compensación. La razón de 800 á 150 es igual á la de 80 á 15, y esta misma es igual á la de 16 á 3; luego se puede tomar—

por 16g de dicha barra 3g de cobre,
Por 1g de » » $\frac{3}{16}$ » »
16
y por 640g de » » $\frac{3}{16}$ x 640 = 120g

Verificación

640g de barra, con ley de 0,950, contienen en plata
640 X 0,950 = ……………………………….. 608g
120g de cobre ……………………………………… 0g
760g de nueva aligación …………………………….. 608g
Luego 1g ………….. contiene = ……………………. 0g800

CUESTIONARIO

¿Qué es *aligación?* (699).- ¿Qué es lo que se llama *ley* de una aligación de oro ó de plata? (701).

<46> pág. 47, Apénd.

PROBLEMAS PARA LAS PRÓXIMAS CONFERENCIAS

1º. El bronce de los cañones y de las estatuas se *forma* de 90 partes de cobre y de 10 de estaño. El kilog. de cobre cuesta 1f,50 y el kilog. de estaño 2f,50. ¿Cuál es el precio de 1 kilog. de bronce?

2º. Los caracteres de imprenta contienen 80 partes de plomo y 20 de antimonio. ¿Cuál es el precio de esta aligación, en el concepto de costar el plomo 0f,75 el kilog., y el antimonio 3f el kilog?

3º. Se funden juntamente 250g de una liga de plata y de cobre que tiene la ley de 0,800 y 250g de plata pura. ¿Qué ley tiene la nueva aligación?

4º. El latón se forma de 75 partes de cobre y 25 de zinc. ¿Cuántos kilog. de cobre y cuántos de zinc contienen 12 kilog. de latón?

5º. El bronce de los cañones se forma de 90 partes de cobre y de 10 de estaño. ¿Cuántos kilog. de cada especie contiene un cañón de peso de 160 kilog.?

6º. El latón contiene 75 partes de cobre y 25 de zinc: el precio de 1 kilog. de zinc es 1f,10 y el del latón 1f,40. Se pregunta, ¿cuál ha debido ser el precio del cobre?

7º. ¿Cuántos grams de un tejo de oro, de ley de 0,900, y de otro tejo de 0,750 es preciso ligar para tener un nuevo tejo, con ley de 0,840 y peso de 1 kilog.?

8º. ¿En qué proporción debe ligarse un tejo de oro de ley de 0,840 con oro puro, para elevar la ley de aquél á 0,900?

9º. Se tiene 1 kilog. en un tejo de oro de ley de 0,900. ¿Qué cantidad de oro puro se le debe agregar para elevar su ley á 0,920?

10º. ¿Cuántos gramos de cobre y cuántos de barra de plata á 0,900 es preciso ligar para tener 1800g de aligación de ley de 0,800?

11º. Un obrero tiene dos tejos de oro, con peso de 3 kilog. cada uno; el primero tiene la ley de 0,750 y el segundo de 0,900. ¿Cuántos grama del segundo debe agregar al primero para elevar la ley de éste á 0,800?

12º. (1) Un platero tiene dos barras de plata: la primera contiene 360g de plata y 90g de cobre; la segunda contiene 486g de plata y 54g de cobre. ¿Cuántos gramos de cada barra deben tomarse para formar una nueva barra de peso de 200g y que contenga 175g de plata?

CUADRAGÉSIMA-NONA LECCIÓN

Cuestiones diversas

Como las cuestiones de que va á. tratarse se rozan con el Algebra, se hace necesario ampliar las nociones que se dieron, acerca de las *ecuaciones,* en los arts. 301 al 304 inclusive: tales el objeto de las siguientes

PREVENCIONES

§ 1.

712. 1ª. Hay que admitir, como verdad evidente: que, cuando se ha formado una ecuación, puede invertirse el orden, de modo que el primer miembro ocupe el lugar del segundo y viceversa, sin que este cambió altere en nada la ecuación, verbigracia:

$$\frac{8}{2} = 4,$$

ó bien,

$$4 = \frac{8}{2}.$$

2ª. Se puede pasar cualquier término del primer miembro al segundo, ó del segundo al primero, con tal de que se tenga el cuidado de cambiar su signo.

Sea, por ejemplo, la ecuación que viene en seguida, en el concepto de tener x el valor de 8.

EJEMPLO

$$x + 6 + 7 + 4 = 25$$

Si le conviene á uno hacer pasar el término 7 al segundo miembro, se tendrá:

$$x + 6 + 4 = 25 - 7,$$

y la ecuación no se habrá alterado; pues si bien el valor del primer miembro ha disminuido en 7 unidades (comparativamente á la anterior ecuación), ha disminuido en otro tanto el segundo miembro.

----

(1) Se ha corregido el original.

Y es de notar que el hecho de haberse suprimido el 7 en el primer miembro, importa una verdadera substracción, la misma que se ha efectuado matemáticamente en el segundo miembro, sin más que haberse puesto antes del 7 el signo *menos.*

OTRO EJEMPLO (en que x vale también 8)

$$x \text{ -: } 3 + 6 + 7 + 4 = 22.$$

Si le conviene á uno hacer pasar el término -: 3 del primero al segundo miembro (porque así convenga al cálculo) se tendrá:

$$x + 6 + 7 + 4 -22 + 3.$$

Es verdad que el segundo miembro, comparado con el de la anterior ecuación, ha aumentado en 3 unidades; pero ha sucedido lo propio en el primer miembro de esta ecuación, siendo de notar que el hecho de haberse suprimido el término —3 en el primer miembro, ha importado una verdadera adición; pues que ese término le quitaba á la incógnita x 3 unidades de su valor, que con la desaparición de dicho término, los ha recobrado aquélla.

3ª. Cuando en una ecuación hay divisores ó paréntesis, ó unos y otros á la vez, hay que comenzar por hacer desaparecer los divisores principales, esto es, los que están fuera de los paréntesis, efectuando previamente las operaciones del caso, es decir, reduciendo todos los términos á un común denominador, y haciendo en seguida las multiplicaciones indicadas por los signos, para que desaparezcan los paréntesis; bien entendido que, á falta de signos de multiplicación, los paréntesis hacen las veces de aquéllos.

Si los paréntesis contuvieren fracciones ó números fraccionarios, habrán de resultar nuevos divisores y, por consiguiente, será menester hacerlos desaparecer del mismo modo que los principales divisores, como queda dicho.

4ª. Colocar en el primer miembro de la ecuación todos los términos incógnitos, y en el segundo miembro, los términos conocidos, cuidando de cambiar los signos á los términos que hayan pasado de uno á otro miembro.

5ª. Hacer la reducción de suerte que todos los términos incógnitos formen un solo término, en el primer miembro, y un término conocido en el segundo.

6ª. Cambiar todos los signos de la ecuación, siempre que el término incógnito lleve el signo *menos.*

7ª. Dividir los dos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita. Esto es lo que se entiende por *aislar la incógnita.*

713. He aquí un ejemplo que exige casi todas estas transformaciones:

$$3\left(\frac{2x-5}{2}\right) + \frac{5+}{3} + 1 = 7\left(\frac{3x-2}{3}\right) + \frac{7x}{4} + 5$$

Para hacer que desaparezcan los divisores, se multiplicará todo por 12, que es el más pequeño múltiple; lo que dará:

(*) $18(2x-5) + 20x + 12 = 28(3x-2) + 21x + 60$

(*) Es de advertir que, por economizar el tiempo, se ha suprimido la ecuación en que todos los términos debían tener un denominador común, esto es:

$$\frac{6x3(2x-5)}{12} + 4 \text{ x } \frac{5 \text{ x}}{12} + \frac{12 \text{ x } 1}{12} = \frac{4x7(3x-2)}{12} + \frac{3 \text{ x } 7x}{12} + \frac{12 \text{ x } 5}{12},$$

y, en la subsiguiente ecuación, haciéndose prescindencia del denominador común, se trata á los numeradores como si fuesen números enteros (arts. 276 al 278).

Efectuando las multiplicaciones,

$$36\,x - 90 + 20\,x + 12 = 84\,x - 56 + 21\,x + 60$$

Haciendo pasar los términos incógnitos al primer miembro, y los conocidos al segundo, se tiene:

$$36\,x + 20\,x - 84\,x - 21\,x = -\,56 + 60 + 90 - 12$$

Reduciendo, resulta,

$$—\,49\,x = 82$$

Cambiando los signos,

$$49\,x = -\,82$$

Dividiendo los dos términos por 49,

$$x = \frac{82}{49}$$

714. Para verificar, se pondrá este valor en la ecuación primitiva, y se tendrá:

$$\frac{3\left(-\frac{2 \times 82}{49} - 5\right)}{2} — \frac{5 \times 82}{3 \times 49} + 1 = \frac{7\left(— \frac{3 \times 32}{49}\ \ 2\right)}{8} — \frac{7 \times 82}{4 \times 49} + 5$$

Se multiplicará todo por 588 = 2 X 2 X3 X 49, lo que dará:

$$882\left(-\,\frac{2 \times 82}{49} - 5\right) – 1640 + 588 = 1372\left(-\,\frac{3 \times 82}{49} - 2\right) — 1722 + 2940$$

Habiendo resultado aquí nuevos divisores, parece á primera vista, que fuera menester dar á todos los términos de la ecuación un denominador común, á fin de poder tratar á los numeradores como si fueran números enteros; pero, como esto alargaría inútilmente la operación, vamos á ver el modo de abreviarla, reduciendo al efecto las dos expresiones fraccionarias de la precedente ecuación á números enteros. Para lo cual basta dividir por 49 los dos términos de cada fracción (art. 391), lo que es evidentemente posible en el presente caso, pues que los números 882 y 1372 (factores de los paréntesis), han provenido de una multiplicación por 49. Así: dividiendo por 49 los dos términos de la expresión fraccionaria 882 $\left(-\,\frac{2 \times 82}{49} - 5\right)$; se tiene 18.(- 2 X 82 -5); y, del mismo modo, dividiendo por 49 la otra expresión fraccionaria 1372 $\left(-\,\frac{2 \times 82}{49} - 2\right)$, resulta 28 (-3 X 82 -2), con lo que la ecuación precedente ha de quedar transformada en números enteros, esto es:

18 (- 2 X 82 -5) -1640 + 588 = 28 (- 3X 82 -2)
-1722 + 2940

Efectuando las multiplicaciones,

-2952 -4410 -1640 + 588 = 6888 -2744 -1722 + 2940

Reduciendo,

-8414 = - 8414

§ 2

Con el auxilio de las precedentes *Prevenciones* vamos á resolver algunas cuestiones; que servirán de modelos.

715. *1ª. Un obrero puede hacer cierto trabajo en* 8 *días; otro obrero, menos hábil, no puede hacerlo sino en 12 días. ¿Cuántos días emplearán los dos obreros trabajando juntos?*

Solución

La presente cuestión pertenece á la *Regla de tres compuesta,* y con ella diremos:

El primer obrero puede hacer en un día $\frac{1}{8}$ de la obra;

el segundo haría en un día……. ……… $\frac{1}{12}$ » »

los dos juntos harán en un día…… $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ » »

Reduciendo las dos fracciones á un común denominador resulta que

$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{3+2}{24}$ *son* $\frac{5}{24}$ *de la obra, en día*

En ese estado, la cuestión puede transformarse en esta otra: «*Puesto que las dos fuerzas reunidas pueden hacer en un día* $\frac{5}{24}$ *de la obra, ¿en cuánto tiempo podrían terminarla?*»

La expresión del valor íntegro de la obra, sería $\frac{24}{24} = 1$.
Ahora bien:

$\frac{5}{24}$ *(de la obra)* : 1 *(la obra entera)* : : 1 *(día* : x *(días)*

De ahí la siguiente ecuación:

$x = 1$ X, $1 : \frac{24}{5} = 1$ X $\frac{24}{5} = 4$ *(días)* + $\frac{4}{5}$ (de *día)*

716. 2ª. *Un estanque es alimentado por dos fuentes: la primera, corriendo sola, lo llenaría en* 3 *horas; la segunda en* 2 *horas, ¿Cuánto tiempo seria menester para llenar el estanque corriendo á la vez ambas fuentes?*

Solución

Razonando como en la precedente cuestión, y tomando como incógnita *cuánto tiempo,* se tendrá:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$ *de hora* (término de comparación)

De ahí,

$1 : \frac{5}{6} = 1$ X $\frac{6}{5} = \frac{6}{5} = 1$ *hora* + 12 *minutos*

717. 3ª. *Un estanque se halla alimentado por dos fuentes.. la primera, corriendo sola, lo llenaría en* 8 *horas; la segunda emplearía* 24 *horas; mas existe, en la parte inferior del estanque, un robinete por el cual podría vaciarse completamente el estanque en* 15 *horas, ¿Cuánto tiempo se necesitaría para llenar el estanque, dejando correr el agua por los tres conductos?*

Solución

La 1ª. fuente ocuparía, en una hora……….. $\frac{1}{8}$ del estanque;

» 2ª. » » » » » ………… $\frac{1}{24}$ » »

Por el robinete se escaparía, en una hora… $\frac{1}{15}$.

De ahí,

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{15} = \frac{15+5-8}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10};$$

resultando que en una hora estaría ocupada $\frac{1}{10}$ parte.

Ahora, para saber en cuánto tiempo estaría lleno el estanque, procediendo como en las cuestiones anteriores, se tiene:

$$1 : \frac{1}{10} = 1 \text{ X } \frac{10}{1} = 10 \textit{ horas}$$

718. 4ª. *Partir* 1278 en *tres partes, tales* que la mayor *sobrepase la media con* 123, *y* que *ésta sobrepase á* la me*nor con* 12.

Tomando la parte media por término de comparación, y que la llamaremos *x,* tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Parte mayor } x + 123 \\ \quad \text{» media } x \\ \quad \text{» menor } x - 12 \end{array}\right\} \text{Suma } 3x + 123 - 12 = 1278$$

Efectuando la adición y la substracción expresadas en la precedente ecuación, resulta:

$3x + 111 = 1278$
$3x \quad = 1278 - 111 = 1167$
$x = \quad = 1167 \quad = 389$ (*Parte media*)

Verificación:

Parte mayor 389 + 123 = 512
» media 389 ……...= 389
» menor 389 - 12 = 377
Suma = 1278

719. 5ª. *Dos correos* marchan *por* la *misma* ruta: *el 1º. parte* de u*n punto A y camina* 5 *kilómetros por hora: el* 2º. *parte del punto B, y sólo hace* 3 *kilómetros; el correo del punto A partió horas antes que el del punto B. Se pregunta ¿en qué punto del camino alcanzará el 1º. al* 2°. *en el concepto de que del punto A al punto B hay 60 kilómetros?*

Antes de ocuparnos en resolver este problema, conviene oír al maestro Adhémar, quien, en su tratado de Algebra, se explica como sigue:

§ 3

720. Se llama *ecuación literal* aquella en que se representa por letras, en vez de números, las cantidades que no pueden ser conocidas sino en el momento de la aplicación. Una vez formulada la ecuación, se la resuelve como de ordinario.

La expresión algebraica que se obtiene como valor de la incógnita, se llama una *fórmula.*

Así una ecuación literal, es la traducción algebraica de todas las cuestiones que son, en cierto modo semejantes, y que no difieren entre sí sino por el valor de las cantidades que se combinan.

Mas, para sacar de esas fórmulas todo el partido posible y emplearlas siempre con oportunidad, es preciso comprender bien lo que ellas expresan y, para esto, es menester hallarse en estado de obtenerlas uno por sí propio, sobre todo cuando se trata de cuestiones que no han sido resueltas toda vía.

La mayor ventaja de este ramo de las Matemáticas consiste en la facilidad que proporciona para generalizar las ideas, y por consiguiente, para resolver de un solo golpe todos los problemas de la misma naturaleza.

Conviene además, que os haga por mi parte, una breve explicación, á saber:

721. Los signos que se emplean en Algebra para las operaciones de adicionar, sustraer, multiplicar y dividir, son los mismos que se usan en la Aritmética, con esta excepción: que, cuando deben colocarse dos ó más factores literales en seguida unos de otros, no se pone entre ellos el signo de multiplicación.

EJEMPLOS

Adición: 4 + 3+ 5 = *a* + *b* + *c*

Pero si queremos sustraer el último número del producto de los dos primeros, escribiremos:

(*) Sustracción: 4 X 3 -5 = *a b* -c

Y si se quiere que los tres números sean factores, se escribirá:

4 X 3 X 5 = *abc*

Eso establecido, vamos á hacer una *fórmula.*

722. Supongamos que yo, banquero, teniendo que hacer diariamente cuentas de intereses por cobrar y por pagar, necesito una fórmula para poder ajustar cada cuenta en un momento, sin necesidad de recurrir á la regla de tres ni á la reducción á la unidad. Al efecto, fijándome en la expresión numérica señalada con el signo *(b)* en el art. 619, me digo: «Para generalizar esa expresión á todos los casos análogos, voy á representar el capital (cualquiera que él pueda ser) por la letra *c,* el interés tipo por *i,* y el tiempo por *t.»* Entonces, tengo:

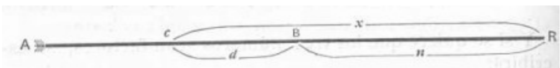
$$\frac{600 \times 8 \times 4}{100} \qquad \frac{cit}{100}$$ (*fórmula*) .

Nota. Si el tiempo fuese mayor ó menor que 1 año, se estará á lo prescripto en el art. 621.

§ 4

Ahora, volviendo á la 5ª. Cuestión, he aquí la

Solución



A - unto de partida del primer correo; B - unto de partida del segundo correo; R punto de reunión.

A primera vista, parece que en esta cuestión hubiera tres cantidades incógnitas, esto es: la distancia de A al punto de reunión, que en la figura está representada por R; la distancia de *c* á R y de B á R; pero, si bien se examina, puede reducirse la cuestión á una sola incógnita, que será si se quiere, la distancia comprendida entre *c* y R, ó la comprendida entre B y R. Eligiendo la distancia *c* R, porque así me place, paso á expresar con letras las cantidades conducentes á descubrir el valor de la incógnita, á saber:

(*) Nota: Algunas veces el signo – tiene otro significado muy diverso del que tiene en Aritmética, como se verá después, (art. 727).

Distancia c R = x
» c B= d
» B R= n

Nota.- Hago abstracción, por lo pronto, de la distancia A *c,* por no ser necesaria para el descubrimiento de la incógnita, como va á verse.

En seguida, planteo algebraicamente la cuestión, en estos términos:

$$x = d + n$$

Mas, no encontrando una relación directa entre estas cantidades, porque no puedo saber cuántas veces estará contenida d en x ni n en x, apelo al recurso de buscar una relación entre las cantidades relativas á la velocidad de los correos, y veo que el 2º. correo (que ha partido del punto B) camina en 1 hora sólo 3k, mientras que el 1er. correo (que partió del punto A) camina, en el mismo tiempo,. 5k, y concluyo de ahí, que una y otra velocidades están en razón de 3 á 5, ó sea $\frac{3}{5}$.

Fijándome en las distancias que dichos correos avanzan en una hora, veo que ellas están también en razón de 3 á 5,. esto es, $\frac{3}{5}$. Concluyo que la distancia n (recorrida por el 2º. correo) ha de ser $\frac{3}{5}$ partes de la distancia x, una vez que, desde que el 1er. correo llegó al punto c, ambos correos han estado en movimiento.

Por otra parte, se desprende de la enunciación del problema, que d representa 30k, puesto que de A á B hay 60k, y que el 1er. correo (que avanza 5k por hora) debió haber recorrido 30 k en las 6 horas que llevó de ventaja.

Demostrado que d vale 30k, y que n es igual á $\frac{3}{5}$ x, reemplazando estos dos valores en la ecuación que precede, tenemos:

$$x = 30 + \frac{3}{5} x.$$

Haciendo pasar al primer miembro de esta ecuación el término $\frac{3}{5}$ x del segundo miembro, resulta:

$$x - \frac{3}{5} x = 30$$

Encerrando en un paréntesis los dos términos con x, viene:

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right) x = 30$$

Reduciendo,

$$\frac{2}{5} x = 30.$$

Aislando la incógnita,

$$x = 30 : \frac{2}{5} ,$$

tenemos resuelto el problema; porque el segundo miembro de la ecuación, da el valor numérico de x, En efecto:

$x = 30 \times \frac{5}{2} = 7 = 75$k *(valor de la incógnita).*

Agregando á ese valor los 30k que avanzó el 1er. correo antes de que se moviera el 2º. resulta:

75 k + 30k = 105k

Quiere decir, que el 1er. correo alcanzará al 2º. á los 105 k del punto de partida A.

En cuanto al trayecto recorrido por el 2º. correo, como él debe ser $\frac{3}{5}$ de x, esto es, del espacio comprendido entre *c* y R, tendremos:

$\frac{3}{5}$ de 75 = $\frac{225}{5}$ = 45 *kilómetros.*

Nota.- Si se desea saber cuánto tiempo ha empleado cada correo, para hacer su respectivo trayecto, basta dividir la distancia que cada cual ha recorrido, por los números que expresan su velocidad respectiva, esto es:

El 1º. ha empleado 105 : 5 = 21 *horas;*
El 2° » 45 : 3 =15 *horas.*

724. 6ª. *Las circunferencias de las ruedas de un coche son* 3 *metros 50 centímetros y* 2 *metros* 25 *centímetros; se sabe que para ir de tal punto á cual otro, la pequeña rueda ha dado 2400 vueltas de más que la grande. ¿Cuál es el espacio recorrido?*

Solución:

Si me propusiese buscar directamente el valor numérico de todo el espacio recorrido (que podría llamarse x, según la enunciación del problema), me vería embarazado por falta de un término de comparación; porque, si bien el espacio recorrido por la rueda grande (en 1 vuelta), es 3m,50, y el recorrido por la pequeña (en su vuelta) es 2m,25, no puedo saber cuántas veces está contenida una ú otra de estas dos cantidades, en el espacio total, que es desconocido.

En vista de tal dificultad, desentendiéndome por lo pronto del valor de x, contraigo la atención á las cantidades relativas á las vueltas, en combinación con las dos circunferencias. Veo, desde luego, que en todo el trayecto, la rueda pequeña ha hecho 2400 vueltas de más que la grande, lo que es un precioso dato, porque, como dice el refrán, *«por el hilo se saca el ovillo»,* en efecto, con este auxilio puede descubrirse cuántas vueltas ha debido dar la rueda grande para que la pequeña haya dado 2400 vueltas de más que aquélla. Para ello, tomo como incógnita accidental el *número de vueltas* que ha dado la grande, llamándola m (como tantas veces lo hemos hecho hablando de las proporciones).

Necesitando ahora un término de comparación, lo busco razonando de este modo:

«La rueda grande, para caminar 3m,50, sólo ha necesitado dar 1 vuelta, pues que su circunferencia tiene 3,50. Entre tanto, la pequeña rueda, cuya circunferencia sólo tiene 2m,25, ha tenido que dar algo más de 1 vuelta; pero ¿qué porción de vueltas viene á ser ese *algo más?* Es de notar que el metro *(medida de extensión)* puede servir también para medir *las vueltas* que da una rueda, por cuanto que ésta avanza, en cada vuelta, tanto espacio cuanta es la dimensión de su circunferencia. Por otra parte, es evidente que la diferencia entre las vueltas está en razón inversa de las circunferencias.

Eso sentado, resulta que, mientras la rueda grande ha dado una vuelta (= 3m,50), la segunda ha dado una vuelta + una *fracción de vuelta,* que como se ha dicho, puede representarse por $\frac{1m,25}{2m,25}$. Una simple regla de tres confirmará esta verdad.

2m,25: 1m,25 :: 1 vuelta pequeña: n vueltas pequeñas.

$$n = \frac{1,25}{2,25} = \frac{125}{225} = \frac{23}{45} = \frac{5}{9} \quad \text{(de vuelta)»}.$$

«Así obtenido el exceso de vuelta que ha tenido que dar la pequeña rueda por 1 sola vuelta de la grande, ya tenemos un término de comparación para poder apreciar la totalidad de vueltas de la rueda grande, por medio de la siguiente proporción:

$\frac{5}{9}$ de exceso: 2400 :: 1 vuelta grande: m vueltas grandes

$$m = 2400 : \frac{5}{9} = 2400 \times \frac{9}{5} = 480 \times 9 = 4320 \text{ vueltas.»}$$

Obtenido el valor de m, doy por resuelto el problema; porque, siendo 3m,50 lo que camina la rueda grande en 1 vuelta, en 4320 vueltas habrá caminado 4320 X 3m,50, como lo comprueba, á mayor abundamiento, esta proporción:

1 vuelta: 4320 vueltas :: 3m,50 : Xm.

$X = 4320 \times \frac{350}{100} = 432 \times 35 = 15120m = 1512$ *decámetros* (*).

.

Verificación

La rueda grande, en 4320 vueltas, ha hecho 15.120m.

La pequeña, en 4320 vueltas + 2400 = 6720 vueltas, ha hecho 6720 X 2m,25 = 15.120m.

CUESTIONARIO

¿Qué reglas deben tenerse presentes para resolver una ecuación? (712).- ¿Qué es *ecuación literal?* (720). - ¿Qué es *fórmula?* (720).- ¿Qué signos emplea el Algebra para indicar las operaciones de adicionar, sustraer, multiplicar y dividir? (721).- ¿Cómo se procede para obtener una *fórmula?* (722).

PROGRAMA PARA LA PRÓXIMA CONFERENCIA

Exposición de *dudas* y *consultas* acerca de las 6 precedentes cuestiones, etc.

PRIMERA CONFERENCIA *(sobre la* 49ª. *Lección)*

P.- Se abre la Conferencia.

M.- En vista de las Verificaciones hechas al final de cada una de las Soluciones contenidas en la última Lección, se convence uno de la exactitud del resultado; pero queda cierto vacío que voy á ver de expresarlo.

El procedimiento empleado en algunas de las soluciones es distinto del que se ha empleado en las otras, así como son distintas también las operaciones practicadas, lo cual se explica fácilmente, por ser *diversas* las cuestiones; mas, deseo saber á qué regla ó reglas deberá uno atenerse para formular con acierto las operaciones previas, conducentes al planteamiento de la ecuación final.

P. Tú has herido la dificultad; y, á propósito, creo del caso comenzar mi respuesta por reproducir lo que al respecto dice el Maestro Adhémar, en su tratado de Algebra, páginas 81, 82, 85 y 86.

725. «112. Cuando se quiere resolver una cuestión matemática, preciso es, desde luego, descubrir cuáles son las operaciones que deben hacerse, y efectuar en seguida esas operaciones. Para obtener el resultado se debe proceder de la manera siguiente:»

«Se comienza por traducir, en lenguaje matemático, la cuestión propuesta, lo que da lugar á una ó más ecuaciones, según el número de las incógnitas.»

«Resolviendo esas ecuaciones, se obtienen los valores de las incógnitas expresadas en lenguaje matemático, de suerte, que no falta sino efectuar las operaciones indicadas por los signos.»

(*) Sin duda por equivocación ó error de imprenta, *se* dijo .1512 *kilómetros* en el tratado de Algebra de Mr. Adhémar, pág. 47; segunda edición.

«113. La traducción de la cuestión propuesta es, ordinariamente, lo que embaraza á la mayor parte de las personas que comienzan el estudio de las matemáticas. Sin embargo no se puede decir que sea tan difícil esta parte del trabajo; mas ella exige un hábito del lenguaje matemático, que no puede adquirirse de golpe No es sinó por la solución de un gran número de problemas, que se puede adquirir el hábito de resolverlos."

«114. Se ha hecho el ensayo de dar reglas generales para facilitar el planteamiento de la ecuación con auxilio de ciertos signos...; pero lo más difícil no es *expresar las relaciones que existen entre las cantidades que se comparan, sino el descubrir* esas relaciones. Y bien, como las cuestiones pueden variar de una infinidad de maneras, se concibe que es imposible dar una regla bastante general para que pueda ella aplicarse á todos los casos.»

«115. Lo que me parece más conveniente es considerar el estudio de las cuestiones matemáticas, como el estudio de una lengua. Es, pues, por un análisis, en cierto modo *gramatical,* que llegaremos á traducir muchos pensamientos. Entonces las dificultades no dependerán sinó de la mayor ó menor analogía que exista entre la frase que queremos traducir y la que, en lenguaje matemático, deberá expresar la misma idea; ó, en otros términos, la dificultad de la cuestión no dependerá ni del largor de la enunciación, ni de la del cálculo, sinó únicamente de la mayor ó menor, facilidad que se experimente para traducirla.»

«En fin: si la cuestión puede traducirse *palabra por palabra,* ella es fácil; en caso contrario, es difícil.»

«116. Hay, en general, en la enunciación de un problema, dos especies de palabras: las unas que expresan las *cantidades;* las otras que expresan las *relaciones* existentes entre esas cantidades.»

"Se sabe que *cantidad* es todo lo que es susceptible de ser más ó menos grande; *relación,* expresa una razón ([1]) de grandor, dada por la cuestión ó resultante de una operación por hacerse.»

Lo primero de que hay que preocuparse (al resolver un problema), es expresar todas las cantidades.»

«117... La traducción de un mismo problema puede dar lugar á una ó más ecuaciones, según sea uno más ó menos hábil para servirse del lenguaje matemático, y es siempre el más hábil el que emplea menos ecuaciones; de suerte que, en general, es preciso estar más ejercitado para resolver una cuestión no empleando sinó una sola incógnita, que para resolver la misma cuestión con muchas; porque el empleo de cierto número de incógnitas, permite, en cierto modo, traducir la enunciación *palabra por palabra,* mientras que si se quiere emplear no más que una sola incógnita, se necesita cierto hábito para descubrir cuál de las cantidades propuestas debe ser empleada preferentemente en calidad de incógnita; y como esta cantidad se encuentra, algunas veces, al fin de la enunciación, se ve uno obligado á invertir completamente el orden de las palabras, para como poner frases que puedan ser traducidas por signos matemáticos.»

«Sin embargo, como el empleo de una sola incógnita no exige sino una ecuación, y que, por consiguiente, el cálculo es mucho más corto, se debe hacer siempre un esfuerzo para resol ver la cuestión de esta manera, y no recurrir al empleo de nuevas incógnitas, sinó cuando no se puede lograr un buen éxito con una sola ».

P. A las indicaciones de Mr. Adhémar, añadiré, por mi parte, las dos siguientes:

----

(1) Conviene recordar que la, palabra *razón,* en lenguaje matemático, significa *cociente* ó las veces que una cantidad contiene á otra.

1ª. En las cuestiones difíciles, la dificultad viene, principalmente, de la falta de un *término de comparación* respecto á la incógnita. Para vencer tal dificultad, hay que desentenderse de ella, por lo pronto, y buscar entre las otras cantidades una *razón* que sea análoga á la que se necesita;

2ª. Sucede, empero, que al hacerse esa averiguación, se encuentra con una nueva incógnita, que no aparecía en un principio. Entonces, preciso es contraer toda la atención á hacer una combinación conveniente entre las cantidades conocidas, de modo que esa combinación contenga una *razón* igual á la que debe existir entre la incógnita y su término de comparación.

Voy á hacer palpables todas las indicaciones que preceden, aplicándolas á las seis Cuestiones contenidas en la última Lección.

Empezando por la 1ª. (art. 715), hay que notar que las cantidades han sido seis, á saber:

1 obrero, 1 otro obrero, 1 cierto trabajo, 8 días, 12 días y *cuántos* días, siendo de notar que sólo la última se presentó francamente con el carácter de incógnita, dándosele el nombre de x.

Se nota, además, que el valor de x no podía obtenerse de un modo directo, por carecerse de un término de comparación que le fuera análogo. En efecto, aunque en la enunciación del problema hay 8 días y 12 días, estas cantidades de tiempo se refieren al esfuerzo de cada obrero aisladamente, mientras que el tiempo x alude al esfuerzo de ambos obreros reunidos. Como el valor de ese esfuerzo común no se halláse expresado en la enunciación, fué preciso buscarlo y determinarlo numéricamente. Él existía, ciertamente, en el fondo del problema, pero encubiertamente.

Para descubrirlo, fué preciso practicar las operaciones previas á que alude Mr. Adhémar en su arto 112, es decir, reducir á números el esfuerzo simultáneo de los dos obreros en 1 día, 10 que dió lugar á la ecuación $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$;

Esa ecuación dió por resultado el importante descubrimiento de que los dos obreros *juntos* podían hacer $\frac{5}{24}$ partes de la obra, en 1 día. Y bien; siendo este 1 *día* de la misma naturaleza que x, se le tomó como término de comparación de x, que como queda dicho, expresa una *cantidad de tiempo* referente al esfuerzo de ambos obreros reunidos; y de ahí, la proporción y consiguiente ecuación definitiva:

$\frac{5}{24}$ *(de trabajo)* : 1 *(el trabajo entero)* : : 1 *(d{a*) : x (*días).*

$$x = 1 \text{ X } 1 : \frac{5}{24} = 1 \text{ X } \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5} \text{ .}$$

Analizando las Soluciones de las Cuestiones 2ª., 3ª., 4ª. y 5ª. (arts. 716 á 719, inc.), se ve que ellas están en perfecto acuerdo con las indicaciones que se han hecho.

CUESTIONARIO

¿A qué reglas se deberá atenerse para plantear una cuestión matemática?(725)

SEGUNDA CONFERENCIA, SOBRE LA 49ª. LECCIÓN

P.- Por lo que hace á la 6ª. Cuestión, que dejamos pendiente en la anterior Conferencia, voy á resolverla empleando el procedimiento que se estableció en el artículo 584.

Espacios recorridos………………. 3m,50 : x
Vueltas de la rueda grande……… 1 : m
Vueltas excedentes de la pequeña $\frac{5}{9}$: 2400

$\frac{5}{9}$: 2400 :: 1 : m
1 : m :: 3,50 : x

Multiplicando las dos proporciones, término por término,

$$\frac{5}{9} : 2400\, m :: 3{,}50 : m\, x.$$

726. Dijimos antes de ahora (art. 581) que, cuando un término figura como antecedente en una de las proporciones que han de multiplicarse, y, como consiguiente, en la otra proporción, ese término viene á anularse. *Otro tanto sucede cuando un mismo término figura como* EXTREMO *en una de las proporciones, y como* MEDIO *en la otra proporción,* según va á demostrarse.

Formando por una parte el producto de los extremos y por otra el de los medios, en la precedente proporción multiplicada, resulta:

$$\frac{5}{9}\, m\, x = 2400\ \mathrm{m} \times \frac{350}{100}$$

$$x = \frac{2400\, m \times 350 \times 9}{100 \times 5m}$$

Ahora, como el factor m figura como numerador y, á la vez, como denominador en la expresión fraccionaria, debe suprimirse ese factor *(art.* 581*)* y, por consiguiente, transformarse la ecuación en esta otra:

$$X = \frac{2400 \times 350 \times 9}{100 \times 5}$$

Quedando así demostrado el nuevo principio, reduzcamos el valor de x á su expresión más simple:

$$x = 24 \times 70 \times 9 = 15120\mathrm{m}.$$

Exponed ahora vuestras dudas.

J.- ¿Por qué razón se cambian los signos, en ambos miembros de la ecuación, cuando la incógnita se halla afectada del signo *menos,* como se previene en el artículo 712, Prevención 6ª.?

727. P.- En la Aritmética, el signo — tiene un solo significado, que se reduce á indicar que se sustraiga una cantidad menor de otra mayor, por ejemplo, 25f de 60f. No sucede lo mismo en el Algebra, en que el signo — tiene dos significados: el uno parecido al de la aritmética, esto es, de *disminución,* y el otro que importa una advertencia, esto es, que la cantidad afectada del signo — se halla ú obra en sentido opuesto al en que se la busca. Un ejemplo hará esto palpable.

Cuando el mercurio del termómetro, por ejemplo, está á 4 grados arriba del *cero,* se dice, en lenguaje común, que la temperatura se halla á cuatro grados sobre cero; lo que puede expresarse algebraicamente escribiéndose + 4, *ó* simplemente 4. (sobreentendiéndose el signo +). Cuando el termómetro está á 4 grados debajo del cero, se dice, en lenguaje común, que la temperatura se halla *á cuatro grados bajo cero,* lo que puede expresarse en lenguaje algebraico, escribiéndose — 4. Es de advertir que, tomándose por punto de partida el *cero,* los grados que están á la parte superior se llaman *positivos,* y los que están debajo *negativos, ó*, en otros términos, que se hallan colocados, los unos respecto á los otros, en sentido opuesto.

Como quiera que sea, para que uno pueda apreciar cualquiera cantidad afectada del signo *menos,* es preciso que conozca la correspondiente cantidad *positiva;* pues no podría uno concebir la expresión — 4 *grados,* sin tener la conciencia de la dimensión de 4 *grados positivos.*

728. El valor negativo no puede existir por sí solo, pues no es otra cosa que la reproducción del valor positivo en sentido contrario, el reflejo, por decirlo así, del positivo. Sucede en esto algo de parecido á lo que ocurre en la fotografía. Esta máquina da lo que los artistas llaman *el negativo,* en que las facciones de la cara salen cambiadas, esto es, las de la derecha á la izquierda y viceversa; tal que, para obtener la verdadera imagen, se hace necesaria otra operación, que consiste en hacer que la máquina reproduzca *el negativo,* con lo que las facciones vienen á quedar en su orden natural. Así, volviendo á la cuestión, cuando la incógnita se halla afectada del signo —, hay que cambiar todos los signos, á fin de que la incógnita sea apreciada en su valor real, bien que este valor haya de computarse en sentido contrario, como lo está indicando el signo — el segundo miembro de la ecuación final del artículo 713.

R.- A mí me queda todavía una duda, y es: que, si bien se ha explicado (como acaba de hacerse) que se cambian todos los signos á fin de que la incógnita lleve el signo +, no se ha demostrado que pueda hacerse eso sin alterar la ecuación. Hemos visto ya que, cuando se aumenta ó disminuye una misma cantidad en ambos miembros de la ecuación, no se altera ésta, porque cada uno de sus miembros crece ó decrece en la misma proporción qué el otro : eso se comprende fácilmente; pero lo que no comprendo es que, después de cambiarse todos los signos (como en el ejemplo del artículo 713), se obtenga como resultado final $x = \frac{-82}{49}$, esto es, á la izquierda un valor *positivo* como es el de *x,* y al otro lado un valor *negativo* como es $\frac{82}{49}$; luego, se ha alterado la ecuación, ó, mejor dicho, no hay ecuación.

P.- Vamos por partes.

729. Que *el cambio de todos los signos, hecho á la vez, no altera la ecuación.* Para mejor entendernos, demos el nombre de *[a]* á la ecuación, y tendremos:

$$[a]\ 15 + 20 - x = 12 + 18 - 5$$

Si debajo de esta ecuación escribiésemos otra ecuación suprimiendo el término 15 en el primer miembro y pasándolo al segundo miembro con el signo *menos,* y suprimiendo al mismo tiempo el término 12 en el segundo miembro y pasándolo al primero con el signo *menos,* no se alteraría la ecuación *(art.* 712, *Prevención* 2ª.)

Haciendo lo mismo, sucesivamente, con cada uno de los demás términos de ambos miembros, la ecuación [*a*] se trasformaría en esta otra —

(Ecuación [*b*]*)* $-12 - 18 + 5 = -15 - 20 + x$

Pero, ¿qué otra cosa es esta última ecuación sinó la misma ecuación [*a*], con la diferencia de haberse cambiado todos los signos y de haber ocupado el primer miembro el lugar del segundo y viceversa? Luego, puede cambiarse, á la vez, todos los signos de una ecuación, sin que ella sufra alteración alguna.

En este estado, dejando la incógnita sola en el segundo miembro, y haciendo pasar al primero los términos -15 y -20, resultaría:

$$15 + 20 - 12 - 18 + 5 = x$$

Reduciendo, $40 - 30 = x$

$$[c]\quad 10 = x$$

Ahora, á fin de que la incógnita quedáse en el primer miembro, como es de costumbre, se escribiría (art. 712, *Prevención* 1ª.):

$$x = 10$$

Haré notar de paso que, con el cambio de los signos, se ahorran dos operaciones, á saber: la ecuación [*b*] y el cambio de miembros de la ecuación [*c*]; pues la ecuación [*a*] se transforma directamente en esta otra:

$$- 15 -20 + x = - 12 - 18 + 5,$$

obteniéndose así la ventaja de hallarse la incógnita signo + y de quedar de suyo en el primer miembro.

[*Nota.* Si se quisiese verificar el valor de *x,* no habría más que reemplazarla en la ecuación primitiva [*a*] con el valer encontrado (10), que así se tendría:

$$15 + 20 -10 = 12 + 18 - 5$$

Reduciendo, $25 = 25.$)

Paso ahora á contestar la última parte de la objeción de R., esto es, que *la expresión* $x = -\frac{82}{49}$ *no es una verdadera ecuación, por cuanto que el primer miembro contiene un valor positivo* y *el segundo un valor negativo.*

A primera vista, parece muy fundada la objeción; mas, si bien se la examina, ella cae por su propio peso.

En efecto, el primer miembro de la ecuación final representa cierta cantidad, cuyo número de unidades es igual al número de unidades que expresa el segundo miembro ó, mejor dicho, es una misma cantidad representada bajo dos aspectos: la circunstancia de estar afectada del signo + en el primer miembro y del signo — en el segundo, no puede aumentar ni disminuir su valor absoluto (puesto que es la misma cantidad en uno y otro puesto). Síguese de ahí que entre ambos miembros hay perfecta ecuación.

Un ejemplo hará más palpable la verdad.

Si Pedro presta á Juan 100 ps., por ejemplo, Juan sentará en su libro de cuentas 100 ps, al *Haber* de Pedro, y éste sentará en el suyo 100 ps, al *Debe* de Juan [lo que podría escribirse algebraicamente, de este modo: 100 ps, *(a* Pedro) = -100 ps. *(por* Juan)], siendo de notar que, en uno y otro libro la cantidad es la misma.

Acontece aquí una cosa algo parecida á lo que pasa en la multiplicación de un número entero por una fracción, tal como $6 \times \frac{1}{3}$; lo cual, bajo la apariencia de multiplicación, importa una división de 6 por 3. Quiero decir que *x,* bajo la apariencia de un valor positivo, entraña un valor negativo.

A mayor abundamiento, fijemos la vista en la *verificación* hecha en el art. 714, en la que, habiendo *x* quitándose la máscara del incógnito, por decirlo así, ambos miembros de la ecuación aparecen con un mismo signo, esto es:

$$-8414 = -8114$$

730. Para terminar lo relativo al signo *menos,* debo haceros una importante prevención, y es: que cuando dicho signo afecta á una cantidad enterrada en un paréntesis, y hay dentro de éste alguno ó algunos términos con signos *menos,* sucede que, al hacerse desaparecer el paréntesis, toma ese término el signo + (cosa que á los principiantes en matemáticas parece rara).

Sea, por ejemplo:

$$r= 25000 -1000 - \frac{1}{6}\ 6\ (x - 1000)$$

$$r =25000 -1000 - \frac{x}{6} + \frac{1000}{6}$$

Ya aclaramos esto en otra basta con lo dicho (*).

CUESTIONARIO

¿Qué sucede cuando un término figura á la vez como antecedente y como consiguiente, ó como extremo y como medio, en dos proporciones que han de multiplicarse?(726).- ¿Qué significa en la Aritmética y en el Algebra el signo *menos?* (727).- ¿Cómo se explica el valor negativo? (728).- ¿Cómo as! el cambio de signos, en los dos miembros de una ecuación, no altera el resultado?(729).

QUINCUAGÉSIMA LECCIÓN

731. 7ª. *Cuestión. Se tiene vino de á* 3 *francos la botella, y otro vino de á 1f.50 la botella. ¿Cuántos de cada especie será menester tomar para tener* 12 *botellas de á* 2 *francos la botella?*

Solución:

Procediendo con arreglo al 3er. ejemplo de la *Regla de mezclas* (art. 695), se encuentra que es necesario poner una botella de vino de 1ª. clase y 2 botellas de 2ª. clase, ó, en otros términos, $\frac{1}{3}$ de 1ª. clase y $\frac{2}{3}$ de 2ª. clase. De ahí:

$\frac{1}{3}$ de 12 = 4 botellas de 1ª. clase

$\frac{2}{3}$ de 12 = 8 » de 2.ª clase

732. 8ª. *Cuestión. Se quiere pagar* 151 *francos con* 47 *piezas, las unas de á* 5 *francos y las otras de á* 2 *francos. ¿Cuántas piezas se necesitan de cada especie?*

Solución:

Como esta cuestión se asemeja á las que hemos clasificado bajo el nombre de *Regla de mezclas,* la resolveremos de un modo parecido.

Si tomamos, 47 piezas de á 2 francos, tendremos 47 X 2 = 94f. Comparado este producto con el valor propuesto, ocasionaría una *diferencia* de 57 f; por consiguiente, no puede ser.

Si reemplazamos una pieza de 2f con otra de á 5f, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{46 piezas de á 2f =92f} \\ \text{1 » de á 5f =}\end{array}\right\} \text{ suma =97f,}$$

que tampoco satisface; porque, comparado este producto con el valor propuesto, presenta la diferencia de 97 á 151 = 54f; pero, fijando la atención en la anterior diferencia (que era 57) y la actual, se nota que esta última ha disminuido en 3f. Por otra parte, salta á la vista: que la primitiva diferencia, 57, contiene á la disminución que acaba de obtenerse (57:3) 19 *veces,* Siguese de ahí que en 19 sustituciones, semejantes á la que acaba de hacerse, habrá desaparecido la diferencia y se habrán retirado 19 piezas de á 2f, quedando sólo 47 -19 = 28 piezas, cuyo valor, agregado al de las 19 *piezas* de á 5 francos que han resultado, formará una suma de 151f.

En efecto:

(*) Queda a cargo del preceptor explicar esto oportunamente, con arreglo á DILUCIDACIÓN del Apéndice, referente al 19ª. de los PROBLEMAS DIVERSOS, página. 93.

19 *piezas* de á 5f = 19 X 5 = 95f
28 » » 2f = 28X 2 = 56
47 piezas… Sumas ……… 151 francos

Nota. A mayor abundamiento, conviene fijar la atención en que, siendo la diferencia de *una* pieza mayor á *una* menor 5f - 2f = 3f, se puede formar la siguiente *Regla de tres:* «Si la diferencia 3 corresponde á 1 pieza mayor la diferencia 57 ¿á cuántas piezas mayores corresponderá?»

$3 : 57 :: 1 : x = \frac{57}{8}$ = 19 *piezas mayores* (*)

733. 9ª. *Un hombre, al morir, deja su esposa, dos hijos y tres hijas, y quiere que sus bienes se distribuyan de la manera siguiente: á su esposa la séptima parte; á cada uno de sus hijos, la sexta parte de lo que debe quedar; á cada una de sus hijas, la cuarta parte del resto; y por fin, á un hospital los 10 000 francos que deben sobrar. ¿Cuál es el monto del mandato, y qué cantidad corresponde d cada heredero?*

Solución:

Traduciendo al pie de la letra el mandato, en lenguaje matemático, y representando por x el valor total de la herencia, se tendrá, sucesivamente:

	Restos	Haber
Haber de la viuda $\frac{1}{7}\ x$ =…………………………….		$\frac{1}{7}\ x$
1er. Resto x $\frac{1}{7}\ x$ =…………………………….	$\frac{6}{7}$	
Haber de los 2 hijos $\frac{2}{6}$ del 1er. resto = $\frac{2}{6} \times \frac{6}{7} = \frac{12}{42}$ =		$\frac{2}{7}\ x$
2º. resto ($\frac{6}{7} - \frac{6}{7}$) x = ……………………. .		
Haber de las 3 hijas del resto precedente		
= $\frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{28}$ = ………………………..		x
	Suma =	$\frac{6}{7}\ x$

Según se ve, para completar el valor de x, falta x; de ahí se sigue que los 10.003 f que debían sobrar, aplicables al Hospital, representan $\frac{1}{7}$ de la herencia; luego, la herencia total es 10.000 X 7 = 70.000f .

Verificación

Haber de la viuda……… $\frac{1}{7}\ x = \frac{1}{7}$ X 70.000 = 10.000

íd. de los 2 hijos……. $\frac{2}{7}\ x = \frac{2}{7}$ X 70.000 = 20.000

íd. de las 3 hijas…….. $\frac{3}{7}\ x = \frac{3}{7}$ X 70.000 = 30.000

íd. del Hospital……… $\frac{1}{7}\ x = \frac{1}{7}$ X 70.000 = 10.000

$\frac{7}{7}$ ….. Sumas……70.000 francos

(*) *Observaciones:*

1ª. Podría haberse tomado, al principio del cálculo, las piezas de 5 francos como término de comparación; pero entonces el producto seria mucho mayor que la cantidad dada; en efecto, 47 X 5 = 235 (siendo así que dicha cantidad esta fijada en 151f.). Más este inconveniente se remediarla sustrayendo de 235 los 151f, dados, y dividiendo por 3 la diferencia:

235 -151 = 84
84 : 3 = 28

2ª. En el presente caso el cálculo da, no el número de piezas que debe haber de 5 francos, como en la operación anterior, sino el número de piezas de 2 francos, según se ve.

Ahora, salta á la vista que, siendo 20.000f los correspondientes á los hijos y 30.000f los correspondientes á las hijas, cada uno de los herederos recibirá 10.000 *francos.*

734. *10ª. Cuestión. Una persona tiene dos pleitos, que le han costado ya 18.000f; siendo de advertir que el* 2ª. *pleito le ha costado 360f más que el 1°. ¿Cuánto le ha costado cada uno de ellos?*

Solución: (¹)

Puesto que el 2°. pleito ha costado 360 f más que el 1º. quiere decir que, deducida esta diferencia del total del gasto hecho, lo restante debe ser repartido por igual entre ambos pleitos. Ahora bien, 1800 -360 son 1440, cuya mitad es 720 luego,

el 1er. pleito ha costado $\frac{1}{2}$ de 1440 = *720f*

y el 2º. » » » $\frac{1}{2}$ de 1440 + 360 = 1080f
Suma = 1800f

735. 11º. *Dos hermanos han heredado 28000 f entre los dos. El* 1º. *ha disipado los* $\frac{2}{3}$ *de su herencia, el* 2º. *los* $\frac{3}{4}$ *de la suya, y le queda al* 1°. *un resto igual al del* 2°. *¿Cuál era el haber de cada uno?*

Solución: (²)

Habiendo recibido el 1.° $\frac{2}{3}$ de su haber, sólo le queda $\frac{1}{3}$. Por lo que toca al 2°. como ya ha recibido $\frac{3}{4}$ de su haber, no le queda sino $\frac{1}{4}$.

Por otra parte, el $\frac{1}{3}$ que le queda al 1°. es igual al $\frac{1}{4}$ que le queda al 2º. Eso sentado, busquemos dos números tales, que $\frac{1}{3}$ del uno sea igual á $\frac{1}{4}$ del otro, por ejemplo, 9 y 12. En efecto:

$\frac{1}{3}$ de 9 = 3

$\frac{1}{4}$ de 12 = 3

Ahora, puede transformarse la Cuestión en esta otra: *Dividir 28000f proporcionalmente á los números* 9 y 12.

Procediendo con arreglo al art. 670, se tiene: —

Herencia del 1º. = 12000
Id, del 2º. = 16000

Verificación:

Disipados por el 1º. ⅔ de 12000 = 8000f. Le queda ⅓ de 12000 = 4000f,

» » » *2º.* ¾ de 16000 =12000f. Le queda ¼ de 16000 = 4000f.
20000f…….Sumas……………. 8000f
Total 20000 + 8000 = 28000f.

736. 12ª. *Cuestión. Determinar el instante en que el minutero de un reloj ha de pasar por encima del horario, á cada hora, suponiendo que ambos punteros están señalando las XII.*

Solución

La presente cuestión es muy semejante ó, por mejor decir, la misma que la 5ª. Cuestión (art. 719) que ya hemos resuelto, con estas diferencias:

(¹) Distinta de la original.
(²) Distinta de la original.

1ª. Que en la 5ª. Cuestión, la *distancia es* una línea extendida, como toda vía de comunicación, mientras que, en el presente problema, *la distancia* es una línea perfectamente circular;

2ª. Que en aquélla las cantidades que entran en el problema se expresan distintamente, al paso que, en esta cuestión, las cantidades se confunden unas con otras. Así, la distancia, en la 5ª. Cuestión (art. 719), se mide por metros, varas ó cualquiera otra medida de extensión que nada tiene: de parecido *al tiempo,* mientras que aquí, la distancia y el tiempo se computan por una misma clase de medida, que es la circunferencia de la esfera del reloj, cuyas divisiones y subdivisiones sirven á la vez para medir la distancia y el tiempo, lo cual viene á producir una gran confusión.

Para fijar las ideas, tracemos una parte de la esfera del reloj.

Habiendo dado una vuelta entera el minutero, el horario ha caminado nada más que el espacio comprendido entre la XII y la I, *ó* sea la duodécima parte del espacio recorrido por el minutero; de modo que, en este instante, el horario lleva la ventaja de estar adelantado, respecto al minutero, lo que va de las XII á la I; mas, como es tan rápido el movimiento del minutero, ha de alcanzar al horario antes de que éste haya avanzado el espacio de 1 minuto. ¿Cuál será, pues, el punto de la reunión? Vamos á precisarlo.

Como el minutero camina 12 minutos por cada minuto que anda el horario, es indudable que le dará alcance en el espacio comprendido entre los 5 á 6 minutos, punto que, aunque nos es aún desconocido, podemos llamarlo *r.*

Si en el estado en que actualmente suponemos á los dos punteros (señalando la I en punto), designamos por D la distancia *o r* (que es la que tiene de recorrer el minutero) y por *x* la pequeñísima distancia que tiene de caminar el horario, esto es, del punto I al punto *r;* y si, además, tenemos en cuenta que el movimiento del minutero es, respecto al del horario, como 60 es á 5, podemos establecer la siguiente proporción:

$$60 : 5 :: D : x = \frac{5D}{60} \qquad D = 5^m + X^m$$

Reemplazando D por su valor, tenemos:

$$x = \frac{5(5+x}{60}$$

Resolviendo ahora esta ecuación, viene sucesivamente:

$$60x = 5(5+x)$$
$$60x = 25 + 5x$$
$$60x - 5x = 25$$
$$55x = 25$$
$$x = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}.$$

Es decir, que el horario habrá andado $\frac{5}{11}$ de minuto, mientras que el minutero habrá recorrido 5 y $\frac{5}{11}$ de minuto, ó en otros términos, que el primer encuentro se efectuará á la I, 5 minutos y $\frac{5}{11}$ de minuto.

Fácilmente se comprende que el segundo encuentro tendrá lugar cuando haya transcurrido una hora, cinco minutos y cinco undécimos de minuto después del primer encuentro, esto es, á las IIh, 10 y $\frac{10}{11}$ de minuto; y así en las siguientes horas.

CONFERENCIA SOBRE LA 50ª. LECCIÓN

P.- Quiero abrir la presente Conferencia volviendo la vista á la 9ª. Cuestión (art. 732), para resolverla, por vía de ejercicio, con arreglo á las *Ecuaciones literales* (art. 720 á 722 inc.).

737. Representemos por x la incógnita, esto es, el valor total de la herencia, llamemos a la parte de la viuda, b la de los dos hijos, c la de las tres hijas, y con estos valores, más los 10000 destinados para el hospital, formemos una ecuación, á saber:

$$x = ax + bx + cx + 10000$$
$$x - ax - bx - cx = 10000$$
$$x - (a + b + c)x = 10000$$

Reemplazando $(a + b + c)$ por sus respectivos valores numéricos, se tiene:

$$x - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right)x = 10000$$

$$x - \frac{6}{7}x = 10000$$

$$\left(1 - \frac{6}{7}\right)x = 10000$$

$$\frac{1}{7}x = 10000$$

$$x = 10000 : \frac{1}{7} = 70000.$$

[.*Advertencia al preceptor.*- En seguida del precedente ejercicio, los alumnos deberán resolver por sí las Cuestiones explicadas en la 50ª. Lección; y esta advertencia servirá de regla general para todas las Conferencias, como se insinuó ya en otra parte].

QUINCUAGÉSIMA-PRIMERA LECCIÓN

738, 13ª. *Entre oficiales y tropa han llegado á una posada 109 individuos; los oficiales han gastado* 3 *pesetas y los soldados á una peseta por cabeza; el total del gasto importa* 117 *pesetas. ¿Cuántos han sido los oficiales y cuántos los soldados?*

Solución

El presente problema es idéntico al de la 8ª. Cuestión (art. 731), con la sola variedad de que, aquí, los oficiales hacen las veces de *piezas de á* 5 *francos* y los soldados de *piezas de á* 2 *francos,* y de que, allí, la diferencia entre una pieza mayor y otra menor fué 3, y que, aquí, la diferencia entre el gasto de un oficial y el de un soldado es 2; de suerte es que, razonando y operando del mismo modo que en dicha Cuestión, se tiene sucesivamente:

109 X 1 = 109
117 - 109 = 8
8 : 2 = 4 (que expresa el número de oficiales).

La *Verificación* se hará lo mismo que en la 8ª. *Cuestión* (art. 731).

739. 14ª. *Una persona ha colocado 60000 f, una parte de ellos al 4,50* % *y la otra parte al 3,50* %, *lo que le da una renta anual de 2500 f. Se pregunta ¿Cuál es la cantidad colocada al 4,50, y cuál la colocada al 3,50?*

Solución

Este problema es también por el estilo del de la 8ª. *Cuestión* (art. 731), con estas diferencias: que la *renta* hace aquí las veces de la suma dada en dicha Cuestión; que las *centenas* funcionan aquí, como allí las 47 *piezas;* que, por lo tanto, la comparación requerida debe hacerse, no con las centenas (ni mucho menos con el capital 60000), sino con la renta producida por este capital.

Eso entendido, hay que suponer, por lo pronto, que las 600 centenas han sido colocadas en su totalidad al 3,50 %. lo que da un producto de 2100 f; mas, comparado este producto con los intereses dados, que suben á 2500 f, resulta una diferencia de 400 f. Ahora bien, fijándose uno en la diferencia de los *dos tipos,* que hacen aquí las veces de una pieza *mayor* y otra *menor,* se tiene 4,50 -3,50 = 1. Por consiguiente, dividiendo por 1 esa diferencia, se obtiene 400; luego (según la regla establecida en la *Nota* de la 8ª. *Cuestión,* art. 731), éste es el número de centenas que han sido colocadas al 4,50 %, y consiguientemente, el resto de centenas, es decir, 200as, ha sido colocado al 3,50 %, quedando así resuelto el problema, como es fácil de verificarlo.

R.- Y *¿cómo* así la diferencia 400 francos se ha convertido en 400 *centenas?*

P.- Es preciso fijarse en una cosa. Cada centena de francos del capital produce *una vez* el tipo de interés, y, viceversa, cada tipo de interés representa *una centena* de capital; por consiguiente, 400 veces el tipo representan 400 centenas de capital, que convertidas en unidades simples, valen 400 X 100 = 40000 f, que es la cantidad colocada al tipo de 4,50 %.

740. 15ª. Dos individuos se propusieron socorrer á un grupo de prisioneros, dando una peseta á cada uno de éstos; mas, no teniendo ninguno de los dos suficiente dinero en el bolsillo para el efecto, hizo el uno la siguiente propuesta al otro: *«Si usted pone el doble de lo que tengo, podré socorrer á* 12 *prisioneros, y, si dobla usted todavía lo que me quede, podré socorrer á otros tantos, y así sucesivamente, hasta quedar sin nada.»* Sobre este convenio, se procedió á la primera repartición, y sucede que, á la segunda, ha quedado exhausto el bolsillo del proponente. ¿Cuánto tuvo éste, cuánto puso el otro, y cuántas pesetas se distribuyeron?

Solución

Tomando nosotros como punto de partida el resultado final, razonaremos de este modo: Las 12 pesetas últimamente distribuidas eran el doble del resto que le quedó al proponente después de la primera distribución. Es decir, que en este acto se quedó con 6 pesetas. Para haber quedado con 6 pesetas, habiendo dado 12, era menester que, á tiempo de la primera distribución, contase con 18 pesetas. Ahora bien: esas 18 pesetas provenían del hecho de habérsele doblado el valor de lo que tenía en el bolsillo; luego, el proponente sólo tenía al principio una $\frac{1}{2}$ de 18 = 9 *pesetas*

El otro puso para la 1ª. repartición,	9		
» » » » 2ª. »	6	=	15
Suma		=	24 *pesetas*

741. 16ª. *Un testador ha dejado 12000* $ *de legado á dos parientes suyos, F y M. La mitad de la parte de F, más la cuarta parte de la de M, hacen 4250* $. *¿Cuál es la parte de cada uno?*

Solución:

Podría resolverse este problema de un modo análogo al que se empleó en la 8ª. *Cuestión* (art. 731); mas, como en el presente caso las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ harían algo complicado el cálculo, daremos la siguiente solución:

4230 X 2 = 8500
11000 - 9500 = 3500
M tiene 3500 X 2 = 7000
F » 12000 - 7000 = 5000

Explicación:

Multiplicando 4250 por 2, se ha obtenido 8500, que representa dos veces $\frac{1}{2}$ de F, (es decir, su parte completa), y dos veces $\frac{1}{4}$ de M, ó sea la $\frac{1}{2}$; de suerte que la diferencia de 8500 á 12000, igual á 3500, viene á ser justamente los $\frac{2}{4}$ que faltaban á M.

Por fin, sustrayendo 3500 X 2.= 7000 del total 12000, se ha obtenido 5000, que es la parte completa de F.

La *Verificación* es muy fácil.

742. 17ª. Un General en jefe, proponiéndose conocer la fuerza enemiga, ordena á su *Jefe* de estado mayor que envíe un agente de confianza é inteligente para adquirir noticias sobre el particular. Vuelto éste de su comisión, dice al Jefe de estado mayor que le ha sido imposible penetrar en el campamento enemigo; pero que personas fidedignas, residentes en los alrededores, le han hecho la siguiente relación: «Son 3 Divisiones las que ocupan el
«campo; de cada una de ellas se desprendió un destaca-
« mento para explorar la campaña, etc. De la 1ª. División
« salió $\frac{1}{4}$ parte de su fuerza; de la 2ª., $\frac{1}{5}$ parte de ella; y de
« la 3ª. $\frac{1}{6}$ parte. Ayer mañana se reunieron, en el punto A,
« el 1°. y 2°. destacamentos, formando la suma de 1000
« hombres. A medio día, se reunió en el punto B el 1er.
« destacamento con el 3°., y ambos tenían 1060 hombres.
« Por la tarde, se encontraron, *en* el punto C, el 2°. y 3er.
« destacamentos, que sólo alcanzaron al número de 860
« hombres » …

Con tales datos, el jefe de estado mayor, á fin de dar al General en jefe un informe circunstanciado sobre el número de hombres de cada destacamento y de la fuerza total del enemigo, forma la siguiente

Solución:

El1er. destacamento, reunido con el 2°. tiene…	1000
El 1°. reunido con el 3.° cuenta…………………	1060
El 2º. » con el 3º. » ………………......	860
Suma...	2920

Mas, como en esa suma figura dos veces cada destacamento, tomando la mitad de esa suma, tendré el verdadero valor de los 3 destacamentos, esto es, $\frac{2920}{2}$ = *Fuerza total de los* 3 *destacamentos juntos, 1460 hombres.*

Ahora, deduciendo de este valor los hombres del 2º. y 3er. destacamentos, que son 860 (como consta de la relación arriba expresada), cae de su peso la fuerza del 1er. destacamento, á saber: 1460 - 860 = 600 h.s *(1º. destacamento)*

Deduciendo de 1460, los hombres reunidos del 1.° y 2.° destacamentos, esto es, 1460 -1060 =………………………….	400 h.s (2º. *destacamento)*
Por último, deduciendo de 1460 los del 1°. y 2º. destacamentos, tengo la fuerza del 3º. á saber: 1460 -1000 =..	460 *h.s* (3er destacamento)
	1460 *hombres*

Considerando ahora, que el 1er. destacamento fue $\frac{1}{4}$ parte de su respectiva División; el 2º. $\frac{1}{5}$ parte de la 2ª. División, y el 3º. $\frac{1}{6}$ parte de la suya, resulta en limpio que:

La 1ª. División consta de	4 *veces*	600 hombres		= 2400
La 2ª. »	»	5 »	400	»	= 2000
La 3ª. »	»	6 »	460	»	= 2760

Total de la fuerza enemiga = 7160 *hombres*

Verificación:

Al efecto, bastará deshacer el Total y proceder á la inversa de lo que se hizo, hasta obtener las fuerzas de los destacamentos las que, combinadas dos á dos, deben ser las mismas que las dadas por el problema.

743. 18ª. *Un padre deja al mayor de sus hijos* 1000 f + $\frac{1}{6}$ *del resto de sus bienes; al* 2º. 2000 f + $\frac{1}{6}$ *del nuevo resto; al* 3°. 3000 f + $\frac{1}{6}$ *de lo que haya dejado el anterior, y así sucesivamente. Nada queda, y los bienes del padre han sido igualmente distribuidos entre sus hijos. Se pregunta: ¿cuál debe haber sido el número de los hijos, cuál la parte de cada uno y cuál el monto de los bienes del padre?*

Solución

Antes de abordar la cuestión, supongamos que, ascendiendo á 16000 f el total de los bienes hereditarios, se han repartido éstos por igual entre 4 hijos. En tal caso, es claro que la parte de cada uno es 4000 f. Más, según la hipótesis que acaba de hacerse, estos 4000f deben constar de dos partes: 1ª. la cantidad obligada ó prescripta por el testador, que (para mejor entendernos) llamaremos *asignación;* 2ª. la cantidad que se ha tomado del resto de los 16000f, á la cual daremos el nombre de *complemento,* como que su objeto es completar lo que falta á su asignación para hacer 4000 f cabales.

Hecha en esos términos la repartición, resulta el siguiente cuadro: .

	Asignación		Complemento		HABERES
Debe recibir el 1er. hijo ….	1000	+	3000	=	4000
» » 2º. »……	2000	+	2000	=	4000
» » 3er. »……	3000	+	1000	=	4000
» » 4º. »……	4000	+			4000
				Total =	16000

Se ve por este cuadro: en primer lugar, que los complementos van decreciendo en la misma proporción que han crecido las asignaciones; en segundo lugar, que el complemento del penúltimo hijo es exactamente igual á la asignación del primer hijo; y en tercer lugar, que, habiéndose agotado los complementos al tomar su parte el penúltimo hijo, el *haber* del último consta de su asignación puramente, sin complemento alguno.

Guiados por las observaciones que acaban de hacerse, vamos á afrontar la cuestión arriba propuesta.

Desde luego conviene fijar la atención en que, habiendo empezado las asignaciones por 1000f, el último complemento debe ser también 1000 f, según queda observado. Además, estos 1000 f, como complemento, deben satisfacer á la condición de ser la *sexta parte* del resto proveniente del hecho de haber tomado el penúltimo hijo su asignación respectiva. Y bien, 1000 f ¿de qué número son la sexta parte? Evidentemente ese número es 6000 f; luego el resto dejado por el penúltimo hijo ha de ser necesariamente 5000 f. los mismos que deben de pasar al último hijo en calidad de asignación simplemente, sin sexta parte, porque para él ya no debe haber sexta parte, pues si la hubiese, resultaría todavía un resto, lo que es inadmisible por ser contrario á lo enunciado en la cuestión.

Por otra parte, estando arregladas las asignaciones según el número de cada hijo, esto es, que se han destinado 1000 f al primer hijo. 2000 f al segundo, y así sucesivamente, se sigue: que la asignación 5000f (que contiene 5 veces la del primer hijo) ha de ser forzosamente la del quinto.

Demostrado, como está, que el *haber* del último hijo es 5000 f, se sigue que cada uno de los demás hijos ha de tener igual *haber* y que, por consiguiente, la masa hereditaria ha de ser 5 *veces* 5000 f.

En resumen: De todo lo que acaba de exponerse, se deduce: que son 5 los hijos, 5000f la parte de cada uno, y 25000 f el monto de los bienes del padre.

Comprobación

Bienes del padre = 25000 f

El 1er. hijo recibe 1000 f (sacados de los 25000) + $\frac{1}{6}$

del resto (que vale 24000 f) *ó* sea 1000 + $\frac{24000}{6}$ =

(Quedan 25000 -5000 = 20000.)

Bienes del padre = 25000f.

El 2º. hijo recibe 2000 f, (sacados de los 20000) + $\frac{1}{6}$

del nuevo resto, esto es, 2000 f + $\frac{18000}{6}$ = 2000

+ 3000……………………………………………….. = = 5000 f

(Quedan 20000 -5000 = 15000).

El 3er. hijo recibe 3000 f (sacados de los 15000) + $\frac{1}{6}$

del nuevo resto, esto es, 3000 f + $\frac{12000}{6}$ = 3000

+ 2000………………………………………………. = = 5000 f

(Quedan 15000 -5000 = 10000.)

El 4º. hijo recibe 4000 f (sacados de los 10000) + $\frac{1}{6}$

del nuevo resto, esto es, 4000 f + $\frac{6000}{6}$ = 4000

+ 1000 ……………………………………………. = = 5000 f

(Quedan 10000 -5000 = 5000.)

El 5º. hijo recibe 5000 f (sacados de los 5000) + $\frac{1}{6}$

del nuevo resto, esto es, 5000f + $\frac{0}{0}$ = 5000 +0 = = 5000f

Suma = 25000 f

Para terminar la presente Lección, que será la última de nuestro tratado de Aritmética, debo deciros, hijos míos, que ya es llegada la ocasión de definirla.

744. Generalmente la definen en estos términos: «ARITMÉTICA *es la ciencia de los números*». Si os la hubiese dado en un principio, con ella y todo, os habríais quedado tan á obscuras como un ciego de nacimiento, á quien se le dijera que la Óptica *es la ciencia que se refiere á la visión.* Mas, como vosotros conocéis ya, en todos sus pormenores, el mecanismo de los números, la definición dada, por breve que sea, basta y sobra para, representar en vuestra mente el conjunto de las operaciones que hemos practicado y las diversas combinaciones á que los números se prestan.

En rigor, aquí debería terminar el presente tratado; sin embargo, daré todavía una última mano al asunto en la próxima *Conferencia extraordinaria.* <47>, página. 49, Apéndice.

CUESTIONARIO

¿Qué es Aritmética? (744) :.

CONFERENCIA EXTRAORDINARIA

P.- La presente Conferencia, hijos míos, recaerá sobre dos puntos principales, que paso á exponer.

En primer lugar, debo manifestaros que he suprimido en este tratado varias cuestiones que algunos autores han comprendido en la Aritmética, como son: la *raíz cuadrada* y la *cúbica,* las *progresiones* y los *logaritmos,* conformándome en esto con la opinión del maestro Adhémar, que cree que los principios relativos á esas cuestiones, se demuestran siempre de una manera más completa y satisfactoria con el auxilio del Algebra. Por otra parte, habiendo tenido en mira solamente las cuentas que se llevan en las casas de comercio, en los bancos, en las cajas nacionales, estados mayores y otras oficinas por el estilo, en que rarísima vez ó nunca tienen que hacer las expresadas cuestiones, me ha parecido superfluo incorporarlas en el presente tratado, tanto más cuanto que las personas que piensen dedicarse á la Mecánica, la Física, la Química ó la Astronomía, pueden recurrir á los tratados especiales que existen tocante á estos ramos.

Entre tanto, pienso que los conocimientos aquí suministrados, servirán, en todo caso, de suficiente preparación para acometer el estudio de aquellos ramos. Lo mismo debo decir respecto á las *anualidades,* porque, si bien esa cuestión atañe á los bancos hipotecarios, sería largo y penoso de adaptarla á los principios puramente aritméticos; siendo así, por otra parte, que los interesados en esa clase de establecimientos pueden echar mano de las fórmulas suministradas por el Algebra, sin que para ello sea menester estudiar esta ciencia.

Otra cosa sobre que debo llamar vuestra atención es, que he introducido en este tratado varias cuestiones que antes de ahora eran consideradas como del exclusivo dominio del Algebra, tales como la *Regla de sociedad,* la *Regla de mezclas,* etc., como que el mismo Mr. Adhémar las hubo resuelto en su tratado de Algebra.

M.- Poco ha nos dijiste que habíais tenido á bien suprimir ciertas cuestiones, apoyándote en la opinión de Mr. Adhémar, y ahora nos manifiestas haber introducido en la Aritmética cuestiones que aquel profesor las resolvió algebraicamente. Quisiera, pues, que desvanecierais esta especie de contradicción.

P.- Es que estas últimas cuestiones ocurren frecuentemente en el comercio y la industria, y, por tanto, es necesario que se generalice su conocimiento, mientras que las anteriores, rara vez se emplean en las especulaciones ordinarias.

Aquí he menester hacer una digresión: parece que, desde fines del siglo pasado, los más de los profesores de Aritmética enseñaban la manera de resolver las cuestiones relativas á *sociedad, partición, aligación,* etc., pero que las enseñaban empíricamente, mediante ciertos procedimientos ó métodos que ellos conocían, pero que no sabían explicar, lo cual hacía que la Aritmética fuese un arte sumamente difícil é ingrato. Hoy, felizmente, todas esas cuestiones se resuelven por medio de principios y reglas fundadas en un razonado convencimiento, de modo que sabe uno lo que hace y cómo así los números tienen la virtud de absolver las consultas que se les someten.

Eso que ha pasado con la Aritmética, me trae á la mente lo ocurrido con la Mecánica. Hasta mediados del presente siglo, la Mecánica era una ciencia que sólo estaba al alcance de la aristocracia, por decirlo así, de los matemáticos; un profesor de la Sorbona, Mr. Delaunay, se propuso *democratizarla,* y consiguió satisfactoriamente su objeto, en un libro que publicó ilustrado con láminas. Otro tanto puede decirse de los señores Dumouchel y Dupuis, tocante á la Aritmética, puesto que es debido á ellos principalmente, el importante bien de haber sujetado á reglas simplemente aritméticas, la solución de un gran número de problemas que antes eran del resorte del Algebra ó de procedimientos rutinarios.

R.- Dínos, papá, si ejercitándonos bastante en las Lecciones que nos has dado, podríamos resolver cualquier problema aritmético?

P.- Aquí viene al caso el *distingo* de los escolásticos, tanto más cuanto que hemos invadido hasta cierto punto los dominios del Algebra, estimulados de un lado por los señores DumoucheL y Dupuis y, de otro lado, llevados por la corriente del comercio y de la industria. Luego haré por satisfacer á tu pregunta, á mi .modo de verla; entre tanto, creo conveniente volver á reproducir el dicho de Mr. Adhémar: *«Si la cuestión puede traducirse* (matemáticamente) *palabra por palabra, ella es fácil; en caso contrario, es difícil…* »

R.- ¿Qué se entiende por *traducir una cuestión en lenguaje matemático?*

P.- Supongamos que alguien propone este problema: «*¿Cuál es el número que, multiplicado por* 6 *y dividido por* 2, *da* 9 ?»

He aquí la traducción en lenguaje matemático:

$$x \times 6 : 2 = 9$$

Así traducido el problema, ya está resuelta la cuestión, pues no falta sinó efectuar las operaciones indicadas por los signos matemáticos, para haber de poner en evidencia el valor de la incógnita x, á saber:

$$6x : 2 = 9$$

$$\frac{6x}{2} = 9$$

$$6x = 18$$

$x = \frac{18}{6} = 3$ (*valor de la incógnita*).

Verificación

$$3 \times 6 : 2 = \frac{18}{2} = 9$$

Se ve que; en el ejemplo precedente, la cuestión ha podido traducirse *palabra por palabra* y que, por consiguiente, ella es fácil.

No podría decirse otro tanto, por ejemplo, de la 1ª. *Cuestión* que ya resolvimos en el arto 715. Allí la incógnita estaba enmarañada, carecía de término de comparación y por tal motivo, la traducción del problema, en lenguaje matemático, no podía hacerse palabra por palabra, y fué menester alterar el orden de los conceptos contenidos en la enunciación. Así, en lugar de empezar la traducción por *1 obrero que podía hacer el trabajo en* 8 *días,* hubo que fijarse en la circunstancia de que la incógnita aludía al trabajo de los 2 obreros *juntos.* Por tanto, fué preciso principiar la traducción por el último concepto del problema, y dar otro giro á la frase, como se ve en la proporción allí establecida:

$\frac{5}{24}$ (*de la obra)* : 1 (*la obra entera*) :: 1 *(día)* : x

Síguese de ahí que esta cuestión pertenece á las que Mr. Adhémar califica de difíciles.

A propósito de cuestiones difíciles, las hay que son tales por la naturaleza misma del asunto, y las hay por la manera artificios a con que se las presenta. Aludiendo á estas últimas, decía Mr. Adhémar en sus lecciones orales: «Estos problemas son compuestos expresamente para confundir la mente del que haya de resolverlos; de suerte que la confusión está en la enunciación misma del problema».

Agrego, por mi parte: que entre los problemas de este último género, unos hay que pudieran servir de agradable pasatiempo, y otros que son tan sólo quebraderos de cabeza, acertijos que á nada conducen…..

A propósito: Un estudiante de derecho se propuso chasquear á un abogado bonachón y sencillo, y fué á hacerle la siguiente consulta:

—«Señor *(le dijo),* se me ha notificado para prestar una declaración judicial; mas necesito saber antes, á fin de que no se me siga perjuicio, ¿qué viene á ser de mí la suegra de la mujer de mi hermano?».

—«¡Hombre! *(contestó el abogado),* la cuestión es compleja, y tengo que compulsar los tratadistas sobre la materia. Vuélvase usted mañana».

Se despidió el estudiante, y fué á soltar la risa entre sus colegas, que lo aguardaban.

Aplicando ahora el cuento á los problemas…..

R.- Pero ¿cuál fué la respuesta del abogado?

P.- La Historia nada dice al respecto; mas, sea de ello lo que fuere, absolviendo tu primera pregunta, que es la que ha ocasionado la reciente digresíón, sucederá frecuentemente que te veas embarazada para resolver un problema, sea porque el asunto mismo sea difícil, sea porque lo hubieran envuelto de intento en la oscuridad; entonces será menester no calentarse la cabeza y dejar la solución para otro momento; y si en una segunda ó tercera vez no pudieses darte cuenta de la relación que exista entre la incógnita y las cantidades dadas, no habrás de atormentarte por eso. Si un hombre de letras, por ejemplo, escuchando á un orador retumbante ó leyendo á un escritor metafísico, no, acertase á descifrar alguna frase, ¿porqué habría de mortificarse por eso? La humana inteligencia no es tan aguda que pueda penetrar todos los enigmas á que se prestan aún las ciencias exactas; así es que, en el cultivo de éstas como en el del trato social, debe uno procurar ser, ante todo, modesto. Un ejemplo: el maestro Adhémar, que era justamente reputado como uno de los primeros matemáticos de París, decía con toda ingenuidad: «Es cosa muy curiosa que, en el ajuste que diariamente hay que hacer para los' gastos del mercado, sucede que yo estoy apenas á medio hacer mi cuenta, cuando mi cocinera me da la suma que ha hecho en su cabeza; y nunca se equivoca.

No obstante las consideraciones que preceden, y siguiendo la usanza establecida, voy á consignar en seguida tres series de problemas, útiles algunos, curiosos otros, y otros en fin, puramente fantásticos, para que los resolváis allá en vuestros momentos de ocio; mas, antes de terminar esta conferencia, quiero haceros un encargo, y es: que nunca abuséis de la *Ciencia de los números* para sacar ventajas en daño de otro y que, al contrario, la exactitud y justeza que caracterizan todas las operaciones de esta ciencia, os sirvan de pauta en todos los actos de vuestra vida pública y privada, que esto es lo que se llama *ser honrado.* La persona ilustrada que, abusando de la ignorancia ó candor del prójimo, sabe sacar ventajas en beneficio propio, es una verdadera lepra social. Dar á cada cual lo que es suyo, es proceder con arreglo á la ciencia de los números, y es acatar la ley de Dios.

Queda, hijos míos, terminada la Conferencia y, con ella, nuestro Curso de Aritmética.

San Salvador, 19 de Enero de 1893.

NARCISO CAMPERO.

PROBLEMAS DIVERSOS, <48>, pág. 49, Apend.

PRIMERA SERIE

1º. Se han pagado 1000 *soles* (moneda peruana) con 125 billetes de á 5 y de á 20 soles. ¿Cuántos billetes se han dado de cada especie?

2º.- La suma de dos números es 640, y su diferencia 220. ¿Cuáles son esos números?

3º. Un carruaje de diligencia tiene 18 asientos, los unos á 1f,50 y los otros á 2f. Cuando el carruaje está lleno de pasajeros, da 31f. ¿Cuántos asientos hay á 1f,50 y cuántos á 2 francos?

4º. Suponiendo que un obrero A hace un trabajo en 26 días, que otro obrero B lo hace en 12 días, y otro C en 20 días, se quiere saber en qué tiempo harán la obra los tres reunidos.

5º. Una persona, que posee 80000 francos, ha colocado una parte de ellos á 4f,75 por ciento y la otra parte á 5f,25, lo que le da una renta de 4050 francos. ¿Cuáles son las cantidades colocadas á 4,75 y á 5,25 por ciento?

6º. Dos destacamentos de una división militar componen, ambos, 523 hombres; $\frac{2}{3}$ del primero es igual á $\frac{1}{4}$ del segundo. ¿Cuántos hombres tiene cada destacamento?

7º. (1) Un regimiento compuesto de 1800 hombres ocupa los cuatro pisos de un cuartel. Hay en el segundo piso tres tantos de soldados cuantos hay en el cuarto. El número de soldados reunidos, del primero y segundo pisos, sobrepasa en 500 el número de los que ocupan el tercero y cuarto pisos. En fin, si se reúnen los hombres del segundo y cuarto pisos, no serán más que $\frac{4}{5}$ partes del número que compondrían el primero y tercero reunidos. ¿Cuántos soldados hay en cada piso?

SEGUNDA SERIE

8º. Un lebrel persigue una liebre, que ha dado 50 saltos antes que aquél se moviese; el lebrel da 5 saltos mientras que la liebre da 6. Mas, 9 saltos de la liebre no valen sino por 7 del lebrel. ¿Cuántos saltos dará la liebre hasta el momento de ser alcanzada por aquél?

9º. Hay 163 francos en 4 bolsas: si se ponen 7 francos en la primera; si se sacan 5 francos de la segunda; si se dobla el dinero de la tercera, y se toman las dos terceras partes del dinero de la cuarta, habrá tanto en una como en cualquiera de las otras. Se pregunta: ¿cuánto hay en cada bolsa?

10º. Una madre de familia, queriendo dar manzanas á sus cuatro hijos, les distribuye de la manera siguiente: destina para el mayor la mitad de las que posee, más la mitad de una manzana; para el segundo, la mitad de lo que queda, más la mitad de una manzana; para el tercero, la mitad del nuevo resto, más la mitad de una manzana; en fin, para el cuarto, la mitad del nuevo resto, más la mitad de una manzana. Después de tal distribución, en la que ninguna manzana se ha partido, nada queda. Se pregunta: ¿cuántas manzanas había; y cuántas recibirá cada niño por la parte que se le ha asignado?

11º. Un hombre, al morir, manda que su fortuna sea repartida entre sus 3 hijos, de la manera siguiente: «El mayor tendrá 1/3 de los bienes, más 1/4 del resto; el 2º. tomará la mitad de lo que haya quedado, hecha la primera operación, más 1/5 parte de la mitad restante; el 3º. en fin, tendrá la mitad de la parte del segundo, más 6000 f». ¿Cuál será el valor de la herencia que á cada hijo toque?

12º. Un pastor, preguntado sobre el número de sus ovejas, responde: «*Lo que sé decir,* es: *que no alcanzan ni con mucho á 150, y que, contándonos mis ovejas y yo* de 3 en 3 *y* de 11 en 11, *queda* 1 de *resto; pero que, contándonos* de 5 en 5, *no hay sobrante*». ¿Cuántas son las ovejas? (*)

13º. Un vaso A contiene 75 litros de vino, otro vaso B contiene 75 litros de agua. Se tiene, además, otros dos vasos vacíos, con una capacidad de 10 litros cada uno; se saca á la

----

(1) Este problema es tomado de Mr. Adhémar; sólo sí que él lo ha resuelto algebraicamente, al paso que aquí se trata de darle una solución aritmética, sin más que una incógnita.

(*) Es tomado este problema, así como la solución, de *Mrs. Dumouchel et Dupuis*.

vez, con uno de estos vasos, 10 litros de vino del vaso A para echarlos en B; y con el otro 10 litros de agua del vaso B para ponerlos en A. Hecho esto, se saca á la vez, 10 litros de la primera mezcla para ponerlos en la segunda, y 10 litros de la segunda mezcla para ponerlos en la primera. Se pregunta: ¿qué cantidad de agua y de vino contendrá entonces cada uno de los vasos A y B?

14º. Un viajero, que lleva en un barrilito 10 litros de vino, encuentra un amigo suyo en el camino. Quiere dar á éste una mitad; pero uno y otro sólo tienen dos vasijas vacías en que caben 7 litros en la una y 3 litros en la otra. ¿Cómo, hará para dejar 5 litros en su barrilito?

TERCERA SERIE

15º. Un padre de familia tiene tres veces la edad de su hijo mayor; hace diez años que la edad del padre valía cinco veces la edad de su hijo. Se pregunta: ¿qué edad tienen actualmente?

16. En una sociedad, el número de hombres excedía en 24 el número de mujeres y, habiéndose retirado 4 hombres y 4 mujeres, el número de los hombres es triple del de las mujeres. ¿Cuántos eran ellos y cuántas ellas en un principio?

17. Tres jugadores hacen el convenio de que, en cada partida, el perdidoso doblará el dinero de cada uno de los otros dos. Después de haber perdido cada cual una partida, se retiran del juego con 40 francos cada uno. Se pregunta: ¿Cuánto tenía cada jugador al ponerse á jugar?

18. Un padre, interrogado sobre la edad de su hijo y de su hija, contesta: «Mi hija tiene ahora tres veces la edad que ella tenía cuando su hermano tenía la edad que ella tiene actualmente. Cuando ella haya llegado á la edad actual de su hermano, las dos edades reunidas harán 60 años. ¿Cuántos anos tienen?

19. Un padre deja al mayor de sus hijos 500 f + 1/8 del resto de sus bienes, al segundo 1000f + 1/8 del resto que ha dejado el segundo, al tercero 1500 f + 1/8 del nuevo resto, y así sucesivamente. Nada queda, y los hijos tienen iguales partes. ¿Cuál es la parte de cada uno de los hijos, cuál el número de éstos, y cuál el monto de los bienes del padre?

APÉNDICE

Indicaciones al Preceptor

ADVERTENCIA.- Los caracteres alfabéticos puestos al margen, en este Apéndice, son correlativos con las llamadas puestas con iguales caracteres en el texto.

< I > (pág. 5.) Si el maestro fuese, no un padre de familia, sino un Institutor ó Preceptor, ya se entiende que el tratamiento de *papá* deben reemplazar los niños con el de *señor.*

<2> (pág. 11, 2ª. Lección). Bueno sería, antes de principiar cada nueva Lección, hacer un resumen de la precedente, pero en términos muy breves, condensando las principales ideas y con el objeto de reanudar el razonamiento.

Sería también útil que, en cada Lección, se cambiase el personal de los niños interlocutores, nombrándolos al efecto con la debida anticipación. Serviría ello de provechoso estímulo.

(Apéndice)
p.1

<3> (pág. 14, artículo 12). El Preceptor hará comprender á sus alumnos, que esos arranques, ya de curiosidad, ya de contento, ya de ansiedad, por llegar de una vez al término de la jornada, manifestados por José y Rosalía, no obligan al alumno á repetirlos ni á recomendarlos á la memoria; y que, si se han conservado en el tratado, ha sido tan sólo por presentar tal cual accidente que haga menos ingrato el árido campo de la Aritmética.

<4> (pág. 23, artículo 34. Los proverbios, las historietas y los chistes, empleados de vez en cuando, son poderosos auxiliares para enseñar al que no sabe, ó sirven en su caso para salir de un aprieto.

EJEMPLO

» Había en el pueblo de Cotagaita un joven muy espiri-
» tual, Manuel J. Cortés (que, andando el tiempo, vino á ser
» uno de los personajes notables de Bolivia). Este se había
» comprometido con otro joven del lugar, amigo suyo, á en-
» señarle la Aritmética durante las vacaciones. Es de
» advertir que el joven Cortés era estudiante de derecho,
» después de haber sobresalido por su talento, en los cole-
» gios de Potosí y de Sucre ... En esas vacaciones, que.
» dó en nada el compromiso, porque Cortés daba al otro la
» excusa de que, ó estaba muy ocupado, ó se hallaba indis-
» puesto, hasta que, próximas ya á vencerse las vacaciones,
» se volvió á Sucre. En las vacaciones del año siguiente,
» iguales excusas. Esto no obstante, el joven Buenaventura
» (que así se llamaba el otro) volvió á la carga en las vaca-
» ciones del tercer año, y con tal fuerza que Cortés, vién-
» dose estrechado por una parte, y teniendo por otra la
» conciencia de no ser fuerte en Aritmética, tuvo á bien
» cancelar su compromiso en los términos siguientes:

—« *Mira, Buenaventura: ¿no es verdad que tú sabes*
» *contar hasta un millón?»*
—« *Si.»*
—« Entonces, ¿para qué te afanas por saber más? pues,
» *de seguro, que ni tú ni yo llegaremos á tener* UN MILLÓN
» *en toda nuestra vida!* »

(Apéndice)
p. 2-3

Según eso, hijos míos, vosotros estáis ya más adelantados que don Buenaventura, y, si se quiere, más que su mismo maestro, en el arte de contar….. Y bien; puesto que debéis estar contentos con vuestro progreso, como lo estoy yo también, volvamos á la lección que momentáneamente dejamos interrumpida.

<5> (pág, 35, artículo 43.) Se ha pecado tal vez de minuciosidad en las explicaciones, por ser el presente método destinado principalmente á los padres de familia, entre los que pocos habrá que se hayan dedicado á la penosa tarea de enseñar el *Arte de los números.*

<6> (pág. 37, Conferencia), Las *Conferencias* tienen por objeto hacer que los niños respondan á las preguntas del Cuestionario referente á la Lección anterior, y repasar la materia, pero así *como en conversación;* tal que puedan en ella consultar con más franqueza sus dudas é incertidumbres. Al efecto, deberá el Preceptor mostrarse más afable que en las Lecciones propiamente dichas; y será entonces el caso de entretener á los niños con taló cual chiste *de buen tono.*

<7> (pág. 37, Conferencia):

M.- «*Ocho centenas, dos decenas, cinco unidades simples.*»

<8> (pág. 37, Conferencia):

M.- « *Seis vales de á mil, centenas nada, cinco decenas unidades simples nada.»*

Nota.- El Preceptor hará que, bajo su dictado, apunte M. las tres partidas restantes.

<9> (pág. 37, Conferencia). Manuel debe decir: *cinco unidades, seis decenas, cero centenas* (SIMPLES), *nueve unidades de* MIL, ó sea: *nueve mil sesenta y cinco* pesos.

< 10> (pág. 38, artículo 48). El Preceptor, después de haber oído la definición dada por cada uno de sus interlocutores, sin dejar de alentar ó estimular al que mejor se hubiese expedido, dará la definición en estos ó análogos términos:

(Apéndice)
p.8

La ADICIÓN Ó SUMA, *es una operación aritmética que da á conocer el número de unidades que forman varias cantidades reunidas en una sola.*

< 11 > (pág. 51, artículo 58):

P.- Como es natural, querríais saber cuál de los dos modos es preferible, y voy á satisfaceros, La práctica ha demostrado que se corre mayor riesgo en olvidar de disminuir arriba que de aumentar abajo, porque para esto último sirve como de alerta el retintín *«y llevo una»*.

< 12> (pág. 54, Programa):

P.- Restando: es la cantidad de que debe deducirse otra cantidad menor.

Restador: la cantidad que debe deducirse de otra cantidad mayor.

Diferencia: la cantidad que expresa la desigualdad que hay entre el restando y el restador.

Sustracción: es una operación aritmética que tiene por objeto establecer la diferencia que hay entre dos cantidades que se comparan. Se puede decir también: que la Sustracción tiene por objeto, dada la suma de dos números y uno de ellos, encontrar el otro número.

Y ya que nos lo permite el tiempo, quiero entreteneros con una breve disertación.

Decía un estudiante: -«Y ¿para qué habrá sido dar tantos nombres á una sola cosa, como es el resultado de la sustracción?» — Es que la cosa misma se presenta bajo distintos aspectos, según los casos. Voy á ilustrar este punto, por medio de algunos ejemplos.

Juan, teniendo que recoger de poder de Pedro *mil* pesos, sólo ha recogido *ochocientos.* En tal caso, puede decirse que el resultado de la sustracción es propiamente *resto.*

Más si, al fin de cuentas, resulta que Juan había recibido *mil cien* pesos, en vez de *mil,* he ahí propiamente un *exceso.*

(Apéndice)
p.4-5

Juan y Pedro han formado una sociedad, poniendo el uno *nueve mil* pesos y el otro *ocho mil.* En este caso, como no es obligatorio que los socios pongan iguales cantidades, viene muy bien el nombre de *diferencia* á la desigualdad de capitales, como que es la expresión corriente, tratándose de sociedades.

En resumen: como la palabra *diferencia* cuadra bien á todos los casos de sustracción, le hemos dado la preferencia en nuestro trato escolar.

< 13> (Pág. 72, artículo 93). Puede hacerse este razonamiento con más eficacia, por medio del pequeño aparato que hay, para el efecto, en el Armario, con el nombre de *Tablero de multiplicación.*

< 14> (Pág. 74, Programa): *Multiplicando,* es el factor que indica la cantidad que debe ser multiplicada.

Multiplicador, es el factor que indica el número de veces que debe reproducirse el multiplicando.

Producto, es el resultado de la multiplicación.

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

I 17 X 14 = 238 *alumnos;*
II 730 X 245 = 178850 *pesos* (importe del vino);
III 425 X 300 = 127500 *tiros.*

< 15> (Pág. 97, Problemas). *Soluciones.*

Primero. 1875: 75 = 25 *personas.*
Segundo. 180: 12 = 15 *metros.*
Tercero. 24600: 8 = 3075 *pesos.*

(Apéndice)
p.5 <16> (Pág. 110, artículo 174). Aquí es del caso hacer notar que no siempre el rango de, las unidades simples es el punto de partida de la numeración, pues hay casos en que ese punto de partida se tija accidentalmente en el orden de las decenas, de las centenas, de las unidades de mil, etc.

Eso sucede, por ejemplo, cuando en la operación de dividir se toma, como primer dividendo parcial, cierto número de cifras á la izquierda del dividendo general, dejándose á la derecha una, dos ó más cifras.

Para aclarar más esto, tomemos el mismo ejemplo de que nos servimos en el artículo 172, esto es:

20125 : 25

Operación

```
20125 | 25
 200  | 805
      |
  125
```

Según se ve en la operación que precede, habiéndose tomado como primer dividendo parcial las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo general, dejando á un lado las 2 decenas y las 5 unidades, descompusimos el dividen do general en dos partes, á saber:

20100 + 25

Desentendiéndonos, por un momento, de la segunda parte, tenemos en la primera, lo qué vulgarmente se llama un número redondo (*), que puede leerse en lenguaje escolar, dicien-

----
(*) Se da ese nombre á las cantidades terminadas por uno ó más *ceros.*

..

(Apéndice)
p. 6 . 7

dose 201 centenas, pero que las consideramos actualmente, no como centenas, sino como una cantidad aislada, en que la cifra 1 es el punto de partida y hace, por tanto, el oficio de unidad *simple.*

Hecha la división de ese primer dividendo parcial, quedó por resto 1, sobre el que hemos formado un segundo dividendo parcial 12, en que la cifra 2, aunque decena, en realidad, viene á ser considerada como simple unidad.

No pudiendo ser distribuido este dividendo entre 25, hemos puesto *cero* al cociente y pasado á formar un tercer dividendo parcial, bajando al efecto la cifra 5 al lado del. 12, como lo manifiesta la operación; siendo de notar que, aquí, el punto de partida es ya una verdadera unidad simple.

Así también, al hablar de las rentas ó propiedades de los grandes potentados, se tienen en cuenta nada más que los *miles* ó los *millones,* en números redondos, desentendiéndose uno de las unidades, decenas y centenas s*imples,* y aún de la categoría de *miles* en el segundo caso, como si no fueran más que fracciones de la unidad de mil ó de millón, relativamente.

< 17> (Pág. 129, Programa). *Problemas resueltos.*

1º. 2 X 30 = *60 metros*
60 X 3 = 180 *pesos*
2º. 225 X 3 = 675 *soldados*
675 X (4 X 12.) = 32400 *cartuchos*
3º. 1350 : 75 = 18 *personas*
4º*.* 435 : 15 *= 29 varas*

<18> (pág. 130, artículo 218). He aquí cómo se explica el Maestro Mr. J, Adhémar *(Cours* de *Mathématiques.- Arithmétique.- Deuxieme édition, pago 130).*

(Apéndice) p. 7

«El empleo de las unidades adoptadas como términos de comparación había conducido á distinguir dos especies de números. Se llamaba *número concreto* aquel cuya especie de unidades era designada, como 17 toesas, 24 metros, 28 kilogramos; y cuando la especie no era designada, el número se llamaba *abstracto*».

«Aunque la distinción precedente se encuentra casi generalmente admitida, yo la considero como viciosa y capaz de dar las ideas; más falsas sobre la naturaleza de los números. Así, nosotros no consideramos 24 *metros* como un número. sinó como la expresión de una longitud que es igual á 24 veces 1 metro; de suerte que, en esa expresión, 1 metro es la unidad, mientras que 24 es el número. Se ve pues que, si se quiere hacer la distinción de que acabamos de hablar, esa distinción debe caer sobre la naturaleza de las unidades y no sobre la de los números, que deben ser considerados siempre como abstractos, y como que representan *las relaciones entre las cantidades y las unidades que se han escogido por términos de comparación.»*

« Así, de la expresión»

« 24 metros = 24 X 1 metro,»

«se deduce»

$$«\frac{\text{24 metros}}{\text{1 metro}} = 24;»$$

« y por ahí se ve que el número 24 expresa la relación entre una cierta longitud y la unidad á la cual se la ha comparado. Diremos; pues, que 1 metro, 1 kilogramo, etc., *son unidades concretas,* al paso que 1, 1 vez, *son unidades abstractas.* Y suponiendo, por lo demás, que se admita la distinción de números concretos y abstractos, sería preciso no olvidar que esto no puede tener lugar sinó en el discurso, en la enunciación de las cuestiones y de las respuestas; pero que en el cálculo, los números son esencialmente abstractos, y no deben ser considerados sinó como relaciones numéricas.»

(Apéndice)
p. 7
Muy conformes con la opinión de nuestro maestro y amigo Mr. Adhémar — sobre que, en el bufete del matemático los números deben ser considerados como esencialmente abstractos, — vamos á permitirnos hacer una que otra ampliación, en la hipótesis, admitida por el mismo, de que «puede tener lugar la distinción de números *concretos* y *abstractos* en el discurso, en la enunciación de las cuestiones y respuestas»; y lo haremos confiando siempre (después de sus días) en la benévola acogida que solía él dispensar en su aula á nuestras respetuosas observaciones.

Desde luego, parécenos que no sólo la *unidad,* sinó también los demás números pueden considerarse *concretos,* toda vez que la cantidad sea el conjunto de unidades d~ la misma especie que, de hecho, existen separadamente, por ejemplo 150 naranjas; pues en este caso el número 150 no es la expresión de cuántas veces está contenida la unidad en la cantidad, sinó la expresión del número de unidades que se han agregado, la una al lado de la otra, para formar con todas ellas la cantidad.

Para hacer más palpable lo que acabamos de decir, fijemos la consideración sobre una longitud cualquiera, por ejemplo, una pieza de paño, el largo de un corredor, etc., que tenga, supongamos, 24 metros.

Aquí puede decirse, con propiedad, que el largo de la pieza de paño ó del corredor, es igual á 24 veces 1 metro, porque *ese largo,* comparado á la unidad, que es el largo del metro, está en relación de 1 á 24, siendo el hecho que el término de comparación es distinto objeto de la pieza de paño ó del corredor, mientras que, en el ejemplo de las naranjas, cada objeto es por sí sólo, una verdadera unidad.

Lo propio sucedería tratándose del número de soldados de que constase un batallón, un escuadrón, etc., en que; siendo cada individuo *la unidad misma,* el agregado de todas esas unidades vendría á formar un número verdaderamente *concreto.*

(Apéndice)
p. 9
La necesidad de considerar ciertos números como *concretos,* se hace sentir especialmente en la demostración de cada una de las operaciones elementales del cálculo.

En efecto, empezando por la operación de sumar; para que la comprenda el aprendiz, hay que decirle:

« 4 hormillas (que pueden representar otras tantas nueces, manzanas ú otra especie cualquiera), + 5 hormillas, hacen 9, + 6 forman una suma de 15 hormillas,» quedando así, en evidencia, que todos esos son *números concretos.*

Al efectuar una sustracción, hay también que decirle:

«25 hormillas -7, quedan 18 hormillas»; números, igualmente *concretos.*

Para que comprenda lo que es la multiplicación, se hace necesario hablarle, poco más ó menos, en los siguientes términos:

«Se trata, por ejemplo, de reproducir 3 *naranjas* (número concreto) por 5 *veces* (número abstracto) etc.»

En llegando á la división, habrá que decírsele, por ejemplo:

« Para distribuir 24 *panes* (número concreto) en porciones iguales de á 4 panes cada una, tomo como divisor ó término de comparación, 4 *panes* (número concreto), y, comparándolo con el dividendo, encuentro que éste contiene á aquél 6 *veces* (número abstracto)».

En resumen:

(Apéndice) p. 10

Creemos necesario que en la escuela, en el aula, se haga la distinción de números *concretos,* porque así lo exige la enseñanza, para mejor fijar en la mente de los *niños* las primeras nociones de Aritmética ó, mejor dicho, para grabarlas en su alma, por medio de los sentidos. Mas, no podemos menos que inclinarnos ante la opinión de nuestro maestro, diciendo con él: que en la alta región de la Ciencia todos los números deben considerarse como despojados de la materia, y convertidos en valores puramente ideales, «*esencialmente abstractos.*»

<19 > (pág. 143, Adición). *Soluciones* (de adición):
1ª. 38,6089.
2ª. 50,8959.
3ª. 93,02668.

<20> (pág. 143, artículo 257). PROBLEMAS (sobre adición) *resueltos:*
1º. Ha comprado 79m,56. Ha pagado 191 f,45. Ha vendido en 237f,15.
2º. Ha recibido el albañil 72 f ,75.

< 21> (pág. 145). PROBLEMAS (sobre sustracción) *resueltos.*
1º. Ha pagado $ 197,65.
2º. Deben devolverles 74,60.
3º. Queda á debérsele $ 55,10.

<22 > pág. 149). PROBLEMAS sobre multiplicación) *resueltos:*
1º. Cuesta el raso 67 f ,08.
2º. Se gana 432 f 98.
3º. Deben devolverle 252 f,79.

<23> (pág. 156. Problemas).
1er. *Problema:* ¿Qué costarán 10 metros? $\boxed{x=\quad}$
1ª. operación 150 : 6,25 = ……………….. 24 f
2ª. íd. 24 X 10 = *x* ……………… = 240 f
ó bien abreviando el cálculo:

$$x = \frac{150}{6,25} \times 10 = \frac{1500}{6,25} = \frac{150000}{625} = \ldots\ldots\ldots..240f$$

2º. *Problema:* ¿Cuántos eran los obreros? $\boxed{x=\quad}$
Pagados………… 310 f,40
en días …………. 24
á cada uno por día 3 ,60

Multiplicando 3f ,60 por 24, se obtiene todo lo que ha ganado un obrero en los 24 días, esto es, 3,60 X 24 = 864 f.

(Apéndice) p. 11

Dividiendo por este número los 3110 f .40, se obtiene:

$$x = \frac{3110,40}{864} = 36 \text{ (numero } \textit{de obreros).}$$

3er. *Problema:* ¿Qué cuesta un metro de paño? $\boxed{x=\quad}$

1ª. *operación* 4f,50 X 38.40………………. 172f,80
2ª. íd. 172, 80 : *7,68*= *x* =………… 22f,50
ó bien, abreviando el cálculo:

$$x= \frac{4,50 \times 38,40}{7,68} = \frac{172,80}{7,68} = \ldots\ldots. \quad 22f,50$$

Verificación: 7m,68 de paño á 22,50=………… 172f,80
4º. Problema: ¿Cuántos metros tiene cada pieza? $\boxed{x =}$

1ª. operación $\left\{\begin{array}{lr} \text{Ha producido la venta …} & 1914f,20 \\ \text{ganancia…………………} & — \underline{432\ ,98} \\ \text{importó la compra………} & 1481f,22 \end{array}\right.$

Habiéndose comprado el paño á razón de 19f,50 el metro, viene la

2ª. *operación:* 1481,22 : 19,50 (total de metros) 75m,96
3ª. íd. *x* = 75,96: 3 (cada pieza tiene) 25m,32

[*Nota.*- La verificación puede hacerse por medio de dos multiplicaciones y una adición al fin].

<24> (pág. 163, *Ejercicios).*

(*)
1º. 5,254821 x 12,860748 = 64,90 ……………… = *65 (á menos de 1 unidad).*
2º. 64,32108 x 4,657249 = 299,551 ……………. = 299,6 (*á menos de* 0,1).
3º. 25,874 X 48,6532 = 1258,8523 ………….. = 1258,85 (*á menos de* 0,01)

Queriendo proceder en este último ejercicio con sujeción al ejemplo que nos sirvió de modelo (art. 293), hay dos observaciones que hacer:

(Apéndice) p. 11

1ª. Que como la cifra de las unidades del multiplicador debe colocarse debajo de los dimilésimos del multiplicando (con el objeto de que todos los productos se calculen dos rangos más abajo del requerido), se tropieza con el inconveniente de no haber dimilésimos en el multiplicando, siendo menester, por lo tanto, suplirlo con un cero.

2ª. Que, tocante á la decena del multiplicador, cabe igual observación, pues como esta decena debe quedar á la derecha de las unidades (en virtud del vuelco), tampoco tiene encima la correspondiente cifra de cenmilésimos, y que, por consiguiente, se hace necesario agregar otro cero al multiplicando á fin de marcar este último rango; bien entendido que ese aumento de dos ceros al multiplicando no hace variar en nada su valor.

Después de la explicación que acaba de hacerse, es muy sencillo el cálculo, pues se halla en las mismas condiciones que el del modelo.

Operación:

		25,87400
		2 356,84.
2587400 X 4	=	10349600
258740 X 8	=	2069920
25874 X 6	=	155244
2587 X 5	=	12935
258 X 3	=	774
25 X 2	=	. 50
Suma =		1258,8523

Producto á menos de 0,01 = 1258,85.

Nota.- Por supuesto que, si en el presente caso hubiese habido *centenas* en el multiplicador, habría sido menester agregar un cero al multiplicando (además de los que se ha puesto); si hubiese habido *miles,* un cero más, y así sucesivamente.

<25> (pág. 172, *Conferencia).* El preceptor cuidará de que los alumnos expongan las

----
(*) Se ha obtenido estos resultados con arreglo al *método abreviado,* art.

(Apéndice)
p. 12

dudas que les hubiesen ocurrido y, en caso de silencio, les hará las preguntas que Considere oportunas, á fin de cerciorarse de que ha sido bien comprendida la Lección anterior.

[*Nota.*] - La presente advertencia servirá de gobierno al preceptor en todas y cada una de las *Conferencias* establecidas en este curso, ó que él tuviere á bien determinar, atento el asunto y el estado de instrucción de sus alumnos en .general.

<26> (pág. 185, arto 346).

1ª. *Observación.* La operación que acaba de hacerse, puede considerarse como una serie de divisiones, en la que cada descomposición da un cociente, que viene á ser en seguida dividendo. Así, el número 72930 es cociente de 145860 dividido por 2; sólo sí que, en vez de haberse hecho la división ordinaria

$$\left[\begin{array}{l|l} 145860 & \underline{\;2-\;} \end{array}\right]$$

se ha hecho una división abreviada, tomándose la *mitad* del dividendo y poniendo el cociente 72930 al pie del primer dividendo.

A su turno, el número 72930 ha pasado á ser un segundo dividendo, teniendo por divisor el segundo factor 2 y por cociente 36465, *etc.*

2ª. *Observación.* Considerando, de fin á principio, lo que se ha ejecutado, resulta al contrario, una serie de multiplicaciones, en que los factores dan un *producto* que, á su *vez,* viene á ser *factor.* Así:

$$\begin{array}{rcrcr} 13 & \text{X} & 1 & = & 221 \\ 221 & \text{X} & 11 & = & 2431 \\ \hdashline 72930 & \text{X} & 2 & = & 145860. \end{array}$$

De esta observación, fluye la siguiente consecuencia: (Apéndice) p. 12

Así como la División tiene el poder de deshacer lo que la Multiplicación ha hecho, así también la Multiplicación puede rehacer lo que ha deshecho la División.

<27> (pág. 207, art. 377). Esa operación debe ejecutarla el profesor mostrando, *en la vara,* que $\frac{1}{2}$ es igual á $\frac{18}{36}$ y $\frac{1}{3}$ igual á $\frac{12}{36}$, de modo que los alumnos tengan conciencia de lo que él hace.

<28> (pág. 219, Ejercicios). Conviene transcribir aquí lo que dice Mr. Adhémar en la página 67 de su Aritmética, segunda edición:

« Hasta el presente, no se había generalizado el método que acabamos de desarrollar. Se daba por razón la de que, si los denominadores de las fracciones propuestas fuesen primarios entre sí, la descomposición no tendría objeto; mas entonces podría considerarse ese caso como particular, y el método precedente daría, en la mayor parte de los casos, el más pronto resultado posible ».

« Debe recordarse, en efecto, que la sola condición esencial y *generalmente* exigida, es que el número empleado como denominador común, sea un múltiple de los denominadores de las fracciones dadas. Y, puesto que se tiene la elección, entre todos los números que gozan de esta propiedad, es muy natural tomar el más pequeño múltiple, más bien que emplear, como antes se hacía, el producto de los denominadores ».

« Por otra parte, puede uno dispensarse de hacer la descomposición en factores, si los números propuestos no se prestasen á ello fácilmente; pues el principio no consiste precisamente en *esa* descomposición, sinó más bien en el empleo de un múltiple *cualquiera* de los denominadores propuestos, no debiendo ser preferido el más pequeño sinó en tanto que su empleo abrevie el cálculo, lo que el hábito hará que pueda reconocerse fácilmente ».

(Apéndice)
p. 13

« De lo que acaba de decirse, resulta que no se debe vacilar en ver como *general* un principio que satisface á todos los casos, y cuya aplicación, jamás larga, es al contrario, casi siempre, infinitamente más corta que el método que ha sido dado hasta el presente en todos los tratados de Aritmética; método que sólo la rutina ha podido hacer .que se conserve, y que es, por otra parte, contrario al espíritu de análisis y de descomposición tan necesario al estudio de las Matemáticas ».

<29> (Pág. 257, arto 464). Sin embargo de lo expuesto al principio de la presente Lección sobre los problemas concernientes á la *adición* y á la *sustracción,* debo advertiros: que, siendo también tres los elementos que constituyen cada una de estas operaciones: *suma* (ó *restando), primer sumando* (ó *restador*) y *segundo sumando* (ó *diferencia*), los problemas pueden reducirse, en definitiva, á sólo *dos casos,* razonando como lo hemos hecho, tocante á la multiplicación y á la división, á saber:

1er. caso. Dados *el 1º.* y 2º. *sumandos* encontrar *la suma* (ó *restando)* ;

2º. caso. Dada *la suma* (ó *restando)* y *uno de los sumandos,* encontrar el otro *sumando (restador* ó *diferencia*).

Se podrá hacer esta observación: «Siendo muchos los sumandos, ¿cuál será el 1º. y cuál el 2º.? »

La contestación será muy sencilla, recurriendo al mismo arbitrio que empleamos en la multiplicación, al encontrarnos con muchos factores, esto es: tomando por 1er. sumando á cualquiera de ellos, y encerrando todos los demás en uno solo, para formar el 2º. sumando, de este modo:

(Apéndice)
p. 14

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right).$$

Recordad que este arbitrio nos sirvió en un principio, tratando de números enteros, para comprobar la exactitud de una suma (art. 160 bis).

Concluiré por deciros que, en el *1er. caso,* se resuelve el problema por medio de la *adición; y*. en *el 2º. caso,* por el de la *sustracción.*

<30> (Pág, 263, Problemas). *Problemas* resueltos.

1er. problema. *¿Cuál es el Número del que una mitad, el tercio y el cuarto, valen 104?*

Operación: $104 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 104 : \frac{13}{12} = 104 \times \frac{12}{13} = 96.$

2º. *Un obrero que tiene de ejecutar cierto trabajo, ha hecho en el primer día* $\frac{1}{3}$ *de la obra y* $\frac{1}{4}$ *en el segundo día. ¿Qué le queda aún por hacer?*

Operación: $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$

3º. *La diferencia entre la mitad y el quinto de un número vale* 6. *¿Qué número es ese?* -

Op*eración* : $6 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 6 : \frac{5-6}{10} = 6 \times \frac{3}{10} = 6 \times \frac{10}{3} = \frac{60}{3} = 20.$

Comprobación

de 20 = 10
de 20 = 4
Resto ó diferencia = 6

4º. *¿Cuál es el número cuya mitad, tercio y cuarto menos un quinto, da* 265?

(Apéndice)
p. 14

Operación: $295. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 265 : \left(\frac{30 + 20 + 15 - 12}{60} \right)$

$= 265 : X \frac{53}{60} = 295 \text{ X } \frac{60}{53} = \frac{15900}{53} = 300.$

Comprobación

$\frac{1}{2}$ de 300 = 150

$\frac{1}{3}$ de » = 100

$\frac{1}{4}$ de » = 75

Suma = 325

— $\frac{1}{5}$ de 300 = 60

Diferencia = 265

5º. *Cinco octavos de metro, de cierto tejido, han costado* 16 *francos. ¿Cuánto cuesta el metro?*

Operación: $16 : \frac{5}{8} = 16 \text{ X } \frac{8}{5} = \frac{128}{5} =$ *(número buscado)* 25f $\frac{3}{5}$

6º. *Se quiere dividir 5600 francos entre dos personas, de tal modo que la primera tenga* $\frac{1}{3}$ *de más que la segunda*

Razonamiento.- Si representamos por 1 la parte correspondiente á la segunda persona, la parte de la primera habrá de ser 1 $\frac{1}{3}$; tal que el problema puede traducirse en estos términos: ¿Cuál es el número que multiplicado por (1 $\frac{1}{3}$ +1), da el *producto* de 5600? Ahora bien; dividiendo este producto por el factor conocido, que es (1 $\frac{1}{3}$ +1), se obtendrá el otro factor (art. 467).

Operación:

$$5600 : \left(1 \tfrac{1}{3} + 1\right) = 5600 : \frac{7}{3} = 5600 \text{ X } \frac{3}{7} = \frac{16800}{7} = 2400$$

Comprobación

(Apéndice)
p. 14

Número buscado = 2400

Correspondiente á la 1ª. persona: 2400 X 1 $\frac{1}{3}$ = 2400 + 800 = 3200
» » » 2ª.persona: 2400 X 1 = 2400 = 2400
Suma = 5600

7º. *El coronel de un regimiento ha perdido en una batalla* $\frac{1}{20}$ *de sus hombres, ha tenido* $\frac{1}{12}$ *de heridos, y le quedan 2080 hombres. ¿De cuántos constaba el regimiento?*

Razonamiento. Si conociésemos el número de hombres que tuvo en un principio el regimiento, multiplicando ese número *por* 1, obtendríamos como producto el mismo número; mas, siéndonos él desconocido, tenemos que apelar á otro recurso, esto es, que considerar 2080 como *producto* de dicho número *incógnito* y de una fracción, que debe ser en el presente caso (1- $\frac{1}{20}$ - $\frac{1}{12}$).

Ahora bien; dado el producto 2080 y uno de sus factores, que es (1 - $\frac{1}{20}$ - $\frac{1}{12}$), dividiendo el producto por este factor, encontraremos el otro factor ó sea el valor de la i*ncógnita.*

Operación….. $2080 : \left\{1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right)\right\} = 2080 : \left(1 - \frac{8}{60}\right)$

$= 2080 : \frac{60 - 8}{60} = 2080 : \frac{52}{60} = 2080 \text{ X } \frac{60}{52} = 2080 \text{ X } \frac{15}{13} =$

$= 160 \times 15 =$ ....(incógnita) 2400

Comprobación, $2400 - \frac{\cancel{2400}^{120}}{\cancel{20}} - \frac{\cancel{2400}^{200}}{\cancel{12}} - 120 - 200 = 2400 -$

$-320 =$ 2080

(Nota: muertos 120; *heridos* 200; *restantes* 2080; *Total* = 2400).

8º. *Un jugador pierde en una primera partida* $\frac{1}{5}$ *de su dinero, después* $\frac{1}{3}$ *del resto; se retira del juego con* 8 *francos. ¿Cuánto tenia al ponerse á jugar'*

(Apéndice) p. 15

Razonamiento. Al ponerse á jugar, tuvo el jugador $\frac{5}{5}$; en la primera partida perdió $\frac{1}{5}$ de su capital, y le quedaron $\frac{4}{5}$, *(primer resto);* en la segunda partida perdió $\frac{1}{3}$ de los $\frac{4}{5}$, y le quedaron $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ *(segundo resto),* mas, como en el problema se dice que el jugador quedó, después de la segunda partida, con 8 francos, es claro que estos 8 francos son iguales á los de su primitivo fondo ó capital.

Eso establecido, la cuestión puede traducirse del siguiente modo:

8f *¿de qué número de francos vienen á ser* $\frac{8}{15}$? *ó,* en otros términos: .

¿Cuál es el número de francos que, multiplicado por $\frac{8}{15}$ *, da como producto* 8*f?*

.Operación. 8 : $\frac{8}{15} = 8 \times \frac{15}{8} =$ *(capital con que entró el jugador)* 15f

Comprobación

Entró á jugar con .... 15 f

En la primera partida perdió $\frac{1}{5}$ de 15f =..................... 3

Del resto 12, en la segunda partida perdió $\frac{1}{3}$ = …….. 4

Le quedaron... 8

Suma igual á su capital... 15 f

9º. *Los* $\frac{3}{4}$ *de una pieza de paño han costado 450 f, ¿Que cuestan* $\frac{2}{3}$ *de la misma pieza?*

Conviene desde luego averiguar qué costo tendría la pieza entera, á fin de calcular por ahí el valor de $\frac{3}{4}$.

$450 : \frac{3}{4} = 450 \times \frac{4}{3} = \frac{1800}{3} = 600$ f *(costo de la pieza entera).* $\frac{2}{3}$ *de 600=* $\frac{1800}{3}$= *(valor de* $\frac{2}{3}$ *- de la pieza)*...400f

(Apéndice) p. 16

(Nota. Se omite hacer aquí la comprobación, por ser ella muy fácil de hacerse).

10. *Una frutera ha comprado naranjas, á razón de* 9 *por 2 francos; vendiéndolas á* 4*f la docena, ha ganado* 6*f. ¿Cuántas eran las naranjas?*

Aquí los 6f de utilidad son indudablemente *producto,* y el número de naranjas un *factor* incógnito; tal que el otro *factor* tiene que ser la diferencia entre el precio de la compra y el de la venta. Según esto, el problema está comprendido en el *caso* 2º. (artículo 459), y debe resolverse por la división.

Ante todo, hay que notar que el factor proveniente de la diferencia de los precios de compra y venta, aunque no se muestra á las claras, se le puede poner en evidencia por medio de una sencilla operación, esto es, buscando previamente la utilidad que ha producido cada porción de á 9 naranjas, ó sea la utilidad correspondiente á cada una de ellas. Al efecto, conviene fijarse en que 9 naranjas compradas á 2f, pueden expresarse de este modo, $\frac{2}{9}$ (lo que importa decir que por 2f se han adquirido 9 naranjas, ó, lo que viene á ser lo mismo, que cada una ha costado $\frac{2}{9}$ de franco). Por igual razón, las 12 naranjas vendidas á 4f, pueden expresarse poniendo $\frac{4}{12}$ es decir, que cada porción de á 12 naranjas se ha vendido por 4f, ó, lo que es lo mismo, que cada una se ha dado por $\frac{4}{12}$ de franco).

Ahora bien; haciendo la diferencia entre el precio de compra y de venta, se tiene:

$$\frac{4}{12} - \frac{2}{9} = \frac{12}{} - 36 = \frac{12-8}{36} = \frac{8}{36} = 1$$

de franco (que es la diferencia de precio, ó sea la utilidad reportada por la frutera en cada naranja).

Reducido así el segundo factor á su más simple expresión, lo demás cae de su propio peso, como se ve en seguida.

(Apéndice)
p. 17

Operación: 6 : $\frac{1}{9}$ = 6 X $\frac{9}{1}$ = 54, que representan 54 novenos de franco, *indirectamente* el número de las naranjas (articulo 206).

Comprobación:

Precios

Importe de la venta, 54 X $\frac{4}{12}$ = $\frac{216}{12}$ =...........18f

Id. de la compra, 54 x $\frac{2}{9}$ = $\frac{108}{9}$ =..............12f

Diferencia ó utilidades = ... 6f

11. *Un deudor entrega á su acreedor* $\frac{1}{4}$ de lo que le debe, después $\frac{1}{10}$ del resto, y le debe todavía 540f, *¿Cuánto* importaba la deuda?

Razonamiento. Al hacer la primera entrega, quedó á deber un resto de $\frac{3}{4}$; al hacer la segunda, salía á deber $\frac{9}{10}$ de .ese resto, y aún tenia que pagar 540f, La cuestión se reduce, según eso, á saber cuál es el número del que 540 viene á ser los $\frac{9}{10}$ de $\frac{3}{4}$.

Cálculo. 540: ($\frac{9}{10}$ X $\frac{3}{4}$) = 540: $\frac{27}{40}$ = 540 X $\frac{40}{27}$ = $\frac{21600}{27}$ = 800 f

total de la deuda).

Nota. La comprobación puede hacerse como se ve en el problema 8º. ó simplemente por la multiplicación, de este modo 800 X $\frac{9}{10}$ X $\frac{3}{4}$ = $\frac{20}{\cancel{800}}$ x$\frac{27}{\cancel{40}}$ = 540f .

12. *Un barril lleno de vino, pesa 440 libras más* $\frac{1}{4}$ *de libra, y se sabe que el peso del barril, vacío, es un* $\frac{1}{3}$ *del peso total. ¿Cuál es el peso del vino?*

Cálculo:

$$440+\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\ (440 + \frac{1}{4}) = \frac{1761}{4}\ \ \frac{1}{3} \times \frac{1761}{4} = \frac{1761}{4} - \frac{1761}{12} =$$

$$= \frac{5283}{12} - \frac{1761}{12} = \frac{3522}{12} = \frac{1761}{6} = \frac{587}{2} = 293\ \frac{1}{2}\ \text{lib.s}$$

Comprobación:

Peso del vino… = 293 $\frac{1}{2}$ lib.s

Peso del barril = $\frac{1}{3}$ (440 + $\frac{1}{4}$) = 146 $\frac{3}{4}$ lib.s

Peso total = 440 $\frac{1}{4}$ lib.s

13. *¿Por qué número debe multiplicarse 30 para disminuirlo de* $\frac{1}{3}$? (Apéndice) p. 18

Cálculo: 30 $\frac{1}{3}$ de 30, son 20; de suerte es que la cuestión se reduce á saber por qué número ha de multiplicarse 30 para producir 20. Entonces, 20 es producto, y 30 uno de sus factores; luego, dividiendo 20 por 30, encontraremos el factor que se busca. En efecto:

$$20 : 30 = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad \text{(\textit{factor buscado})}$$

Comprobación:

$$30 \text{ X } \frac{2}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ (\textit{producto})}$$

14. *¿Por qué número debe dividirse 30 para aumentarlo en* $\frac{2}{3}$ *?*

Cálculo: 30 + $\frac{2}{3}$ de 30 = 50. Aquí, el número 50 es evidentemente un cociente, y 30 el dividendo; de modo que, dividiendo 30 por 50, se encontrará el divisor. En efecto:

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5} \text{ divisor}$$

(Apéndice) p. 20

Comprobación:

$$30 : \frac{3}{5} = 30 \text{ X } \frac{5}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ (\textit{cociente})}$$

<31> *(Pág. 280, Ejercicios).*

Soluciones:

I = $\frac{6}{9}$

II = $\frac{43}{99}$

III = $\frac{1}{99}$

IV = $\frac{349}{900}$

V = $\frac{9428}{9900}$

VI = $\frac{477565}{999000}$

<32> (pág. 288. *Ejercicios).*

I. Tres *decámetros cuadrados,* sesenta y cuatro *metros cuadrados,* cuarenta y cinco *decímetros cuadrados,* sesenta *centímetros cuadrados.*

II. Cinco *hectómetros cuadrados,* cuarenta y tres *decámetros cuadrados,* cincuenta *metros cuadrados,* dos *decímetros cuadrados,* cuarenta y seis *centímetros cuadrados,* ochenta *milímetros cuadrados.*

III. Cincuenta y un *hectómetros cuadrados,* veintisiete *decámetros cuadrados,* veintinueve *metros cuadrados,* doce *decímetros cuadrados,* treinta y cuatro *centímetros Cuadrados,* cincuenta *milímetros cuadrados.*

IV. Siete *decámetros cuadrados,* veintinueve *metros cuadrados,* ochenta y seis *decímetros cuadrados,* cuarenta y dos *centímetros cuadrados,* diez *milímetros cuadrados.*

(Apéndice)
p. 21

V. Cuarenta *decámetros cuadrados,* noventa y seis *metros cuadrados,* cinco *decímetros cuadrados,* siete *centímetros cuadrados,* noventa *milímetros cuadrados.*

VI. Siete *hectómetros cuadrados,* dieciséis *decámetros cuadrados,* cuarenta y dos *metros cuadrados;* setenta y seis *decímetros cuadrados,* cincuenta *centímetros cuadrados.*

VII. Dieciocho *decámetros cuadrados,* cincuenta *metros cuadrados,* treinta y seis *decímetros, cuadrados,* cincuenta un *centímetros cuadrados.*

VIII. Ocho *hectómetros cuadrados,* quince *decámetros cuadrados,* cuarenta y tres *metros cuadrados,* treinta y seis *decímetros cuadrados,* cuarenta y cinco *centímetros cuadrados.*

IX. Cuatro *kilómetros cuadrados,* treinta y seis *hectómetros cuadrados,* cincuenta y cuatro *decámetros cuadrados,* noventa y seis *metros cuadrados,* trece *centímetros cuadrados,* setenta y cinco *milímetros cuadrados.*

X. 408m.q., 356
XI. 350528m,q., 1649
XII. 60089m.q., 08632
XIII. 0 m.q., 03563
XIV. 0 m.q., 000145

XV. Diecisiete *hectáreas,* ochenta y *nueve áreas,* cincuenta *centiáreas.*
XVI. Cuarenta y seis *hectáreas,* veintiocho *dreas,* setenta y cinco *centiáreas.*
XVII. Doscientas cincuenta y seis *hectáreas,* cuatro *áreas,* veinticinco *centiáreas.*
XVIII. Trescientas sesenta y una *hectáreas,* cuarenta y cinco *áreas,* cuarenta *centiáreas.*
XIX. Mil ochocientas treinta *hectáreas,* sesenta y cuatro *áreas,* quince *centiáreas.*
XX. Doce *hectáreas,* treinta y cuatro *áreas,* cincuenta y seis *centiáreas.*
XI. Doscientas treinta y cuatro *hectáreas,* cincuenta y seis *dreas,* cincuenta y seis *centiáreas.*

(Apéndice)
p. 21

XXII. Mil trescientas cincuenta y siete *hectáreas,* noventa *áreas,* veinticuatro *centiáreas,*
XXIII. Veinticuatro mil seiscientas ochenta *hectáreas, quince áreas,* treinta *centiáreas.*

XXIV. 308 a., 50
XXV. 915 a., 25
XXVI. 6238 a., 85
XVVII, 34564 a.,10
XXVIII, 250020 a., 75

<33> (pág. 294, Ejercicios).

I. Veinticinco *metros cúbicos,* cuatrocientos *decímetros cúbicos.*

II. Ciento setenta y siete *metros cúbicos,* quinientos sesenta *decímetros cúbicos.*

III. Doscientos treinta y cuatro *metros cúbicos,* trescientos sesenta y cinco *decímetros cúbicos.*

IV. Mil ochocientos *metros cúbicos,* trescientos cuarenta y tres *decímetros cúbicos,* setecientos *centímetros cúbicos.*

V. *Dos mil cuatrocientos sesenta y cinco metros cúbicos, ciento treinta y cinco decímetros cúbicos* setecientos noventa *centímetros cúbicos.*

VI. Ocho *metros cúbicos,* cuatrocientos sesenta y cinco *decímetros cúbicos,* ciento ochenta y tres *centímetros cúbicos.*

VII. Trescientos cuarenta y un *metros cúbicos,* cuatrocientos setenta y cinco *decímetros cúbicos,* seiscientos *centímetros cúbicos.*

VIII. Mil setecientos cincuenta y dos *metros cúbicos,* setecientos cincuenta *decímetros cúbicos.*

IX. Tres mil seiscientos *metros cúbicos,* cuatrocientos *decímetros cúbicos.*

X. 2 m,c, , 5
XI, 428 m c. ,051
XII. 2325 m,c, ,048 .
XIII. 0 m,c. , 009072
XIV. 0 m,c, ,09502904

(Apéndice)
p. 22 -23

<34> (pág. 297. Problemas) *Soluciones:*

1.a 933550 k
2.a 6314 hects.
3.a 31500 f
4.a 238 f ,70
5.a 247 f ,50
6.a 111111m,111…
7.a 4444m,444…
8.a 2222m,222…
1111m,111
3333 m,333
9.a 18 k de azúcar
10 k ,125 de café
6 k ,480 de mezcla
10.a 66 piezas

11.a 1825 k

12.a 40 piezas
13.a 21bs.,500
14.a 167 f ,31
15.a 20 piezas de 2f
16.a 19 » » 5f
17.a 237g,5
18.a 162000m
19.a 140 piezas de 5f
20.a A= 41lts. $\frac{1}{3}$ de vino
8 lts. $\frac{2}{3}$ de agua
B= 8 lts. $\frac{2}{3}$ de vino
21lts. $\frac{1}{8}$ de agua

<35> (pág. 303, arto 531). Intencionalmente, no se ha mentado la moneda llamada *Boliviano,* á causa de que, con el mismo nombre, se designa también al individuo nacido en Bolivia, circunstancia que se presta no pocas veces á equívocos depresivos. Es, sin duda, por esta consideración, que ningún otro país (que conozcamos) ha dado á su moneda el mismo nombre de sus nacionales. Por otra parte, es de creer que, en breve, se tratará de dar otra denominación á la unidad de moneda en Bolivia.

< 36> (pág. 334). *Resolución de los problemas.*

1º.

Razones:

Pesos………………………… 176 : 284
varas ………………………… $\boxed{22 : x}$

$176 : 284 :: 22 : x$

$$x = \frac{284 \times 22}{176} = \frac{71}{2} = 35 \tfrac{1}{2} \quad \textit{varas.}$$

(Apéndice)
p. 24

2º.

Razones:

Leguas ……………… 24 : 96
días ………………… $\boxed{3 : x}$

Operación

Leguas……………….. 96 - 24 = 72

$$24 : 72 :: 3 : x = \frac{72 \times 3}{24} = \frac{72}{8} = 9 \textit{ días.}$$

3º.

Razones:

Manzanas……………….. $12 : 168$
Pesos ……………………$\boxed{1\ \tfrac{1}{2}\ : x}$

$12 : 168 : : 1\ \tfrac{1}{2}\quad x = 21$ pesos.

4º.

$25m : 10m : : 612f,50 : xf$

$x = \frac{612,50 \times 10}{25} = \frac{6125}{25} = 245f.$

Cálculo

10m cuestan = 245 f
ganancia en 10m, á razón de 3f ,75 por metro……………… } = 37f,50
Suma = 282 ,50 *francos* (precio de venta).

5º.

$6 : 4 : : 200 : x = 800$;

(Apéndice) p.25

De modo que, para que los víveres alcancen para 6 meses, es preciso reducir la guarnición á 800 hombres; y al efecto, hay que retirar de ella 400; de suerte que 1200 - 400 = 800 hombres.

6º.

$3,60 : 6,40 : : 4,50 : x = 8$ lit.

7º.

$1,20 : 1,50 : : 72 : x = 90$ m

8º.

$12000 : 54000 : : 9 : x = 40,50 = 40$ años y 6 meses

9º.

$12 : 15 : : 360 : x = 450$ hombres.

<37> (pág. 377) *Problema núm. 1.*

P.- (preceptor). Veamos cómo resuelve N. el primer problema del programa.

A.- (*alumno).* Para ello, hay que cambiar la forma de la enunciación, en esta otra: «*Sacar, desde luego, los intereses correspondientes á 1920* $ *en 75 días, al* 2,25 %, *y agregar este resultado al capital».*

P.- Es decir que contiene dos partes: la primera, concerniente á la *regla de interés simple;* y la segunda, á una mera *adición.* Contráigase usted, pues, á la primera.

A.- Ante todo, debo hacer notar que, en el presente problema, el Capital, el interés y el Tiempo, marchan en consonancia (art. 646).

Rigiéndome ahora por lo establecido en las *Cuestiones* 1ª. y 5ª. y operando por el *método indirecto* [*aquí el cálculo*], obtengo:

(1ª. Solución) $x = \frac{2{,}25 \times 1920 \times 75}{100 \times 360} = \frac{225 \times 1920 \times 75}{100 \times 360} = \frac{900}{100} = 9.$

Ahora, como para verificar el resultado y procediendo por el *método directo,* tengo…..

P.- Mas, no ha de contentarse usted con sentar las dos proporciones del caso, sinó que debe hacerlo *razonadamente,* á fin de fijar bien las ideas y no proceder como por rutina. Adelante.

A.- Pongo, desde luego…………………….. *Razones*

capitales….	100 : 1920
intereses…	$\boxed{225 : \quad x}$
días………	360 : 75

En seguida, combinando la razón de los capitales con la de los inte- *intereses, coloco* m(suplente de x)al *extremo* derecho de la proporción (que es lo más común); pongo su término correlativo 2,25 como *medio,* y tengo:

$:: 2{,}25 : m$

Para completar la proporción, digo: « 2,25 es el interés correspondiente al capital 100, y m representa los intereses del capital dado 1920; luego m *(consiguiente)* tiene que ser más grande que 2,25 *(antecedente)».* Por tanto, completo esta primera proporción poniendo 100 como antecedente y 1920 como consiguiente, esto es:

(1ª. proporción) $100 : 1920 :: 2{,}25 : m.$

Se ve, pues, que esta proporción, en que cada antecedente es menor que su respectivo consiguiente, ha sido rigurosamente planteada (art. 608).

Ocupándome en la 2ª. proporción, y queriendo aprovechar de las ventajas indicadas en los artículos 639 y 640, pongo, desde luego….. $:: m : x,$
y, para completar la proporción, digo: « m *(antecedente)* es más grande que x*;* luego, debo completar esta segunda proporción, poniendo como antecedente el término más grande de la razón de los *días,* y como consiguiente, el más pequeño, es decir: (Apéndice) p. 25

2ª. (proporción) $360 : 15 :: m : x.$

P.- ¿Qué motivo tiene usted para afirmar que m es más grande que x?

A.- Que m representa el valor de los intereses correspondientes al capital 1.920 en el transcurso de 360 días, mientras que x sólo representa los intereses correspondientes á 75 días, según lo enunciado en el problema; fuera de que así aparece á simple vista de la primera proporción. En efecto:

$$m = \frac{1920 \times 2{,}25}{100} = 43{,}20,$$

que es el máximo de intereses que 1.920 podían producir en un año; siendo de notar que este valor es imaginario, nada más que supuesto; y que, por tanto, hay que corregirlo para arribar á la verdad.

P.- Demuestre usted cómo se corrige en la segunda proporción el error voluntario que se cometió en la primera.

A.- Expresándose, en la segunda proporción, que el valor de x (que es la verdadera incógnita) debe ser tan pequeño respecto al de $m,$ como lo es 75 días respecto á 360 días.

P.- Perfectamente. Veamos ahora la solución del problema por el *método directo.*

A.- Multiplicando término por término las dos proporciones, tengo:

1.00 X 360 : 1.920 X 75 :: 2,25 : *x.*

De ahí:

(2ª. solución) $x = \frac{1920 \times 75 \times 2{,}25}{100 \times 360} = 9$,

(Apéndice) p. 26

resultado igual al que se obtuvo por el *método indirecto.*

Asegurado de la exactitud del resultado, concluyo por satisfacer á la pregunta del 1er. problema, en estos términos:

1920 $ *(capital)*
9 (*intereses)*
Suma… 1929 $ *(capital é intereses)*

(*Nota.*-Tocan te á los problemas que siguen, el Preceptor arreglará á su modo la Conferencia, según la aptitud y capacidad del alumno que salga al tablero; pero, si éste se viese embarazado para contestar alguna pregunta ó practicar tal ó cual operación, entonces procurará el Preceptor ayudarlo, pero en términos que aquél quede penetrado de lo que tiene que decir ó hacer).

Problema núm. 2.

[Téngase en cuenta, al resolver este problema, que el Capital y el Tiempo obran á la inversa que el Interés, artículo 647].

Solución, por el método indirecto…... $x = \frac{640 \times 100 \times 12}{3840 \times 40} = 5$ % *al año.*
Id., por el método directo…………… $x = \frac{100 \times 12 \times 640}{3840 \times 40} = 5$ % *al año.*

Problema núm, 3.

Procediendo como en la 7ª. *Cuestión;* se tiene:
Intereses de 100 francos al 6,60 % en 4 ½ años =….. 29,70.

En seguida, se plantea la siguiente proporción:

(100 + 29,70) : 1634,22 : : 100 : *x*

De ahí: $x = \frac{1634{,}22 \times 100}{129{,}70} = \frac{1634\,22 \times 10\cancel{0}}{1297\cancel{0}} = \frac{1634220}{1297} = 1260$

(Apéndice) p.27

Como verificación, se hace el cálculo de los intereses que producen 1260 francos en 4 1/2 anos al 6,60 %, y se obtiene 374,22 como intereses, los cuales, agregados al capital, dan:

1260
+ 374,22
Suma 1634,22,

que es la cantidad dada en el problema, como formada por el capital é intereses.

(Nota.- El anterior problema pudo también ser resuelto por cualquiera de los dos métodos *directo* é *indirecto;* pero se ha preferido el procedimiento que acaba de emplearse, por

ofrecer la ventaja de resolver el problema con una sola proporción, mientras que dichos métodos habrían exigido dos y cuatro proporciones respectivamente).

Problema núm. 4.

Sustrayendo 2380 *(capital neto)* de 2701,30 *(capital* é *intereses),* se obtiene 321,30 como diferencia, la cual no es otra cosa que los intereses producidos por dicho capital en 2 anos y $\frac{1}{2}$. Entonces, la cuestión propuesta en el problema se convierte en esta otra: *¿En cuánto tiempo 2380f han producido* 321f, *30c al 5,40* %?

Procediendo como en la 4ª. *cuestión,* por cualquiera de los *métodos,* se obtiene:

(Apéndice) p. 28

$$X = \frac{3570}{119} = 30\ (meses) = 2\tfrac{1}{2}\ años$$

<38> (pág. 377, *Programa)* *Problema núm.* 5

(El presente problema y los que le siguen corresponden con las páginas 340 y 341).

Hay que plantear dos proporciones *ó* reglas de tres. .Representando por A al primer acreedor, é importando su crédito 835 f, se tiene:

Haber de A (100 : 60 : : 85 : x)= $\frac{60 \times 835}{100}$ =………… 501

Representando por B al segundo, cuyo crédito es 648f, resulta:

Haber de B (100 : 60 :: 648 : y) = $\frac{60 \times 648}{100}$ =………….. 438,80

Problema núm. 6

Si cada uno de los deudores hubiese pagado 100 por 100 de su deuda, ésta habría quedado extinguida; pero, habiendo entregado solamente 36 por ciento, debe todavía 64 por 100. El problema se *convierte* entonces en este otro:

Un deudor (Pedro) *ha pagado* 36 por 100 *de su deuda, y resta á deber* 64 por 100. *¿Cuánto importa este resto?*

He aquí la respuesta:

(36 : 64 : : 1281,60 : x)

Pedro sale á deber x = $\frac{20505,6}{9}$ =…………………………. 2278,40

Pagó ………………………………………………… 1281 ,60
Importaba su deuda……………………….. …Suma……. 3560f

En cuanto al segundo deudor (Juan): (Apéndice) p. 28

(36 : 64 : : 986,40 : y)

Juan *sale á deber y =* $\frac{16 \times 109,60}{9}$ = ……………………….. 1753,60
Pagó………………………………………………… 986,40
Importaba su deuda……………………. Suma …. 2740f

Observación. Según se ve, los dos precedentes problemas no son propiamente del dominio de la *Regla de interés;* sin embargo, se han mantenido en este lugar por vía de recuerdo de la llamada *Regla de tres simple,* que no hemos practicado lo bastante, *Problema núm.* 7

Observación. Este problema, lo mismo que el núm, 8 (que vendrá en seguida), tampoco es propio de la *Regla de interés,* pues que en ésta entra *el tiempo* como elemento esencial, haciendo parte de la tasa. En efecto, son tres las cantidades que, sirviendo de términos de comparación, constituyen *la tasa;* esto es: el *tanto* por *ciento* al *año;* y en la presente cuestión el *Tiempo* no entra para nada. Hay, es verdad, un *capital* y un 15 *por ciento;* mas, este no es *interés* sino *utilidad ó* provecho que se saca de una operación del momento. Así entendido, el presente problema debe considerarse como una simple *regla de tres,* concebida en estos términos. *Si 100 dan* 115, *2500 cuánto darán?* —la cual expresada en forma de rigurosa proporción, viene á ser:

$$100 : (100 + 15) : : 2500 : x$$

De donde………… $x = \frac{115 \times 2500}{100} = 2875$ *(francos).*

(Apéndice) p.28

Problema núm. 8

Representando por A, B, C á los tres acreedores, se tendrá:

$100 : 40 : : 8000 : x$

		Razones:
A recibirá	……………………: $x = \frac{40 \times 8000}{100}$ =…..3200f	100 : 40 : : …..
B recibirá	» » : : 15000 : $y = \frac{40 \times 15000}{100}$ =…..6000f	» » : :…..
C Recibirá	» » : : 24000 : $z = \frac{40 \times 24000}{100}$ =….9600f	» » : : …..

Problema núm. 9

Este problema, además de contener la incógnita principal, que es el *capital* productor de 150 francos de intereses, contiene una incógnita secundaria, cual es el *tipo del interés.* Por tanto, es preciso descomponerlo en dos partes, á saber:

1ª. ¿Cuál es el *tipo de interés?*
2ª. ¿Cuál es el capital productor de los 150f?

En cuanto al *tipo del interés,* como la primera parte del problema sólo contiene una incógnita, siendo conocidas las demás cantidades que atañen á ella, las dos siguientes proporciones nos darán la respuesta:

$$6000 : 100 : : 80 : m$$
(*) $$4 : 12 : : m : z$$
$$6000 \times 4 : 100 \times 12 : : 80 : z = \frac{100 \times 12 \times 80}{6000 \times 4} = 4$$ *(interés).*

La segunda parte del problema se hace ya sencilla, una vez que hemos encontrado el *tipo del interés;* pues se reduce la cuestión á buscar el *capital* que en 10 meses ha producido 150 francos, al tipo de 4 .% al año.

(*) Ver el art. 633.

(Apéndice)
p.29

En efecto:

$$\begin{array}{l} 4 : 150 \quad :: \quad 100 : m \\ \underline{10 : \ \ 12 \quad :: \quad m} \\ 4 \times 10 : 150 \times 12 :: \ 100 : x = \frac{150 \times 12 \times 100}{4 \times 10} = 4500 \end{array}$$ *(capital encontrado).*

(Nota. Por vía de verificación se puede buscar qué intereses dan 6000f en 4 meses, al tipo de 4 % al año, y qué intereses dan 4500f en 10 meses, al mismo tipo).

Problema num. 10

P.- Para resolver este problema hay que efectuar previamente tres operaciones, á saber: calcular desde luego los intereses de 2400f al 5 % al año; en seguida, calcular los intereses que produciría una $\frac{1}{3}$ parte de dicha suma al 6 %; y, por fin, los intereses que producirían las $\frac{2}{3}$ partes restantes al 4 $\frac{1}{2}$ %.

1ª. *Operación*

100 : 2400 : : 5 x = $\frac{2400 \times 5}{100}$ = ………………120f

2ª. *Operación*

Siendo la $\frac{1}{3}$ parte de 2400 f = 800 f, se tiene:

100 : 800 : : 6 : y = $\frac{800 \times 6}{100}$ = ……………………… 48f

(Apéndice)
p. 30

3ª. *Operación*

Las $\frac{2}{3}$ partes 2400 = 1600; por consiguiente:

100 : 1600 : : 4 $\frac{1}{4}$: z = $\frac{1600 \times 9}{100 \times 2}$ = …………………….. 72 120

Sumas iguales 120……120

Comparando, los resultados de una y otra hipótesis, resulta que son iguales, y que, por tanto, sólo habría que consultar la mayor ó menor seguridad que ofreciesen las manos en que hayan de colocarse los 2400 francos.

<39> pág. 383. *1er. Problema. (Este cálculo y los que le siguen corresponden con los problemas de las Pág,s* 383 *y* 384).

$$\begin{array}{l} 100 : 1800 :: \frac{7}{2} : m \\ \underline{\ 12 : \quad 9 :: \ m : x} \end{array}$$

x = $\frac{1800 \times 9 \times 7}{100 \times 12 \times 2}$ = 47 $\frac{1}{4}$. De ahí 1800 – 47$\frac{1}{4}$ = 1752 \$ $\frac{3}{4}$.

2º. *Problema. Solución* (por el método indirecto).

[NOTA.- El profesor hará que el alumno forme por sí las *razones* del caso, y si se viese embarazado, le recordará que, según el artículo 586, los dos términos de cada razón deben ser homólogos, dé idéntica naturaleza; de suerte que, en la primera razón, debe escribirse 100 : x, porque 100 representa el capital neto que sirve de *término de comparación,* así como x representa el capital neto *que se busca;* que, del mismo modo, en la segunda razón, el capital 100, más el beneficio que le ha cabido (esto es, 116, que debe estar frente á frente de 3161, representando el capital empleado con más la ganancia, como se ve en seguida]:

(Apéndice)
p.30

Razones

$\boxed{100 : x}$
116 : 3161

P.- Eso establecido, y recordando (art. 657) que, en el método indirecto, el término contrapuesto á X, es siempre el primer numerador del segundo miembro de la ecuación final, hay 'que poner desde luego

x = *capital tipo 100…*

En seguida, es preciso decir; «A esos 100 $ corresponden 116 del principal y ganancias reportadas en el negocio. Ahora conviene averiguar á qué porción del capital tipo corresponde 1 $ de estos 116. Para ello basta dividir 116 por 116, lo que da 1 por cociente; pero ¿á qué porción del capital tipo corresponde este 1? Dividiendo también el tipo 100 por el mismo número 116, se tiene $\frac{100}{116}$ (fracción que expresa el valor que 1 $ de hoy tenía al hacerse la compra); luego, multiplicando esta fracción por 3161 (que es el monto resultante del negocio), ha de obtenerse necesariamente el valor del capital primitivo, que es lo que se buscaba. Así;

$$X = \frac{\text{Capital empleado } 100 \times 31611}{116} = \ldots\ldots\ldots\ldots 2725$$

Comprobación

100 ; 2725 :; 16 : y

$$y = \frac{\text{ganancia } 2725 \times 16}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{436}$$

$x + y$ ……………3161

(Apéndice)
p.31

3er. *Problema. Solución:*

	Metros	francos	
12 X 25 = Suma 300		5400	
$\frac{2}{3}$ al contado ……………………………………………………			3600
$\frac{1}{3}$ á plazo…………………………………………………		1800	
intereses de 1800 al 6 %, en 3 meses ……………………………		27	
importe del pagaré …………………………………………………			1827
		Total del importe	5427f

4º. *Problema. Solución:*

Razonando y procediendo como en el 3er. Ejemplo, página 345, se tiene:

Capitales... $\boxed{100 \quad : \quad x}$

Restos…… 97.9375 : 6268 ,

97,9375 : 100 : : 6268 : x

$$x = \frac{\text{Monto } 100 \times 6268}{97{,}9375} = \frac{6268000000}{979375} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 6400\text{f}$$

Verificación:

$$100 : 6400 :: 5{,}50 : m$$
$$360 : 135 :: m : y$$

$$y = \frac{\textit{Descuento}\ 6400 \times 135 \times 5{,}50}{100 \times 360} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \underline{132}$$

recibido ………………………………………… .6268f

(Apéndice)
p.30

(¹) [Aquí es del caso afrontar una cuestión: *¿Por qué medio se ha llegado á formar los problemas concernientes á la* REGLA DE DESCUENTO, *de modo que satisfagan á la condición de dar un resultado exacto y no un cociente indefinido?* Ella no interesa á los alumnos que piensan dedicarse al comercio ó á la industria, porque los negocios mismos se encargarán de formularles los problemas en la práctica; mas no así por lo que toca á los preceptores, pues éstos tienen que ocuparse frecuentemente en inventar problemas para ejercitar á sus alumnos. Por otra parte, la cuestión no es tan sencilla que digamos; y como los tratadistas sobre Aritmética no han dado luz alguna sobre el particular (al menos que yo lo sepa), he creído útil con- signar aquí las siguientes

Indicaciones

1ª. Tratándose del *tipo de interés,* es conveniente que la cifra decimal termine por cero ó por 5, porque los factores 10 y 5 son componentes del número 360 (que tiene que figurar como divisor siempre que se trata de días).

2ª. Lo que principalmente importa es: *hacer que los números que expresan el* TANTO, *los días y el capital dado, contengan* (entre los tres) *todos los factores primarios de 360, hademos de los que quieran introducirse para que el capital llegue á ser del orden de miles, de decenas de mil, ó de un orden más elevado si se quiere:*

Tomando por ejemplo el problema que acabamos de resolver, veamos de qué modo han podido formarlo sus autores. Es muy posible que ellos lo hubiesen hecho por un procedimiento más sencillo; pero he aquí el que á mí me ha ocurrido

Las cantidades que se han tenido en vista son 5,50 por *tanto,* 135 por *días* y 6400 por *capital* ó monto.

Examinando desde luego qué factores primarios han entrado en el divisor, con arreglo al artículo 318, se tiene:

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Haciendo otro tanto con el multiplicador 5,50 (prescindiendo por un momento de la coma), se tiene:

$$550 = 2 \times 5 \times 5 \times 11.$$

De igual modo, el multiplicador 135 dá:

$$135 = 3 \times 3 \times 5.$$

Comparando los factores 4e los dos multiplicadores con los del divisor 360, resulta que en aquéllos faltan dos factores, es decir, 2 X 2.

Para subsanar esa falta, los introduzco en una cantidad cualquiera, que tomo á mi elección, para que sirva de capital, y que quiero que sea del orden de miles, pero divisible por 4 (= 2 X 2), por ejemplo 6400. Como este capital entraña los dos factores que me faltaban, queda

----

(¹) Nouveauté.

satisfecho mi propósito, ya que en las tres cantidades que representan el *tanto,* los días y el capital, tengo todos los factores indispensables para que su producto sea exactamente divisible por 360.

Hecho eso, busco los intereses que 6400 producen en 4 $\frac{1}{4}$ meses, al 5,50 %, y tengo 132.

Obtenidos esos intereses, los deduzco del capital, lo queda 6268, como resto.

Entonces formulo mi problema, que no es otro que el que acabamos de resolver.

Observación. En el ejemplo propuesto, las cantidades que representan el *tanto* y el tiempo, contienen evidentemente dos factores 3; pero, si uno quiere cambiar esas cantidades ¿cómo hará para que las nuevas cantidades tengan dos factores 3 y demás factores de 360?

Respuesta:

, Sabemos (art. 339) que cuando la suma de las cifras de una cantidad cualquiera es divisible por 9 (*ó* sea 3 X 3), la cantidad misma es divisible por 9. Según esa regla, para que la tasa contenga dos factores 3, no hay sinó que arreglar las cifras que uno quiera, pero de modo que ellas formen una suma de *9ó* de un múltiple de 9. Sea, por ejemplo, 4, 5 y 0, las cuales (reunidas) componen la cantidad de 450. Poniendo ahora una coma después del 4, se tiene 4,50 por *tanto.*

Igual cosa puede hacerse respecto al número de días; por ejemplo 1, 3 y 5, que hacen 135 días.

Conviene advertir que no hay necesidad de que los dos factores 3 se encuentren en el *tanto,* pues poniendo el uno en el *tanto,* puede introducirse el otro en los días. Ejemplo.

Interés 6,0 = 2 X 2 X 3 X 5 : 10 =…………….. 6.
Días 15 = 3 X 5 = ………………………….. 15.

Como en las dos cantidades precedentes falta uno de los factores componentes del divisor 360 (que es un factor 2), es de necesidad introducirlo en la cantidad que debe figurar como capital dado. Así se hizo respecto al *presunto* capital 6400 del problema que acaba de resolverse, el cual puede descomponerse de este modo: -6400 = 2 X 3200.

Cuando uno quiere que el interés *ó* los días terminen por 5, debe formarse la cantidad principiando por poner á la derecha 5, y colocar, á la izquierda de éste, las cifras que falten, pero de modo que la suma de todas tres forme 9 *ó* un múltiple de 9, por ejemplo:

(Apéndice) p.32

Si se quiere que el 5 vaya al fin del interés, pongo 405, y una coma después del 4; cantidad que puede descomponerse así:

4,05 = 3 X 3 X 3 X 3 X 5 : 10 =….. *interés* 4,05

Comparando estos factores con, los que entran en la composición del divisor 360 = 2 X 2 X 2 X 3 X 3 X 5,
veo que faltan en el interés tres factores 2, que los introduzco en la cantidad que ha de representar los días, ó distribuirlos entre los días y el capital. Para lo primero, tomo, por ejemplo, 40 = 2 X 2 X 2 X 5 = *días* 40.

Bien se comprende que en este caso, podría tomarse el capital *ad libitum;* porque, cualquiera que fuere, habiendo de ser multiplicado por los números que representan el interés y los días, el producto será necesariamente divisible por 360.

Finalmente, conviene advertir que, en la mayor parte de los casos, puede uno contentarse con formar el interés y los días, con los factores que buenamente le vengan á la idea, é introducir los demás en la cantidad que debe figurar como capital.

Cuando se quiere que en el problema no figuren días sinó tan sólo años y meses, ó meses puramente, la cuestión viene á ser mucho más sencilla, porque entonces el número que tiene de figurar como divisor es 12, cuyos factores primarios son 2 X 2 X 3.

NOTA: - Las anteriores indicaciones pueden facilitar la formación de problemas en lo concerniente á la *regla de tres,* á la *de interés,* etc.; pues, descomponiendo en factores primarios el número que haya de servir de divisor, bastará introducir estos factores en alguna ó algunas de las cantidades que tienen, de figurar como numeradores, para obtener un resultado preciso y no indefinido.]

5º. *Problema.- Solución* (por el método directo):

(Apéndice)
p.33

Razones

Capitales… 100 : 2130
Intereses… x : 31,95
Tiempos … 12 : 3.

P. Para mejor fijar en, la memoria los principios establecidos en la lección 40 respecto de la manera de establecer las proporciones, hagamos la aplicación de ellos á la presente cuestión. Combinando las dos primeras razones, y prefiriendo colocar la incógnita al extremo derecho (art. 609), pongo:

$$2130 : 100 :: 31,95 : m;$$

proporción perfectamente establecida, porque en ella (art. 609), cada antecedente es mayor que su consiguiente.

Que el valor de m es más pequeño que su consiguiente, está á la vista; pero, á mayor abundamiento, resolviendo la proporción, se tiene:

$$m = \frac{100 \times 31,95}{2130} = 1\ 05$$

Otra cosa es de que notar es: que aquí el Interés obra en sentido inverso del Capital (art. 647); y en efecto, se ve que, para un capital mayor que 100, como es 2130, hay que ,disminuir proporcionalmente la *tasa* del interés (art. 634).

Pasando á establecer la segunda proporción, pongo resueltamente (art. 643):

$$: : m : x.$$

Para llenar el vacío referente á los tiempos, hay que considerar previamente la importancia de los valores de m y de x.

(Apéndice)
p.34

Hice notar, poco há, que el valor de m, en la primera proporción, era feble [demasiado feble, pues que se refería á un capital mucho mayor que 100, prescindiendo de la acción del Tiempo]; ahora me cabe hacer notar que el valor de x, dependiendo del Tiempo, debe ser mayor que el de m, por cuanto que, en vez de 12 meses, han sido sólo 3 meses los que han producido 31,95 de intereses. Ahora bien, como en el caso actual la disminución del tiempo trae consigo el aumento del interés buscado (art. 634), se sigue qué x tiene que ser más grande que m; y que, por consecuencia, los términos referentes al tiempo deben colocarse de menor á mayor, esto es, 3 : 12; de suerte que la segunda proporción completa, viene á ser ésta:

$$3 : 12 : : m : x.$$

Haciendo ahora la multiplicación de las dos proporciones, resulta la siguiente ecuación:

$$X = \frac{100 \times 12 \times 31{,}95}{2130 \times 3} = \frac{100 \times 12 \times 3195}{2130 \times 3 \times 100} = 6$$ (*tipos del interés*).

Verificación

Veamos qué intereses producen 2130f, en 3 meses, al 6%:

$$\begin{array}{l} 100 : 2130 :: 6 : m \\ \underline{12 : \quad 3 :: m : x} \end{array}$$

$$X = \frac{2130 \times 3 \times 6}{100 \times 12} = \frac{639}{20} = 31{,}95$$ (*intereses*)

(Apéndice)
p.35

6º. *Problema. Solución*:

$$\begin{array}{l} 5 : \ 6{,}75 :: 100 : m \\ \underline{3 : 12 \quad :: \ m : \ x\ (*)} \end{array}$$

$$X = \frac{6{,}75 \times 12 \times 100}{5 \times 3} = 540$$ (*precio*).

Razones

capital ……………..	100 : x
Intereses…………..	5 : 6,75
Tiempos …………..	12 : 3

Verificación

Veamos qué intereses dan 540f en 3 meses, al 5 % :

$$\begin{array}{l} 100 : 540 :: 5 : m \\ \quad 12 : \quad 3 :: m : x\ (**) \end{array}$$

$$X = \frac{540 \times 3 \times 5}{100 \times 12} = 6{,}75$$ *(intereses).*

7º. *Problema. Solución:*

Haciendo la diferencia entre el monto de la compra y el dinero que se ha satisfecho al contado, resulta:

900 - 852 = 48 (*descuento)*

De este modo, la cuestión se reduce á *buscar en cuánto tiempo 900* r *debían producir* 48 *de interés,* que es lo que importa el descuento.

Razonando y operando como en la 4ª. *Cuestión* (art. 629), se tiene:

$$\begin{array}{l} 900 : 100 :: 12 : m \\ \underline{\quad 8 : \ 48 :: \ m : x} \end{array}$$

$$X = \frac{100 \times 48 \times 12}{900 \times 8} = \frac{40}{5} = 8$$ (*meses*)

(Apéndice)
p.36

(*) x debe ser más grande que m porque, en el presente caso, la disminución de tiempo trae consigo el aumento del capital (art.696).

(**) x debe ser más pequeña que m, porque en la primera proporción se ha supuesto que el capital ha estado colocado durante un año, siendo así que no ha estado sino 3 meses; fuera de que el interés obra aquí en el mismo sentido que el tiempo (art. 646)

Verificación:

Cambiando de incógnita, veamos *qué intereses producen 900f en* 8 *meses, al 8.%:*

$$100 : 900 :: 8 : m$$
$$\underline{12 : \quad 8 :: m : z}$$
$$z = \frac{900 \times 8 \times 8}{100 \times 12} = 48 \textit{ (intereses)}$$

8º. *Problema. Solución*:

Procediendo como en el *ejemplo* 3º. (pág. 345), se tiene:

4f (descuento del capital 100 en un año)
2f (íd. en seis meses)
100 -2 = 98 (diferencia).

98 : 1764 : : 100 : $x = \frac{176400}{98}$ = 1800f *(precio).*

9º. *Problema.* (Este problema no pertenece propiamente ni á la *Regla de descuento* ni á la *Regla de interés,* pues que el Tiempo no entra para nada. Es simplemente del resorte de la *Regla de tres,* como vamos á verlo).

(Apéndice) p.37

Solución:

Puesto que la mercadería se vendió en 708f, y ha habido un a ganancia de 108 f, el capital empleado fué 708 -108 = 600.

Ahora bien, según la *Regla de tres,* diríamos: «*Si á 600 de capital han correspondido 108 de ganancia, á 100, cuánto corresponderá?,* ó bien, en términos de rigurosa proporción:

$$600 : 100 : : 108 : x = \frac{100 \times 108}{600} = 18 \textit{ (por 100).}$$

Verificación:

Dando por incógnita la ganancia total, y sabiendo que ha habido una utilidad de 18 por ciento, busquemos aquélla:

$$100 : 600 \times 18 : y = \frac{600 \times 18}{100} = 108 \textit{ (ganancia)}$$

10º. *Problema,* [Este problema tampoco es del resorte de la *Regla de descuento,* estrictamente considerado. La *Regla de descuento* (que no es sinó una variedad de la *Regla de interés)* requiere que se pongan en juego tres elementos: el *capital,* el i*nterés* y el *tiempo;* y, como en la presente cuestión, el *tiempo* no hace papel alguno, se sigue que ella es de la incumbencia de la *Regla de tres simple.* Sin embargo, los señores Dumouchel y Dupuis, le han dado cabida entre los problemas de aquel género, sin duda por la analogía que con ellos tiene y como un buen ejercicio para que el alumno se fortalezca en la materia. Debe ser, por las razones expuestas, que dichos señores han llamado á la disminución no *descuento* sino *rebaja*]

(Apéndice) p.38

Solución:

Razonando como en la *Solución* deL 3er. *Ejemplo,* pág. 345, se tiene:

100
<u>- 7,50</u> *(de rebaja)*
92,50 : 100 :: 277,50 : $x = \frac{100 \times 27750}{9250}$ = 300f

Así obtenido el valor del precio total, para encontrar el número de kilogramos pedido por el problema, bastará dividir 300 f (precio total) por 2 f, 50 (precio de un kilogramo), pues el resultado dará la cantidad buscada. En efecto:

300 : 2,50 = 30000 : : 250 = …. *(Kilogramos)* 120.

NOTA.- Como verificación, se puede resolver también el problema por medio de dos proporciones, representando por m (en la primera proporción) el *valor* de la mercadería en bruto, como incógnita accidental, y por x (en la segunda proporción) el *número de kilógramos* en bruto, á saber:

$$\begin{array}{l} 92{,}50 : 277{,}50 :: 100 : m \\ \underline{2{,}50 : \quad m \quad :: \quad 1 : x} \end{array}$$

De ahí:

$$x = \frac{277{,}50 \times 100}{92{,}50 \times 2{,}50} = 120 \text{ k.}$$

(Apéndice) p.39

<40> [*Corresponde con la pág.* 388, art. 670].

¿Cómo se ha encontrado ó formado el número 3015, para que el resultado de la repartición sea exacto? -Ya se tocó esta cuesti6n en las *Indicaciones* de este Apéndice (pág. 32 y siguientes); pero he creído conveniente tratarla ahora con alguna más detención, no por la importancia que ella tenga para los alumnos, lo repito, sinó para ayudar de algún modo á aquellos de los Preceptores que pudieran verse atascados al formular un problema nuevo, como á mí me ha pasado frecuentemente en algunas de las anteriores Lecciones, sin poder salir del atolladero sino después de haber andado como á tientas, tocando ya éste, ya aquel otro medio, hasta que mi perseverancia y la suerte, por decirlo así, me han sacado del paso. Falto de una obra de consulta sobre la materia, y librado á mis propios esfuerzos, he tenido mucho que pensar y reflexionar para haber de expedirme. Oí por fin con el secreto (que ya lo he revelado en parte en las *Indicaciones* arriba mencionadas); mas, para llenar cierto vacío que posteriormente he notado en la explicación que di entonces, creo del caso decir aquí algo más, por vía de complemento, contrayendo mi atención al ejemplo últimamente propuesto.

Lo esencial es, como ya lo dije, preparar las cantidades que han de funcionar como numeradores en la ecuación final, de modo que su producto contenga todos los factores del número ó números que hayan de servir de denominador. Así, por ejemplo, en el 4º. *Problema* se arreglaron las cosas de modo que, entre la tasa del interés, el tiempo y el capital dados (que debían funcionar como numeradores) contuviesen todos los factores primarios del divisor 360. Más, sucede al presente que, si bien se examina, la cantidad representante del capital debe contener, por sí sola, los factores del divisor. A esto hay que agregar otra y otras consideraciones, que voy á poner de manifiesto prácticamente. (Apéndice) p.40

Supongo que alguien me dice: «*Quiero que el capital no pase del orden de centenas.*»

—Bien (digo yo); agregando un *cero* al número 15, tengo 150, que siendo múltiple de 15, ha de ser divisible por 15.

—«*Pero* (se me observa), *el número 150 es muy pequeño para capital; yo quiero que se halle comprendido entre 300 y 400.*»

En hora buena (respondo). Para satisfacer á la exigencia, doblo desde luego la cantidad 150, y tengo 300; en seguida, para ahorrarme la pena de estar buscando á tientas cuánto convendría agregar á 300, y recordando el principio que dice: «*cuando dos cantidades son divisibles, cada cual, por un cierto número, la suma de ambas cantidades es también divisible por ese número*» (art. 374), tomo el mayor múltiple de 15, dentro de los límites de 300 á 400, que es 6 veces 15 = 90, y tengo así 300 + 90 = …………390.

— *Exijo ahora* (se me dice), *que el capital sea del orden de* MILES.»

Para satisfacer á la nueva demanda, agrego á 15 dos ceros, y tengo 1500.

—« *Pero esa cantidad es muy pequeña para mi propósito»* (se me arguye).

—Pues bien (respondo), multiplicando 1500 por 4, por ejemplo, queda usted servido.

—«*Es que 600 es cantidad que excede á mí deseo y tiene además el inconveniente de formar un número demasiado redondo*»…

—Ya comprendo: Usted quisiera una cantidad mucho más pequeña y además que ella tuviese sus decenas salientes y su pico de unidades simples; voy, pues, á complacerlo, Según el art. 374, «*citando el restando y el restador son divisibles por cierto número, la diferencia es también divisible por ese número.»* Fiado en este principio, en vez de buscar á la aventura un restador que satisfaga á la condición, tomo 15, le agrego dos *ceros* y lo multiplico además por 4 (podría multiplicarlo por cualquier otro número, bien entendido que el producto, siendo múltiple de 15, sería forzosamente divisible por 15), y tengo 1500. En seguida, sustraigo 1500 de 6000, y tengo 4500, Para que haya decenas y unidades simples, agrego 15 á 4500, y tengo en resumen: (Apéndice) p.41

13 X 100 X 4 = 6000
15 X 100 = 1500
Resto = 4500
+ 15
4515 *(capital formado).*

Con las explicaciones que acaban de darse, se comprenderá fácilmente cómo se formó el capital 3015 del Ejemplo que nos ha ocupado. En efecto:

15 X 100 = 1500
1500 X 2 = 3000
3000 + 15 = 3015

Por análogas operaciones, se podrá, obtener fácilmente una cantidad que satisfaga á las condiciones requeridas, sea en el rango de centenas, sea en el de miles, etc.

<41> [*Corresponde con la pág. 390, art.* 672].

Otra vez más la cuestión de formar un problema que dé un resultado exacto, sabido ya que el numerador de la ecuación final debe ser un múltiple del divisor (89 en el ejemplo que nos ocupa).

Suponiendo que alguien preguntase: ¿«*por qué número multiplicaron los SS. Dumouchel y Dupuis el divisor* 89 *para formar el capital* 445», respondería que por 5; porque, dividiendo 445 por 89, se tiene 5 por cociente, y de ahí 89 X 5 = 445.

Otra hipótesis: supongo que no habiéndose dado el capital 445, se trata ahora no más que de formular el problema, bajo condición de que el capital ha de ser del orden de centenas, pero un término medio entre 100 y 900.

(Apéndice) p.41 Para satisfacer á la exigencia recurro á mi caballo de batalla, esto es, aumento un cero á 89, y tengo 890; mas, como esta centena es demasiado grande, y se quiere que sea un término medio, tomo la mitad de 890, y tengo 445, de que quiero servirme como restador, porque contiene al factor 89.

Para hacer palpable esta verdad, descompongamos el restando y el restador en factores primarios:

restando…….. 890 = 2 X 5 X 89
Restador……. 445 = 5 X 89

Comparando los factores de arriba con los de abajo, resulta que ambas cantidades contienen al factor 89 y que, siendo la diferencia = 445 (que me propongo tomar como capital) es también divisible por 89, que, en el proyectado problema, había de figurar como divisor.

<42> [*Corresponde con la pág.* 393, *Programa*]

1*er. Problema. Solución:*

Razonando y operando como en el 1er. *Ejemplo,* se obtiene como resultado: x = 13; y = 16,25; z = 19,50. 11 $x + y + z$ = 48, f 75.

2º. *Problema. Solución:*

Procediendo del mismo modo que en el problema anterior, se encontrará que, representadas las agrupaciones por $x, y, z,$ les corresponderá: á x 2100 f; á y 2625 f y á z 3150= $x + y + Z$ = 7875 f.

3er. Problema.
Observación. Como el difunto ha dado más de lo que tenía, es menester distribuir el valor de sus bienes proporcionalmente á los nú*meros* $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Solución:
La del amigo =….. 15000f
La del hijo = …….. 20000
La de la viuda=….. 22500
Suma = 57500f

(Apéndice) p.42

4º. *Problema. Solución:*

El aturdido de 14 años deberá pagar …..21 f
El » » 16 » » » …..24
Suma = 45f

5º. *Problema. Solución:*

Empezando por calcular cuánto importan los gastos de sucesión á 2 $\frac{1}{2}$ %, encuentro 540 f, que los sustraigo de 21600; quedan 21060 para ser distribuidos entre los sobrinos y las sobrinas, con arreglo á la voluntad del testador.

Designando á los dos sobrinos por x y $y,$ y á las dos sobrinas por z y $w,$ procedo del mismo modo que en los anteriores problemas, esto es, pongo: $x = 1$, $y = \frac{2}{1}$, $z = \frac{6}{2}$ $w = \frac{24}{6}$. En seguida formo el más pequeño común denominador, que aquí es 6.

Reduciendo esas fracciones al común *denominador, resulta:* - $\frac{6}{6} + \frac{12}{6} + \frac{18}{6} + \frac{24}{6}$ = (6 + 12 + 18 + 24): 60.

Así preparado el cálculo, planteo la primera proporción, que me dará el valor de $x,$ á saber:

60 : 6 :: 21060 : x = 6 X $\frac{21660}{6}$ (*) = ……….. 2106
y = 12 X 351 = ……………... 4212
z = 18 X 351 = ……………. 6318
w = 24 X 351 = …………….. 8424
21060
Por gastos de sucesión 540
Total = 21600

(*) *Nótese* que, teniendo que figurar la expresión fraccionaria $\frac{21060}{60}$ en cada uno de los valores de las incógnitas, se ahorra tiempo reduciendo la expresión fraccionaria á su expresión más simple que es $\frac{21060}{60}$ = 351; con lo que la operación se reduce á multiplicar por 351 el número correspondiente á cada participe, como se ve en seguida.

(Apéndice)
p.43

<43> [*Corresponde con la pág.* 402]

1er. *Problema. Solución:*

Procediendo con arreglo al 5,° *Ejemplo* (pág. 397, art. 685), se obtiene:

45000 : 24000 :: 3600 : x = 24000 X $\frac{3600}{4500}$ = 24 X $\frac{2}{25}$ = …1920

y = 21000 X 25 = …………………..1680

Total de beneficios= 3600

2º. *Problema. Solución:*

Hecho el descuento que se . ve á la derecha, y proce. diendo en seguida como en el 5,° Ejemplo, arriba citado, se tiene:	Beneficio total……… 18450 Prima ………………. 1476 Beneficio neto… 16974

369000 : 300000 :: 16974 : X = $\frac{300000}{369000}$ X 16974 = 13800

y = $\frac{20}{123}$ X 16974 = 2760

z = $\frac{1}{41}$ X 16974 = 414

\+ la prima = 1476

Beneficio total = 18450

3er. *Problema. Solución*:

Como este problema es análogo al 5°. Ejemplo, se puede proceder del mismo modo, empezando por reducir los tiempos á la unidad, á saber:

Siendo 5 meses el tiempo del primer asociado y triple su capital, en 1 mes, su capital 3 debe ser multiplicado

por 5, esto es, 3 X 5 = ……………………………..15

Siendo 10 meses el tiempo del segundo, en un mes, su capital 1 debe ser multiplicado por 10, es decir, 1 X 10=……………………………………. 10

Suma = 25

(Apéndice)
p.44

Hecho ese arreglo, puede plantearse, respecto al primer asociado, la siguiente proporción:

25 : 10 :: 800 : x = ……………….. 480

Respecto al segundo, esta otra proporción:

25 : 10 :: 800 : y = ……………….. 320

Comprobación …… 800

4°*. Problema. Solución:*

Suma de capitales ……… 32760

Exceso del de el 1º……… 15980

Quedan.. 16780, de los que corresponde á cada socio $\frac{1}{2}$.

Capital del 1°. …… 8390 + 15980 = 24370 f

» » 2º……………………… = 8390

Beneficio del 1º……………… $\frac{24370}{4}$ = 6092,50

» » 2º…………………………………… $\frac{8390}{4}$ = 2097,50

5°. *Problema. Solución:*

Beneficio total =………………………………………….. <u>2250</u>
Beneficio del 1°. 625; íd. del 2°. 750 = ……………….. 1375
Id. del 3°. (sustrayendo del total lo recibido
por el 1°. y 2°.*)*………………………………………… <u>875</u>

2250 : 625 :: 18000 : $x = 625 \text{ X } \frac{1800}{2250} = 625 \text{ X } 8 = 5000$ f

(Apéndice) p.45

y = 750 X 8 …………… 6000f
z = 875 X 8 = ………….. <u>7000f</u>
Suma de capitales = 18000f

6º. *Problema. Solución:*

Procediendo y discurriendo como en el 5º. *Ejemplo,* se tiene:

Capital del 1º. 20000 X 3 = 60000
» » 2º. 25000 X 4 = 100000 } Suma 160000: *Beneficio total* = x.
60000 : 160000 :: 4687,50 : x

$$x = \frac{160000}{60000} \text{ X } 4687{,}50 = \frac{8}{8} \text{ X } 4687{,}50 = 12500\text{f}$$

7º. *Problema. Solución:*

Importe de la herencia …………. <u>90000</u>
Recibido por el 1er. heredero 24000
» » » 2º. » 30000
Toca al 3er. heredero …………. 36000

Pensión anual = 600f

90000 : 24000 :: 600 : $x = \frac{24000 \text{ x } 600}{90000} =$ ……………………………….160

$y = \frac{30000 \text{ x } 600}{90000} =$ ………………………………. 200

$z = \frac{36000 \text{ x } 600}{90000} =$ …………………………………240

<45> [*Corresponde con la pág.* 411. *Problemas.*]

1er. *Problema. Solución (con sujeción al 1er. Ejemplo):*

96 litros de vino puro, cuestan 96 X 0,90 = 86f 40
12 litros agua } 108 lits. de mezcla valen
<u>96</u> » vino } 1 litro » » vale
Suma 108

Verificación: 108 litros de mezcla, á 0f80, dan 108 X 0,80 = 86f,40.

2º. *Problema.* *Solución:*

Con arreglo al 1er. *Ejemplo* (pág. 366), kilo del té mezclado, vale 6f, 48. (Apéndice) p.45

3er. *Problema.*- Con arreglo al mismo *Ejemplo,* cada litro
de trigo mezclado vale 0,375, y 1 decálitro
vale…………………………………….. 3,75
Los 5 decálitros de mezcla, valen…… 18,75

4º. *Problema.* *Solución:*

Procediendo como en el 4º. *Ejemplo,* se obtiene sucesivamente:

1 litro de trigo mezclado, vale $\frac{37,50}{100}$ = 0f,375.

En 3 litros, mezclando 1 litro de cada clase, se nota que habría 0f,100 de pérdida, y 0f,025 de ganancia.

Mezclando 1 litro de 1ª. clase, 2 litros de 2ª. y 5 litros de 3ª. (= 8 litros), las pérdidas y ganancias quedan compensadas.

Por otra parte, 1 litro de 1ª. clase viene á ser $\frac{1}{8}$ parte de la mezcla, 2 litros de 2ª. clase, $\frac{2}{8}$ de la mezcla, y 5 litros de 3ª. clase, $\frac{5}{8}$ de la mezcla.

Luego; $\frac{1}{8}$ de 100 litros ………………= 12ˡ50

$\frac{2}{8}$ » 100 » …………………. = 25,

$\frac{5}{8}$ » 100 » …………………. = 62,50

1 hectólitro ……………………. 100 litros.

1 hectólitro (= 100 litros) de trigo mezclado, á 0f,375, vale 37f ,50.

5º. *Problema.* *Solución:*

Procediendo como en el 3er. *Ejemplo,* se obtiene:

80 lits. de vino + 20 lits. de agua = 100 lits. = 1 hect6litro.

Verificación: 80 litros de vino, á 0f,75, valen 60f = 100 litros mezcla, á 0f 60, valen 60f.

(Apéndice)
p.45

6º. *Problema. Solución:*

Procediendo como en el 3er. *Ejemplo,* se obtiene:

Del 1er. vino, X 42 = 6 litros.

» 2º. » X 42 = 18 »

» 3er. » X 42 = 18 »

42 litros.

7º. *Problema.* *Solución:*

Como en esta mezcla sólo hay que tener en cuenta el precio del vino (pues se supone que el agua nada cuesta), lo que debe averiguarse es — cuántos litros de vino corresponden á 33f, 75, al precio indicado; — lo que se obtiene por una simple división, á saber:

$\frac{33,75}{0,50}$ = $\frac{675}{10}$ = 67,50 (*litros de vino).*

Sustrayendo de 75 litros *mezclados,* los 67ˡ, 50 de vino, resulta:

75ˡ - 67ˡ ,50 = 7,50 *(litros de agua*).

Nota.- Por vía de verificación, puede buscarse (con arreglo al 1er. *Ejemplo)* el precio de cada litro de la mezcla, y cerciorarse en seguida de si el producto de los 75 litros vendidos al precio así encontrado, dan exactamente los 33f ,75 que costó el vino.

8º. *Problema.* *Solución:*

	Vino	agua	mezcla
A contiene …	24	12	36
B contiene….	30	18	48

Capacidad de C ……….= 14

» » D ………. = 14

Capacidad de C + D …. = 28

(Apéndice) p.46

Después de haber llenado los vasos C y D, la proporción de agua y de vino que contenga cada uno, será la siguiente:

$$A \begin{cases} 36 : 24 :: 14 : \frac{24 \times 14}{36} = \frac{28}{3} \text{ litros de vino.} \\ 36 : 12 :: 14 : \frac{12 \times 14}{36} = \frac{14}{3} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} 48 : 30 :: 14 : \frac{30 \times 14}{48} = \frac{70}{8} \text{ litros de vino.} \\ 48 : 18 :: 14 : \frac{18 \times 14}{48} = \frac{42}{8} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

Luego, la proporción entre el vino y el agua que ha quedado:

$$\text{en A, será……} \begin{cases} 24 - \frac{28}{3} = \frac{44}{3} \text{ litros de vino.} \\ 12 - \frac{14}{3} = \frac{22}{3} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

$$\text{En B, será ……} \begin{cases} 30 - \frac{70}{8} = \frac{170}{8} \text{ litros de vino.} \\ 18 - \frac{42}{8} = \frac{102}{8} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

Con estos resultados, ya será fácil resolver el problema, pues para esto no hay más que agregar al resto que quedó en A, el contenido de D, y entonces:

$$\text{A tendrá} \begin{cases} \frac{44}{3} + \frac{70}{8} = 23 + \frac{10}{24} \text{ litros de vino.} \\ \frac{22}{3} + \frac{42}{8} = 12 + \frac{14}{24} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

Echando en B el contenido del vaso C,

$$\text{B tendrá} \begin{cases} \frac{170}{8} + \frac{28}{3} = 30 + \frac{14}{24} \text{ litros de vino.} \\ \frac{120}{8} + \frac{14}{3} = 17 + \frac{10}{24} \text{ » » agua.} \end{cases}$$

con lo que queda resuelto el problema.

(Apéndice) p.47

<46> [*Corresponde con la pág.* 422, *Problemas*].

1er. Problema. *Solución:*

1 k. de cobre vale 1,f 50
90 k. de……………… cobre valen 1,50 X 90 = 135f
1 k. de estaño vale 2,f 50
10 k. de……………… estaño valen 2,50 X 10 = 25f
100 k. de……………… bronce valen 160f

Luego, 1 k. de………………… bronce vale $\frac{160}{100}$ = 1f60.

2º. *Problema. Solución, (Véase el 1er. Ejemplo, pág.* 366).

Precio de.1 k. de aligación = 1, f20

3er .*Problema. Solución:* tiene = 0g,900. *(Ver el 1er. Ej.)*

4º. *Problema. Observación:* Este problema, aunque tiene la apariencia de una *aligación,* pertenece en realidad á la *Regla de tres simple.*

En efecto; tomando por término de comparación 100 k. de latón, hay que decirse: «Si 100 k. de latón contienen 75 k. de cobre y 25 k. de zinc, ¿cuántos k. de cada especie contendrán 12 k. de latón?

Solución:

100 : 12 :: 75 : x = $\frac{12 \times 75}{100}$= …..……….9 k. de cobre.

» : » :: 25 : y = ……… = $\frac{12 \times 25}{100}$ = 3 k. *de zinc.*

5º. *Problema.*

(Cabe aquí la misma observación que se ha hecho respecto al precedente problema).

(Apéndice)
p.48

Solución:

90 partes + 10 = 100 partes.
100 : 90 : : 160: x = 144 *de cobre.*
y = 16 *de estaño.*

6º. *Problema. Solución*:

Tomando por término de comparación 100 k. de latón, en que han entrado el cobre y el zinc en razón de 75 á 25, se tiene:

100 k. de latón valen 100 X 1,40 = 140 f
25 k. de zinc » 25 X 1,10 = - 27,f50
75 k. de cobre » …………… 112,f50 *(importe del cobre)*

1 k. de » $\frac{112 \times 50}{75}$ = 1,50.

7º. *Problema.* *Solución:*

Haciendo el cómputo con sujeción al 4º. Ejemplo de la *Regla de aligación,* se encuentra que es menester poner 90 g. del 1er. tejo y 60 del 2º. para formar una aligación que tenga la ley de 0,840. Eso establecido, sólo resta por averiguar cuántos gramos del 1er. tejo y cuántos del 2º. deben entrar en 1 kilóg. (6 sean 1000 g.). Consultando al efecto el 1er. Ejemplo de la *Regla de partición,* se tiene:

150 : 1000 : : 90 : x = 600 g. *(del 1er. tejo*).
» » : : 60 : y = 400 g: *(del 2º. tejo*).
1000 g. =.1 kilógr.

8º. *Problema.* *Solución:*

Procediendo como en el 6º. Ejemplo, se encuentra que, por 10 g. del tejo hay que poner 6 g. de oro puro.

(Apéndice) p.48

9°. *Problema.* *Solución:*

Hay quehacer dos operaciones, á saber:

1ª. *Operación:* buscar en qué proporción deben mezclarse el tejo y el oro puro para obtener una aligación de ley de 0,920. Operando como en el 6°. Ejemplo, se encuentra que el tejo y el oro puro deben entrar en razón de 80 g. del tejo por 20 g. de oro puro.

2ª. *Operación:* buscar cuántos gramos de oro puro es preciso agregar á 1000 g. (= 1 kilóg.) del tejo, para elevar su ley á 0,920 ; cuestión de una simple regla de tres. En efecto: «Si para 80 g. del tejo se necesitan 20 g. de oro puro, para 1000 g. del mismo tejo ¿cuánto se necesitará? »

80 : 1000 : : 20 : x = 250 g. *(de oro puro)*.

10. *Problema.* *Solución:*

Procediendo con sujeción al 8°. Ejemplo, se encuentra que: por 80 g. de la barra de plata se deben poner 10 g. de cobre. En seguida, para saber cuántos gramos de plata y cuántos de cobre deben entrar en 1800 g. de aligación, hay que establecer las siguientes proporciones:

90 : 80 :: 1800 : x = 1600 g. (*de la barra*).
» : 10 :: » : y = 200 g. (*de cobre).*
Suma = 1800 g.

11. Operando como en el 7°. Ejemplo, se encuentra: que, á 3000 g. (= 3 kilógr.) del 1er. tejo, es menester agregar 1500 g. del 2°.

12. *Problema.* *Solución:*

Empezando por reducir á la unidad cada una de las barras, resulta que:

(Apéndice) p.49

La 1ª. tiene de peso 360 + 90 = 450 g.; de éstos son en plata 360; por consiguiente, 1g. = $\frac{360}{450}$ = en plata 0,800.

La 2ª. tiene de peso 486 + 54 = 540 g.; de éstos son en plata 486; por consiguiente, 1 g. = $\frac{486}{540}$ = en plata 0,900.

La nueva barra debe pesar… 200g. y contener en plata 175; por consiguiente, 1g.= $\frac{175}{200}$ = en plata 0,875.

La cuestión se convierte entonces en esta otra: *Teniendo dos barras de plata, la 1ª. De ley de 0,800; y la 2ª.de 0,900, formar una nueva barra de 200 g. de peso y que contenga 0,875g. de plata, por gramo.*

Procediendo como en el 4º. Ejemplo, se encuentra: que pueden tomarse 25 g. de la 1ª. barra por 75 de la 2ª. ó bien 5 de la 1ª. por 15 de la 2ª.

Ahora, quedándonos á la última de las razones (5:15), podemos establecer las siguientes proporciones:

20 : 200 :: 5 : $x = \frac{200 \times 5}{20}$ = 50 g. *(de la 1ª. barra).*

» : » :: 15 : $y = \frac{200 \times 15}{20}$ = 150g. *(de la 2ª. barra).*

<47> [*Corresponde con la pág.* 468, *arto* 744].

Se la ha llamado *Conferencia extraordinaria, á* fin de que no se confunda con la conferencia ó conferencias ordinarias que debe dar el preceptor después de cada Lección, según lo estime conveniente.

<48> [*Corresponde con la pág.* 474. *Problemas*]

1er. *Problema.* *Solución:*

Procediendo como en la *8ª. Cuestión,* (pág. 451), y fijándose en que la diferencia de valores entre 1 billete de 5 y 1 billete de 20 es 15, se tiene sucesivamente: 125 X 5 = 625 ll 1000 - 625 = 375 ll 375 : 15 = 25.

Es decir: 25 billetes de á 20 y, por consiguiente 100 billetes de á 5.

Apéndice

1º. bis. *Con 20 pesos se quiere comprar 20 animales de diversas especies.*

Si bien se se examina, el actual problema sólo difiere del anterior, en que el presente contiene tres incógnitas en vez de dos que aquél tenía; por tanto, todo lo que hay que hacer es: poner para el cálculo tres casillas verticales correspondientes á las tres clases de animales, y razonar como sigue:

	cordero	gallinas	conejos	importe
El número de corderos no puede llegar á 5, porque 4 X 5 = 20. $, y nada quedaría para gallinas y conejos. Tomo, pues, 4 corderos, que importan 16 $. ……………………………..	4	…….	……	16 $
Con los 4 pesos restantes no podría tener 16 animales, entre conejos y gallinas ; luego el número de corderos es excesivo. Entónces tomo 2 corderos que importan 8 $ …………………….	2	…….	……	8 $
Pero veo que los 12 $ restantes no sería posible emplearlos íntegramente en gallinas y conejos, porque sobraría dinero; pues aún en el caso de tomar los 18 animales, que faltan completo de 20 en gallinas solamente (lo que no sería admisible), aquéllas sólo importarían 9 $ ………………………………..	……..	18	……	9 $

Peor sería si, en cambio de una gallina, se pusiera un conejo, porque este cambio haría disminuir el importe. En efecto: 17 gallinas y 1 conejo no importarían más de 8 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ *Pesos.* Luego el número de corderos es muy pequeño:

Tomo, pues, 3 corderos y 17 entre gallinas y conejos, como suena esta última expresión………………………	3	10	7	$12+5+1\frac{3}{4}$

En este estado las cosas, noto: que el número de animales está completo, y que en la suma de los importes sólo hay un déficit de 5 pesetas 6 sean $\frac{5}{4}$ de peso. Entonces, sin ir más lejos, doy por resuelto el problema. En efecto: como en el cambio de un conejo con una gallina, se ha ganado $\frac{1}{4}$ de peso, es claro que, cambiando

á la vez 5 conejos con otras tantas gallinas, quedará totalmente compensado el déficit, según sale al margen ………………………	2	15	2	$12+7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

Verificación:

$$3 + 15 + 2 = 20 \text{ } \textit{animales.}$$

$$12 + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 20 \text{ } \textit{pesos.}$$

2º. *Solución:*

Agregando á la suma dada la diferencia dada, se tiene 643 + 220 = 860. Bien examinado el caso, se viene en conocimiento de, que, por el hecho de esta agregación, se ha doblado el valor del número mayor (que en la presente cuestión puede ser considerado como primer sumando y, á la vez, como restando), porque la diferencia 220 no es otra cosa que la cantidad que falta al segundo sumando para ser igual al primero. Hay en 860 dos sumandos, igual cada uno de ellos al número mayor que se busca; por consiguiente, tomando la mitad de 860, se obtendrá necesariamente ese número. Así:

Apéndice

$$\frac{1}{2} \text{ de } 860 = 430 \text{ (} \textit{número mayor).}$$

Una vez encontrado el número mayor, bastará sustraerlo de la suma dada, para obtener el número menor. En efecto:

$$640 - 430 = 210 \text{ (} \textit{número menor).}$$

La verificación es muy sencilla.

3º. *Solución*:

Procediendo como en la 8ª. cuestión (pág. 393), y fijándose en que la diferencia de una á otra clase de asiento es 0f,50 ó sea $\frac{1}{2}$ se tiene:

asientos de á 2 f = 8
» de á 1 f ,50 = 10.

4º. *Solución:*

Si A, en 16 días, hace 1 *(la obra entera.)*, en 1 día hará $\frac{1}{16}$ de la obra.
» B, en 12. » » 1 » en 1 » » $\frac{1}{12}$ »
» C, en 20 » » 1 » en 1 » » $\frac{1}{20}$ »

Haciendo la suma del trabajo de los tres obreros reunidos., se tiene:

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{15 \times 20 \times 12}{240} = \frac{47}{240}.$$

Den.r com. = 4 x 5 x 4 x 3 = 240.

$\frac{47}{240}$ *: 1 (la obra entera) :: 1 (día) : x = 1 :* $\frac{47}{240}$

$$= 1 \times \frac{240}{47} = 5 + \frac{5}{47} \text{ días.}$$

Verificación:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{A, en un día, hace } \frac{1}{16} \text{ de la obra; en } 5 + \frac{5}{47} \text{ de día hace} & \frac{1}{16} \times \frac{240}{47} & = 15 \\
\text{B,} \quad » \quad \frac{1}{12} \quad » \quad \text{en} \quad » \quad » & \frac{1}{12} \times \frac{240}{47} & = 20 \\
\text{C,} \quad » \quad \frac{1}{20} \quad » \quad \text{en} \quad » \quad » & \frac{1}{20} \times \frac{240}{47} & = 12
\end{array}\right\} 47$$

Ahora bien, $\frac{47}{47}$ = 1 *(la obra entera).*

5º. *Solución:*

Procediendo como en la 14ª. *Cuestión* (pág. 399), y teniéndose en cuenta que la diferencia entre los tipos de interés es 5,25 - 4,75 = 0,50 = $\frac{1}{2}$ de unidad, se obtiene:

800 X 4,75 = 3800
4050 - 3800 = 250 f
250 : $\frac{1}{2}$ = 500 *(centenas colocadas*: *á* 5,25).

Por consiguiente, 800 -500 = 300 *(centenas colocadas á* 4,75).

Fácil es de comprobar este resultado.

6º. *Solución:*

Ella se reduce á buscar dos números (cualesquiera que sean) tales que $\frac{1}{3}$ del uno sea igual á $\frac{1}{4}$ del otro, para servir de términos de comparación, y proceder en seguida como en la *Regla de partición,* 2º. Ejemplo, pág..350.

Sean los números 9 y 12 :

$\frac{1}{3}$ de 9 = 3

$\frac{1}{4}$ de 12 = 3

Haciendo la suma de estos dos números, se tiene:

9 + 12 = 21

Llamando x al primer destacamento y m al segundo, vienen las siguientes proporciones:

21 : 9 :: 525 : $x = \frac{9 \times 525}{21}$ = 225 (1er. *destacamento).*

21 : 12 :: 525 : $m = \frac{12 \times 525}{21}$ = 300 *(2º. destacamento).*

7º. *Solución:*

Tomando por incógnita el número de soldados alojados en el *4º.* piso, se puede traducir el problema de este modo:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{4º. y 2º. pisos} = x + 3x \\
\text{1º. y 3º.} \quad » \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = 1800.$$

Pero ¿cuántas x importan los del 1º. y 3er. pisos? Vamos á verlo.

El 2.° y 4.° pisos contienen 4 x, y, según la enunciación, este valor sólo alcanza á $\frac{4}{5}$ partes del 1.° y 3.° reunidos: luego, el valor de estos últimos debe subir á 5 x (porque 4 x son justamente $\frac{4}{5}$ de 5 x).

Ahora, llenando el vacío que se ha dejado en la ecuación de arriba, se tiene:

$$x + 3x + 5x = 1800$$
$$9x = 1800$$
$$x = \frac{1800}{9} = 200 \text{ (valor del 4º. piso).}$$

Como el 2°. piso contiene 3 veces el valor del 4°. resulta:

2.° piso = 3 x = 3 X *200* = 600 *(valor del 2º. Piso)*

Sustrayendo estos dos valores de la fuerza total, se tiene:

Apéndice

1800 - 800 = 1000 *(valor de* 5 x*).*

Y ¿cómo se distribuirán debidamente estos 1000 hombres entre el 1°. y 2°. pisos? Razonando de este modo:

Según el problema, el 1°. y 2°. pisos contienen 500 hombres más que el 3°. y 4°. reunidos, es decir:

1º. + 2°. = 3º. + 4°. + 500.

Expresando numéricamente en esta ecuación lo contenido en los pisos 2°. y 4°. viene:

1°. + 600 = 3°. + 200 + 500,
1°. = 3°. + 200 + 500 - 600,
1º. = 3º. + 100.

Quiere decir: que el piso 1°. debe tener tantos hombres cuantos tiene el 3°. más 100. Y bien; siendo 100 (valor de 5 x) el número divisible entre uno y otro pisos, se sigue que al 1°. le corresponden $\frac{900}{2}$ + 100 = 550 *hombres*
y al 3º. los restantes, es decir $\frac{900}{2}$ = 450 hombres

Verificación:

En el 1er. piso hay…… 550
» » 2°. » » ……..600
» » 3º. » » ……. 450
» » 4°. » » ……. 200
Total = 1800 *hombres.*

Otra *Solución:*

Puesto que los hombres del 2.° y 4.° pisos no son más que las $\frac{4}{5}$ partes de los del 1º. y 3°. dividiendo el total de hombres en razón de 4 á 5, tendremos el número de hombres que ocupan el 2.° y 4..°, á saber:

Apéndice

9 : 4 :: 1800 : al 2.° y 4.°.
De ahí 2° y 4°. = $\frac{4 \times 1800}{9}$ =………800 .

Eso establecido; puesto que el 2º. Piso contiene 3 veces otro tanto que el 4°.

en el 2.° hay ………… 600 *hombres.*
en el *4.° » …………* 200 »

En cuanto al 1.° y 3.°, debe considerarse que el 1.° y 2.° contienen, según el problema, 500 hombres más que el 3.° y 4.° ; por consiguiente,

$$1800 - 500 = 1300,$$

el 1.° y 2.° = 2 + 500 = 650 + 500 = 1150,
el 3.0 y 4.° = $\frac{1300}{2}$ = ………………… 650.

Ahora bien; como de estos 650 hombres corresponden 200 al 4.° piso, según poco há se ha visto, es claro que

el 3.° tiene 650 -200 = ……………… 450 *hombres.*

En el 1.° y 2.° hay 1150; mas, como de éstos corresponden 600 al 2º. es claro también que

el 1.° tiene 1150 -600 = …………….. 550 *hombres.*

Se ve, en resumen, que estos cuatro resultados, son exactamente iguales á los que dió la anterior solución.

Apéndice

8º. *Solución:*

En este problema hay que tener en cuenta dos elementos: el *tiempo*)? el *espacio ó* distancia.

En cuanto al primero, el lebrel *(que lo designaremos por L*), dá 5 saltos en el mismo tiempo que la liebre (*que designaremos por 1)* da 6 saltos.

Respecto al espacio, expresa el problema que 7 saltos de *L* son iguales á 9 de *l.*

Eso establecido, resulta que la razón referente al tiempo es 5 : 6, y que la razón referente al espacio es7 : 9.

Y para saber cuánto gana *L* sobre l, en espacio, calculamos de este modo:

		L	*l*
	L hace 5 saltos ……………	5	
	l, en igual tiempo hace		6
Mientras	*L* hace………………………	1,	
	l » ………………………..		$\frac{6}{5}$;
por consiguiente, mientras	*L* » ………………………..	7	
	L » ………………………..		$\frac{42}{5}$

Es decir, que *l* hace, en igual tiempo que *L,* $\frac{42}{5}$ = 8 + $\frac{42}{5}$ *(saltos*).

Y bien; como *l* necesita dar 9 saltos para recorrer igual espacio que *L* en 7 saltos, resulta que éste ha ganado $\frac{3}{5}$ de espacio. De ahí la siguiente regla de tres:

Si *L,* en 7 saltos, gana el espacio correspondiente á $\frac{3}{5}$ de salto de *l,* ¿en cuántos saltos habrá ganado el espacio recorrido por l en los 50 saltos que llevó de ventaja?
:

$$\frac{3}{5} : 50 :: 7\, x = 350 : \frac{3}{5} = \frac{1750}{3}$$

(expresión, correspondiente al número de saltos que ha debido dar *L* hasta alcanzar á *l).* Mas, como á cada salto 6 de *L* corresponden $\frac{6}{5}$ de *l,* se sigue que

l habrá dado $\frac{1750}{3} \times \frac{6}{5} = 700$ *saltos.*

Otra *Solución (por la que se obtiene, directamente, el número de saltos hechos por la liebre)* [*].

7 : 9 : : 5 : n = ó sea 6 + $\frac{3}{7}$ saltos que debería hacer *l;* mas, como sólo ha podido hacer 6, mientras *L* ha hecho 5, resulta que ha perdido el espacio correspondiente á $\frac{3}{7}$ de salto. Viene en seguida otra regla de tres, á saber: « Si *l* ha perdido $\frac{3}{7}$ al cabo de 6 saltos, ¿al cabo de cuántos saltos perderá los 50 que llevó de ventaja? »

$$\frac{3}{7} : 6 : : 50 : x = 6 \text{ X } 50 : \frac{3}{7} = 6 \text{ X } 50 \text{ X } \frac{3}{7} = 700.$$

Comprobación:

Un medio sencillo de efectuarla es el de sujetar los saltos de *L* y los de *l* á una medida de extensión, por ejemplo el metro, y ver si la distancia que de ello resulta es, como debe ser, la misma para la liebre y el lebrel.

Eso sentado, y suponiendo que *l* avanza *un metro* por salto, viene el cálculo siguiente:

l dá 700 saltos en el mismo tiempo que *L* recorre todo su trayecto, á los cuales hay que agregar los 50 saltos que llevó de ventaja, esto es, 700 m + 50 m = 750 m

Contrayéndonos á *L,* computemos sus saltos en función de los de *l.*

Puesto que para avanzar la misma distancia, *L* da 7 saltos por 9 que da *l,* se sigue que, si el salto de *l* vale *un metro,* el de *L* valdrá $\frac{9}{7}$ *de metro,* y que, por lo tanto, sus $\frac{1750}{3}$ de salto, valen $\frac{1750}{3} \text{ X } \frac{9}{7}$ *de metro* = 750 m

Los mismos que ha recorrido la liebre; luego, la solución ha sido exacta.

9º. *Solución* (*tomada de Mr. Adhémar)*

«Fijándose en el tenor del problema con un poco de atención, se puede formularlo sin emplear más que una incógnita. En efecto, si tomamos la última frase de la enunciación, se ve que después de las operaciones hechas (de *poner* en una de las bolsas y *quitar* de las otras), debe haber *tanto* dinero en una como en cualquiera de las otras bolsas ó, en otros términos, que en cada una hay la *misma cantidad,* Por consiguiente, si se toma esta cantidad por incógnita, y la designamos por x, es evidente que el dinero contenido en la primera bolsa debe ser expresado por x -7, pues que *agregando d ella* 7 *francos, debe haber* x ».

«El dinero de la segunda bolsa es x + 5, porque, *quitando* 5 *francos de ella,* debe quedar x».

«El dinero de la tercera debe ser $\frac{x}{2}$, *porque, doblando* esta cantidad, hace x».

«En fin, el dinero de la cuarta debe ser 3 x, porque, quitando de ella los dos tercios, debe quedar x ».

(*) Esta solución es dada por el interlocutor M.

Así las .diversas cantidades contenidas, al principio, en las cuatro bolsas, se expresarán de la manera siguiente:

El dinero de la 1ª. = $x - 7$
» » » » 2ª. = $x + 5$
» » » » 3ª. = $\frac{x}{2}$

» » » » 4ª.= $3x$;

y puesto que, según la enunciación, la suma total debía ser 163 francos, se tendrá

$$x - 7 + x + 5 + \frac{x}{2} + 3x = 163 \text{ francos.}$$

Resolviéndose esta ecuación, da $x = 30$. De aquí se deduce que- .

La 1ª. tenía, en un principio, $x - 7 = 30 - 7 = 23$
La 2ª. » » $x + 5 = 30 + 5 = 35$
La 3ª. » » $\frac{x}{2} = \frac{30}{2} = 15$

La 4ª. » » $3x = 3 \times 30 = \underline{90}$
Prueba: 23 + 35 + 15 + 90 ………………………….. = 163

10º. *Solución:*

En este como en el precedente problema, la llave del misterio está en la última frase. Fijándose en ella, se nota que, para que al cuarto niño le hubiese cabido una mitad del último resto, más la mitad de una manzana, sin que nada quedáse, era menester que ese resto fuese 1, pues que sólo así podía satisfacerse á tal condición. Para mejor fijar las ideas, hagamos aquí en seguida la operación:

	Restos	mitades de resto	Medias manzanas	Haberes
Para el 4º. niño ………………………..	1	$\frac{1}{2}$	+ $\frac{1}{2}$	= 1
Para que el 3º.dejase 1 de resto, era menester que su predecesor le hubiese dejado 3 de resto porque…………………	3	$1\frac{1}{2}$	+ $\frac{1}{2}$	= 2
Para que el 2º.hubiese dejado 3 de resto, era preciso que su predecesor le hubiese dejado 7 de resto, porque………..	7	$3\frac{1}{2}$	+ $\frac{1}{2}$	= 4
Para que 1º. dejase 7 resto, debía haber 15 manzanas, porque…………….	15	$7\frac{1}{2}$	+ $\frac{1}{2}$	= 8
Comprobación: ……………			*Total*	= 15

11º. *Solución:*

Puede aplicarse al presente caso la observación del Maestro Adhémar, «*que no es el largor de la enunciación ni del cálculo, lo que hace difícil la solución de un problema, sinó la mayor ó menor dificultad que se encuentre para traducirla en lenguaje matemático»,* pues, aunque á primera vista parezca muy complicada esta cuestión, bien examinada, ella puede traducirse *palabra por palabra,* por consiguiente, la solución es fácil. En efecto, representando por x el total de la herencia, efectuando las multiplicaciones, y haciendo desaparecer los divisores de las fracciones y los paréntesis, se tiene sucesivamente:

$$x = \overbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}\,x\;\tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{1}{2}\,x\;\tfrac{3}{4}\,x\;\tfrac{2}{3}x}^{\text{al hijo mayor}} + \overbrace{\tfrac{1}{5}\,x\;\tfrac{1}{2}\,x\;\tfrac{3}{4}\,x\;\tfrac{2}{3}\,x}^{\text{al segundo hijo}}$$

$$\overbrace{+\;\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x\;\tfrac{3}{4}x\;\tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{1}{5}x\;\tfrac{1}{2}\,x\;\tfrac{3}{4}x\;\tfrac{2}{3}\right)x + 6.000.}^{\text{al hijo menor}}$$

$$X = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{12}x + \left(\tfrac{6}{24}x + \tfrac{6}{120}x\right) + \left(\tfrac{6}{48}x + \tfrac{6}{240}x + 6000\right)$$

Denom.com.3x2x2x4x5=240

240 x = 80x + 40x + 60x + 12x + 30x + 6x + 1440000.
240 x – 228 x = 1440000.
12 x……… = 1440000.
x……… $= \dfrac{1440\,000}{12}$ = 120000f (*valor de la herencia).*

Verificación:

Parte del 1er. hijo…………………. = 60000
» » 2º. » …………………. = 36000
» » 3º. » …………………. = 24000

Apéndice

12º. *Solución*

Puesto que contando las ovejas y el pastor de 3 en 3 y de 11 en 11, queda uno de resto, el número de las ovejas debe ser un múltiple de 3 y de 11. Ahora bien; todos los múltiples de 3 y de 11, inferiores á 150, son 3 X 11, ó 33; 2 veces 33 son 66; 3 veces 33 son 99; 4 veces 33 son 132….. (Ahí es preciso detenerse, porque 5 veces 33 son 165, número superior al *máximo* indicado por el pastor, que es 150). Por consiguiente, sólo hay que ver cuál de esos cuatro múltiples, aumentado con 1, es múltiple de 5. El múltiple 99 satisface á esta condición, como es fácil de comprobar.

13º. *Solución:*

Después de haber echado los 10 litros de vino del vaso A en B, y los 10 litros de agua de B en A,-

	vino,	agua	mezcla
A, tendrá …………………	65	10	75
B, tendrá …………………	10	65	75

Planteada así la cuestión, las operaciones relativas son en todo análogas á las ejecutadas en el problema 8°. página 46 de este Apéndice, debiendo obtenerse, por ese medio, los siguientes resultados:

$56\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{1}{3} = 57\tfrac{2}{3}$ litros de vino.
$8\tfrac{2}{3} + 8\tfrac{2}{3} = 17\tfrac{1}{3}$ » » agua.
$8\tfrac{2}{3} + 8\tfrac{2}{3} = 17\tfrac{1}{3}$ litros de vino.
$56\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{1}{3} = 57\tfrac{2}{3}$ » » agua.

La comprobación no ofrece dificultad.

14º. *Solución:*

[Es menester observar, ante todo, que este problema no es una cuestión verdaderamente matemática, ni aritmética. por no estar sujeta á las reglas estrictas del arte de los números; pero en fin, es usual, tiene el mérito de ser curiosa y puede servir para ejercitar el discurso: vamos á resolverlo, estableciendo al efecto ciertas reglas especiales, y designando las tres vasijas de mayor á menor (1ª. 2ª. y 3ª.), por P, S, T.]

Todo el secreto está en principiar por llenar con el contenido de P la vasija S y con ésta la vasija T, haciendo en seguida nuevas combinaciones, hasta conseguir que en P queden 2 litros, pues entonces la vasija T vendrá á ser competente medida para completar los 3 litros que faltan en P. Es menester, además, no repetir ninguna combinación ya ejecutada, porque esto sería dar paso atrás y encerrarse en un círculo vicioso.

Eso establecido, he aquí el orden en que convendría ejecutar las diversas combinaciones:

	P	S	T
1ª. *Combinación:* Con el contenido de P. lleno la vasija S, y con el de ésta lleno T; quedando de esta suerte …………………………..	3	4	3
2ª. *Combinación:* Vacío Ten P, y lleno T con S, Quedan …………………………………….	6	1	3
3ª. *Combinación:* Vacío T en P, y paso á T el 1 de S. Quedan …………………………………	9	0	1
4ª. *Combinación:* Lleno S con el contenido de P, y quedan …………………………………..	2	7	1
5ª. *Combinación:* Con S lleno T; en seguida vacío T en quedan ……………………………..	5	5	0

Está, como se ve, resuelto el problema.

15º. *Solución:*

Tomando por incógnita la edad que el hijo tenía hace diez años, decimos:

	El hijo	El padre
Que en aquel tiempo tenían …………………	x	5x
Actualmente deben tener diez años más cada uno, es decir ……………………………	x + 10	5x+ 10

Mas, como según el problema, la edad del padre hoy sólo vale tres veces la edad del hijo, se sigue que $5x + 10 = 3(x + 10)$.

Resolviendo esta ecuación, se obtiene $x = 10$, es decir, que en aquel tiempo el hijo tenía 10 años y el padre 5 veces 10, esto es, 50 años. Por consiguiente, hoy tienen: el hijo 20 años, y el padre 60 años.

La comprobación cae de su peso.

16º. *Solución:*

Esta cuestión, en que hay dos verdaderas incógnitas (el número de las mujeres y el de los hombres), es esencialmente algebraica; mas, procediendo como al tanteo, según lo hicimos en el problema 14º. (pág. 557), puede ser resuelta aritméticamente.

He aquí un medio que me ocurre: Doblando el exceso del número de los hombres,. se tiene 48. Suponiendo que éste haya sido el número de los hombres y 24 el de las mujeres, resultaría 48 -24 = 24, que satisface á la primera condición; mas no así á la segunda, porque, si se quitan 4 de una y otra parte, quedan 20 mujeres y 44 hombres, que no forman el triple de aquéllas. Se prevé, sin embargo, que doblándose la sustracción que acaba de hacerse, se puede llegar al resultado apetecido. En efecto, 48-8=40 *hombres,* y 24-8=16 *mujeres.*

Comprobación:

Había en un principio 40 hombres y 16 mujeres. Diferencia=24 Habiéndose retirado
 4 hombres y 4 mujeres
quedan 36 » » 12 » Cociente = $\frac{3}{1}$

17°. *Solución:*

Representando á los tres jugadores (según su orden numérico 1º. 2º. y 3°.) por P, S. T. la solución del problema se encontrará en el siguiente cuadro, formado á favor del razonamiento puesto al pie:

	P	S	T
Antes de jugar..	65	35	20
Después de la 1ª.partida......................................	10	70	40
» » 2ª. "	20	20	80
» » 3ª. »	40	40	40

Razonamiento:

La última frase del problema es aquí la clave que ha de conducirnos al descubrimiento de la incógnita.

En efecto; puesto que cada uno ha quedado con 40*f,* pongo en la línea inferior del cuadro, 40 bajo P, 40 bajo S *y* 40 bajo T.

Esta línea, que nos indica la situación en que quedaron los jugadores después de la 3ª. partida, nos facilita el descubrimiento de la en que se encontraban después de la 2ª.

¿Cuánto tenían entonces? -Considerando que T ha doblado su fondo á los otros dos, concluyo que P *y* S tenían $\frac{1}{2}$ de 40 = 20f cada uno; por consiguiente, pongo 20 bajo P y 20 bajo S. En cuanto á T, que ha quedado con 40 f después de haber dado otros tantos á P Y S, resulta que, antes de perder la 3ª. partida, tenía 40+ 40 = 80, que los pongo en su respectiva casilla.

Y ¿cuál fué el estado de los fondos después de la 1ª. partida? —Puesto que las cantidades que acaban de obtenerse resultaron de que el jugador S duplicó el dinero de los otros dos, se sigue que antes de eso, P tenía 10 f, que los pongo en su respectivo lugar; que T tenía 40 f, que también los pongo; y que S debió haber tenido 70 f, después de haberse jugado la 1.a partida, de este modo: siendo él quién perdió la 2ª. partida, dió 10f á P y 40f á T, quedándole 20 f; Juego, 50f que pagó y 20f que le quedaron, hacen 70f que debía haber tenido después de jugarse la 1ª. partida, y que los pongo en su lugar.

Nos resta empero que averiguar los fondos con que entraron al juego. Para ello, me digo: el jugador P ha doblado, el fondo de los otros dos; por lo tanto, antes de jugarse la 1ª. partida, tuvieron: S 35f, T 20f y P 10f que le han quedado + 35 dados á S + 20 dados á P = 65f; cantidades que expresan los tres fondos primitivos, y que las apunto en sus respectivos lugares.

NOTA.- Bueno es fijarse en que el fondo con que entró á jugar T, pudo haberse previsto desde que se conoció la situación en que se hallaban los jugadores después de la 2ª. partida, pues los 81f que entonces tenía T resultaron de que P le dobló su fondo primitivo y que S se lo cuadruplicó. Luego, dicho fondo debió ser $\frac{1}{4}$ de 80f, ó sea 20f, lo que se confirma por el resultado que dá el cuadro.

Comprobación:

P tenía 65, S 35 y T 20 =	120f
Cada uno de los tres quedó al fin de la partida con 40f, que multiplicados por 3, hacen	120f

18º. *Solución:*

Tomando por incógnita la edad que tenía la hija *en aquel tiempo,* y designando por x ese valor, podemos hacer el siguiente cómputo:

	hija	*hijo*
En aquel tiempo tenían	x años	(x+2x) años
Actualmente tienen …………………………	13 x	3 x + 2 x
Cuando ella llegue á tener la edad actual del hermano, ella y él tendrán ………..	3 x + 2 x	5 x + 2 x
Haciendo las sumas de uno y otro lado, resulta ………………………………………	5 x	*7 x*

De ahí las siguientes ecuaciones:

5 x + 7 x = 60 años.
12 x = 60
x = =5ª. *5 años (edad de la hija en aquel tiempo).*

Comprobación:

	hija	hijo
En aquel tiempo, la hija tenía x =………………………	5 años	
» » » el hijo » 3 x =………………………		15 años
Actualmente, ella tiene 3 x y él 5 x =……………………	15 »	25 »
Cuando ella llegue á tener 5 x, él tendrá 7 x = …………………………………………………….	25 »	35 »

Por consiguiente, 25 + 35 = 60 años.

19º. *Solución*:

Queriendo proceder del mismo modo que en la Cuestión 18ª. Art. 743, hay que razonar del modo siguiente:

«Puesto que el *complemento* del penúltimo hijo tiene que ser igual á la *asignación* del 1er. hijo, esto es, 500f en el presente problema, se sigue que estos 500*f* deben ser la $\frac{1}{8}$ parte de cierto número; y ¿cuál es ese número? —evidentemente 4000 (que es el producto de 500 por 8); luego, el resto de 4000, que es 3500, debe ser íntegramente el haber del último hijo. Por otra parte, este resto, que contiene 7 veces la asignación del 1er. hijo, debe corresponder al hijo nº. 7, que determina al mismo tiempo el *número* de los hijos; y luego, multiplicando el haber 3500 por el número de hijos, se tiene el monto de los bienes del padre, esto es, 3500 X 7 = 24500 francos».

2ª. *Solución:*

Por vía de ejercicio, voy á resolver el mismo problema por medio de una ecuación, valiéndome al efecto de las reglas establecidas en el art. 712, para las ecuaciones literales, y discurriendo además como el Maestro Adhémar (art. 725).

El presente problema presenta tres principales incógnitas, que son: el *número* de hijos, *la parte* de herencia correspondiente á cada uno y el *monto* de los bienes del padre.

Desentendiéndome, por lo pronto, de las dos primeras incógnitas, tomo la tercera, esto es el *monto* de los bienes, denominándola x.

Ahora bien; puesto que las *partes* ó haberes de los hijos han de ser iguales entre sí, puede establecerse desde luego una ecuación que exprese en función de x (*) las partes de los dos primeros hermanos, como que son susceptibles de traducirse, en lenguaje matemático, más fácilmente que las otras partes.

Empezando por la parte del primer hijo, que llamaremos p', la traducción es ésta:

$P' = 500 + \frac{1}{8}(x - -500)$ *[haber del 1er. hijo]*.

I, como el 2°. hijo ha de tomar su parte del *resto* que deje el 1°. debe buscarse previamente cuál sea ese' *resto.* Al efecto me digo:

« Quitando de x el haber del 1er. hijo, y designando el resto por r', se tiene:

$r' = x - [500 + \frac{1}{8}(x - 500)] = x - 500 \frac{x}{8} + \frac{500}{8} = \frac{}{8}$

$x - \frac{4000}{8} + \frac{500}{8} = \frac{7}{8}x - \frac{3500}{8}$ *[resto que deja el 1er. hijo]*.

Así obtenido el resto en función de *x,* podemos obtener en la misma función *la parte* del 2°. hijo designándola por p". En efecto:

$p'' = 1000 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8} - \frac{3500}{8} - 100\right).$

Teniendo ahora á la vista los dos haberes ó partes, podemos establecer esta ecuación:

$500 + \frac{1}{8}(x - 500) = 100 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}x - \frac{3500}{8} - 1000\right),$

de la cual, siendo una sola la incógnita, es muy fácil obtener el valor de ella.

En efecto, haciendo desaparecer los denominadores y paréntesis á la vez, se tiene:

$32000 + 8x - 4000 = 64000 + 7x - 3500 - 8000$
De ahí, $x = 64000 - 3500 - 8000 - 32000 + 4000 = 68000 -$
$43500 = 24500$ [*monto de los bienes del padre*].

Ya que se halla descubierto el *monto de los bienes* no hay sino que reemplazar x con su valor numérico, en la ecuación p', para obtener el haber del 1er. hijo, En efecto:

Haber numérico $p' = 500 + \frac{1}{8}(24500 - 500).$
$8p' = 500 \times 8 + 24500 - 500 = 4000 + + 24500 - 500 = 28000$

(*) La expresión *en función de x* quiere decir: que *x* ha de servir de término de comparación ó de unidad, con objeto de apreciar á qué porción de esa unidad corresponde cada uno de los haberes; es como si se expresase, por ejemplo, el valor de cinco francos en función de 1 libra esterlina.

De ahí,

$$p' = 3500$$

Y bien; como el haber del 1er. hijo debe ser igual al de cada uno de los demás hijos, se sigue que cuantas veces 3500f esté contenido en el total de los bienes, otros tantos hijos debe haber (art. 211 *bis).* Así,

$$\frac{24500}{3500} = \frac{245}{35} = 7(\textit{número de hijos})$$

En definitiva: de las operaciones que preceden resulta que: 24500 f es el monto de los bienes del padre, 3500 f la parte de cada hijo y 7 el número de hijos, ni más ni menos que el resultado obtenido en la anterior Solución.

Advertencia al preceptor

Para formar otros problemas del mismo género que el precedente, se empezará por fijar el número de hijos; en seguida, se multiplicará este número por él mismo, cuyo producto (que matemáticamente se llama *el cuadrado* de ese número) servirá de base para formar el monto de la sucesión hereditaria; después, se compondrá una fracción que tenga por numerador 1 y por denominador un número superior en una unidad al número de hijos, y la fracción así formada servirá para indicar qué parte ha de tomarse de cada uno de los restos. Así (generalizando la cuestión), si uno quiere que sean 3 (4, 5, 6 ó más) los individuos interesados en una repartición cualquiera, multiplicando 3 por 3, tendrá la cantidad que debe repartirse; y formando la fracción $\frac{1}{4}$ tendrá la parte alícuota que debe sacarse de cada resto. En efecto:

El 1er. interesado recibirá $1 + \frac{1}{4}$ de $8 = 1 + 2 = 3$

El 2º. » » $2 + \frac{1}{4}$ de $4 = 2 + 1 = 3$

El 3er. » » $3 + 0 . \quad = 3$

Cantidad por repartirse… 9

1er. resto 6
2º. resto 6 - 3 = 3

Ya se comprende que, cuando se quiera que la cantidad por repartir sea del orden de decenas, centenas, miles bastará agregar al número de los interesados, multiplicado por sí mismo, uno, dos, tres … ceros.

Comprobada la exactitud del resultado, por dos distintos procedimientos, voy á aprovechar del segundo, esto es, de la *ecuación literal,* para ilustrar el principio que dejamos pendiente en el arto 730, pág. 393.

Dilucidación

Tomemos la ecuación *r',* que expresa el resto alejado por el 1er. hijo después de haber tomado su parte:

$$r' = x - [500 + \tfrac{1}{8}(x - 500)].$$

Reemplazando x por su valor numérico, que ya conocemos, se tiene:

$$r' = 24500 - [500 + \tfrac{1}{8}(24500 - 500)]$$

En este estado, alguien podría decir pero ¿para qué se ha dejado entre paréntesis, en el segundo miembro de la ecuación, los términos 24590 - 500, cuando está á la vista que los dos términos no hacen más que una sola cantidad, es decir, 24000? »

Yo respondería á esa observación: que ella es muy justa, ahora que los dos términos se hallan numéricamente expresados; pero que no podía suceder lo mismo cuando el *monto* de los bienes era desconocido y estaba representado por *x,* pues que entonces era imposible hacer la sustracción, y reducir los dos términos á uno solo. Siendo ello imposible, fué preciso sacar fuera del paréntesis primero la $\frac{1}{8}$ parte de $x = \frac{x}{8}$ y después la $\frac{1}{8}$ de $500 = \frac{500}{8}$.

Eso sentado, hagamos desaparecer los paréntesis del segundo miembro de la última ecuación r*',* y analicemos la ecuación:

$$r' = 24500 - 500 - \frac{24500}{8} + \frac{500}{8}$$

Vénse en esta transformación dos cosas dignas de atención: 1ª. que los términos que se hallaban afectados del signo + (expreso *ó* sobreentendido) dentro del gran paréntesis, han salido fuera de él con el signo -, como cantidades que deben sustraerse del valor de *r';* 2ª. que el término - 500 ha salido del paréntesis con el signo + .Y ¿ por qué esto? He aquí la razón:

Hallándose dentro del paréntesis, significaba que ese valor debía disminuirse de la cantidad 24500, y, no habiéndose hecho así, el término - $\frac{24500}{8}$ salía con un aumento de $\frac{500}{8}$. Para compensar ese aumento, era preciso aumentar también el valor de *r',* haciendo salir del paréntesis el término - $\frac{500}{8}$ con el signo + .

Sucede en esa operación, algo parecido á lo que pasa en la *Sustracción de números enteros* (art. 56, página. 50).

Algo de eso ocurre también en la *Teneduría de libros.* Ya dijimos en otra parte, y preciso es repetirlo: los tenedores de libros emplean las palabras *Haber* y *Debe* para expresar, respectivamente, las cantidades que en lenguaje matemático se señalan con los signos + y - Sea también dicho de paso que, siendo prohibido por la ley que en los libros de cuentas haya enmendaturas ó raspaduras, los tenedores de libros, cuando han cargado de más al *Debe* (por error ó cualquiera emergencia), corrigen la falta sentando en el mismo libro una *contrapartida* aumentando al *Haber* igual cantidad; y viceversa, si el error se ha cometido en el haber.

Eso establecido: supongamos que, habiéndose encomendado á un tenedor de libros la distribución de los bienes testamentarios, hubiese abonado al 1er. hijo en su libro $\frac{1}{8}$ parte de 24500 f en vez de $\frac{1}{8}$ de 24000 f, es decir, 62 f ,50 de más; entonces corregirá la falta, según se ve en la cuenta que sigue:

Año 1894	Cuenta de la Testamentaria del señor N.	Debe F	Haber F
Marzo2	Por entrega que hoy me ha hecho la Testamentaría		24.500,-
» 6	Dados al 1er. hijo, por su asignación …………… 500,-	356250	
» 6	Abonables al mismo de 24500 …… 3.062,50		
» 7	Por exceso cometido en la partida anterior, esto es $\frac{1}{8}$ de 24500, en vez de $\frac{1}{8}$ de 24000…………………………..		62,50

Si en este estado quisiera el tenedor de libros darse cuenta del resto que queda á favor de la testamentaría, le bastaría hacer las sumas del Haber y del Debe, y sustraer la segunda de la primera, lo que daría:

Haber = 24562,50
Debe = 3562,50
Resto = 21000,00

Veamos ahora qué resto habría quedado si al sentar la tercera partida se hubiese efectuado previamente la sustracción indicada en el *Haber numérico* p'. En tal caso, esa partida se habría reducido á esta: « Al mismo» $\frac{1}{8}$ (24000 - 500) = $\frac{24000}{8}$ = 3000; y las sumas del Haber y del Debe, y el Resto habrían sido como sigue:

Haber = 24500
Debe = 3500
Resto = 21000

Se ve por lo que precede que, de uno ú otro modo, el resultado es el mismo, con la circunstancia sí de que, en el primer caso, el haber ha aumentado en 62f,50; pero que, habiéndose aumentado igualmente el Debe, el resultado, ó sea el Resto (cantidad buscada) no ha sufrido alteración alguna.

Apéndice

Para terminar la presente dilucidación, debo decir: que, cuando un paréntesis se halla afectado del signo +, todos los términos positivos que contiene, salen del paréntesis con el signo + y los términos negativos con el signo —; que, cuando el paréntesis se halla afectado del signo —, todos los términos positivos salen con el signo — y los negativos con el signo +. Es por esto que comúnmente dicen los matemáticos: + por + (*) da *más,* y + por —da *menos,*.— por + da *menos,* y — por — da *más,* cumpliéndose en este último caso lo del dicho común: *Dos negaciones importan una afirmación.*

Nota.- El caso de estar encerrados en un *paréntesis negativo* términos negativos, rarísima vez puede presentarse en una cuestión puramente aritmética, y es por esta razón que no se le ha discutido en el texto del tratado.

REFLEXIONES

ACERCA DE LOS PROBLEMAS

Era, hablando de los problemas por el estilo dé los de la 3ª. *Serie,* que decía Mr. Adhémar: *habían sido expresamente confeccionados para calentar la cabeza… ;* y para hacer perder el tiempo, nos atreveríamos á añadir. Parécenos muy del caso citar aquí el dicho de un campesino de aquestos lugares quien, habiéndosele preguntado qué uso ó aplicación industrial tenían ciertos árboles que se hallaban á la vista, de alta talla y de mucho follaje, contestó con aire sencillo: «Sólo podrían servir para engañar á la vista, señor; fuera de eso, son *árboles ociosos».* Y en verdad que no se comprende qué provecho pueda sacarse de semejantes problemas. Fijándonos, por ejemplo, en el de los tres jugadores, no sólo es extravagante el asunto, sino también inverosímil; pues no se comprende que haya dos hombres, á cual más insensatos, que, teniendo el uno 65 francos y el otro 35, se pusiesen á jugar con un tercero que sólo disponía de 20 francos, con la condición de que el que perdiese doblaría á los otros dos su fondo; porque, si la suerte hiciese que el segundo *ó* tercero perdiese la primera partida, salta

----

(*) Es preciso fijarse en que, al desaparecer un paréntesis, se opera siempre una multiplicación del factor expreso ó sobreentendido que está antes del paréntesis, con cada uno de los términos que se hallan dentro.

á la vista que la condición sería, de hecho, ilusoria; por consiguiente, el tal problema es á la manera de los *árboles ociosos.*

Si pasamos á fijar la consideración en el problema de *un padre que deja al mayor de sus hijos 1000 francos* + $\frac{1}{6}$ d*el resto,* etc., encontraremos más que original la suposición de que llegue á suceder que un padre, en los momentos más solemnes de la vida, y tratándose del porvenir de sus hijos, malgaste el tiempo en hacer un laberinto testamentario, de tal naturaleza, que los ejecutores de su última voluntad no supiesen ni cuántos eran los hijos; y todo esto para que, al fin de cuentas; todos los hijos viniesen á quedar con iguales partes.

Se dirá que este género de problemas sirve para ejercitar el ingenio; pero mal modo de ejercitarlo nos parece el torturarlo con suposiciones que chocan al sentido común, porque esto produce, entre otros inconvenientes, el de viciar, con tales suposiciones, el criterio de los aprendices, á quienes conviene acostumbrar, desde los comienzos, á no falsear la verdad ni admitir suposiciones caprichosas.

Es cierto que la *reducción á la unidad,* por ejemplo, está basada en una serie de suposiciones; pero son suposiciones racionales, posibles y tanto más aceptables, cuanto que son necesarias para el cálculo.

Otro de los graves inconvenientes que traen consigo los problemas de que tratamos es, que ellos son propensos á producir, *ó* desaliento en los aprendices, *ó* la manía de complicar las cuestiones aritméticas.

En efecto, si el aprendiz es pusilánime ó poco perseverante, desfallece en presencia de esos fantasmas, retrocede y abandona el estudio de la ciencia, contentándose con haber aprendido las principales operaciones; ó bien, si el aprendiz tiene suficiente energía para afrontar tales dificultades, corre el riesgo de tomar afición por ese género de problemas y llegar á persuadirse que la ciencia está en tener habilidad para desatar esos nudos ciegos y, á su vez, formar otros por el mismo estilo.

Es de presumir que, á medida que se perfeccione el *método de enseñar* la ciencia de los números, irá desapareciendo ese lujo de problemas artificiosos que, en la práctica, nunca ó casi nunca llegan á tener aplicación, y que deberían ser proscriptos de las Matemáticas, como lo están de la Física y de la Química los escamoteos, y de la Gimnástica los esfuerzos exagerados; esto, aparte del tiempo que lastimosamente se pierde, siendo así que, en el siglo en que vivimos, hay tanto que saber y tanto que conocer.

Se podría objetar que en varias de las lecciones contenidas en el presente curso, se ha hecho valer algunos problemas ajenos de la verdad. A esa objeción contestaríamos: que no es posible romper de golpe con el uso tradicional y perenne; fuera de que, para haber de desterrar definitivamente tales problemas, era menester que hicieran acto de presencia y que fueran ellos sometidos á juicio, por decirlo así; tanto más cuanto que, careciendo nosotros de autoridad, debíamos limitar nuestra acción á denunciarlos. Si nos hemos equivocado, ellos subsistirán á pesar de nuestra humilde opinión: nada se habrá perdido, y antes bien, mucho se habrá ganado, porque los maestros en la ciencia tendrán ocasión de ilustrar la materia.

FIN DEL APÉNDICE Y VOLUMEN III